

PROVA SCRITTA DEL III APPELLO DI ANALISI MATEMATICA LA INGEGNERIA EDILE - RAVENNA

Nicola Arcozzi

22 marzo 2007

Nome e cognome.....

Il tempo a disposizione é di 2 ore e 30 minuti. Non si possono utilizzare calcolatrici grafiche. Non si possono utilizzare libri o appunti.

Il punteggio per gli esercizi a scelta multipla é di 3 pt. per la risposta esatta, -1 pt per una risposta errata, 0 pt. se la risposta non viene data. Negli esercizi a risposta libera non c'è punteggio negativo. Scrivete la risposta sul foglio degli esercizi, non su un foglio a parte.

Si viene ammessi alla prova orale con un punteggio superiore o uguale a 10 pt.

(1) [3pt] Sia $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la funzione lineare definita da $f(v) = Av$ ($v \in \mathbb{R}^3$),

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a-2 & 0 \\ 1 & 0 & a \\ a & 0 & a \end{pmatrix},$$

dove $a \in \mathbb{R}$. Trovare tutti i valori di a per cui l'equazione vettoriale $f(u) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ha infinite soluzioni.

- (i) Per ogni valore di a .
- (ii) $a = 0, 2$.
- (iii) $a = 1$.
- (iv) Per nessun valore di a .

(2) [3pt] Calcolare L ,

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot 4^{-n} + 5 \cdot n^{-3}}{7 \cdot 16^{-n} + 11 \cdot n^{-3}}.$$

- (i) $L = 0$.
- (ii) $L = +\infty$.
- (iii) $L = \frac{3}{7}$.
- (iv) $L = \frac{5}{11}$.

(3)[3 punti] Calcolare:

$$L = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \log(1 + 3x)}{2 \sin^2(x)}$$

- (i) $L = 0$.
- (ii) $L = +\infty$.
- (iii) $L = \frac{3}{4}$.
- (iv) $L = \frac{3}{2}$.

(4) [6pt] Consideriamo i seguenti vettori in \mathbb{R}^4 : $v_1 = (1, 1, 1, 0)$, $v_2 = (0, 1, 1, 0)$, $v_3 = (0, 1, -1, 0)$, e sia $V = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ il sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^4 da loro generato. Trovare:

- (i) $\dim(V)$, la dimensione di V ;
- (ii) una base ortonormale per V ;
- (iii) una base ortonormale per V^\perp , il complemento ortogonale di V in \mathbb{R}^4 ;
- (iv) la proiezione del vettore $u = (a, b, c, d)$ su V e su V^\perp .

(5)[3 punti] Sia $a \in \mathbb{R}$ e sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 2 & \text{se } x \leq a, \\ x^2 - a & \text{se } x > a. \end{cases}$$

Per quali valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ la funzione f è continua?

- (i) $a = 0$.
- (ii) Per ogni valore di a .
- (iii) $a = 1, 2$.
- (iv) Per nessun valore di a .

(6)[3 punti] Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile su tutto \mathbb{R} .

Sia ora $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ così definita:

$$h(x) = f(2x + 3f(x)).$$

Calcolare $h'(1)$, sapendo che $f(1) = 2$, $f'(1) = \pi$, $f'(2 + 3\pi) = 100$, $f'(8) = e$.

- (i) $h'(1) = e$.
- (ii) $h'(1) = e\pi$.
- (iii) $h'(1) = e(2 + 3\pi)$.
- (iv) $h'(1) = \pi(2 + 3\pi)$.

(7)[3 punti] Sia $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e supponiamo che $f(0) = 1$ e $f(1) = 1$.

Dalle ipotesi su f segue che

- (i) Esiste x in $[0, 1]$ tale che $f'(x) = 0$.
- (ii) f è costante su $[0, 1]$.
- (iii) Esiste x in $[0, 1]$ tale che $f(x) = 2x$.
- (iv) f non è costante su $[0, 1]$.

(8)[6 punti] Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = 1 - e^{-18x^2 + 30x - 7}.$$

- (a) Trovare gli intervalli su cui f é crescente.
- (b) Trovare massimi e minimi relativi di f .
- (c) Calcolare $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$.
- (d) Trovare gli intervalli su cui la funzione f é convessa.
- (e) Disegnare un grafico di f che tenga conto delle informazioni in (a),(b),(c), (d).