ESERCIZI DELLA I PROVA SCRITTA COMPLETA, CON SOLUZIONI.

23/12/2003

Analisi matematica L-A
prof. Enrico Obrecht, dott. Nicola Arcozzi, dott. Cataldo Grammatico

LIMITE DI FUNZIONE [3 punti] Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to 2} \frac{(x^2-3x+2)\cos(x^2-4)}{x^2-5x+6}$$

-1, 0, $-\infty$, $-\cos(4)$

Soluzione e svolgimento. Il limite vale -1.
Osserviamo che $\lim_{x\to 2}\cos(x^2-4)=\cos(0)=1$. Dunque,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2} \frac{(x^2-3x+2)\cos(x^2-4)}{x^2-5x+6} &= \lim_{x\to 2}\cos(x^2-4)\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2-5x+6} = \\
\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x-3)} &= \lim_{x\to 2}\frac{x-1}{x-3} = \\
\frac{1}{-1} &= -1
\end{aligned}$$

Un'altra maniera per affrontare il calcolo del limite e', dopo aver osservato che $\lim_{x\to 2}\cos(x^2-4)=1$, sostituire $y=x-2\to 0$, ottenendo

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2-5x+6} = \lim_{y\to 0}\frac{(y-2)^2-3(y-2)+2}{(y-2)^2-5(y-2)+6} = \ldots -1$$

DERIVATA DI FUNZIONI COMPOSTE [3 punti] Sia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ tale che $f(x)>0$, per ogni $x\in\mathbf{R}$. Sia $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ la funzione definita da

$$g(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{f(x)}\right)$$

Se $f(2) = 1$ e $f'(2) = 2$, allora
$g'(2) = -1$, $g'(1) = -\frac{4}{5}$, $g'(2) = \frac{4}{5}$, $g'(2) = \frac{1}{5}$

Soluzione e svolgimento. Abbiamo $g'(2) = -1$.

La funzione g è composizione di $x \mapsto f(x) = y$, $y \mapsto \frac{1}{y} = z$ e $z \mapsto \operatorname{arctg}(z) = t$ (tre funzioni!). Per il teorema sulla derivata di composizioni,

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{1+t^2} \cdot \frac{-1}{y^2} \cdot f'(x) \\ &= \frac{1}{1+\frac{1}{f^2(x)}} \cdot \frac{-1}{f(x)^2} \cdot f'(x) \\ &= \frac{-f'(x)}{1+f^2(x)} \end{aligned}$$

Le nostre informazioni riguardano f e f' in $x = 2$. Calcoliamo,

$$g'(2) = \frac{-f'(2)}{1+f^2(2)} = \frac{-2}{1+1^2} = -1$$

GRADIENTE DI UNA FUNZIONE

[3 punti] Sia f la funzione di due variabili definita da $f(x, y) = x^{x^2+y}$.Calcolare $\nabla f(e, 0)$.

Soluzione e svolgimento. Cacloliamo le derivate parziali. Sarà comodo scrivere $f(x, y) = e^{(x^2+y)\log(x)}$. Per calcolare $\partial_x f$, considero la variabile y come un parametro, e derivo rispetto a x,

$$\partial_x f(x,y) = e^{(x^2+y)\log(x)} \partial_x[(x^2+y)\log(x)] = e^{(x^2+y)\log(x)}[2x\log(x) + \frac{x^2+y}{x}]$$

La prima uguaglianza dipende dal teorema sulla derivata di composizioni, la seconda si ottiene derivando un prodotto (sempre rispetto alla variabile x). Per calcolare $\partial_y f$, considero la variabile x come un parametro, e derivo rispetto a y,

$$\partial_y f(x,y) = e^{(x^2+y)\log(x)} \partial_y[(x^2+y)\log(x)] = e^{(x^2+y)\log(x)} \log(x)$$

Dunque,

$$\partial_x f(e,0) = e^{e^2}[2e + \frac{e^2}{e}] = 3e \cdot e^{e^2}, \ \partial_y f(e,0) == e^{e^2},$$

quindi,
$$\nabla f(e,0) = (\partial_x f(e,0), \partial_y f(e,0)) = (3e \cdot e^{e^2}, e^{e^2})$$

MONOTONIA DI FUNZIONI [3 punti] Sia f la funzione
$$\log \frac{|x+6|}{2x^2 + |x+6|}$$
Determinare il dominio di f e gli intervalli su cui la funzione f è monotona.

Soluzione e svolgimento. Il denominatore è somma delle funzioni $2x^2$ e $|x+6|$, che sono positive o nulle per ogni numero reale x. Il denomnatore si annulla, quindi, se e solo se $2x^2 = 0$ e $|x+6| = 0$, cioè, se $x = 0$ **e** $x = -6$: il denominatore è sempre positivo. Il numeratore si annulla solo quando $x = -6$, altrimenti è positivo. Poichè $\log(y)$ è definito solo per $y > 0$, il domino di f è $R - \{-6\}$.

La funzione f è continua in $R - \{-6\}$, in quanto la si ottiene da funzioni continue mediante somme, divisioni ben definite e composizioni. La derivata di f, per lo stesso motivo, esiste in $R - \{-6\}$. Prima di calcolarla, uso una proprietà del logaritmo per non perdermi in conti complicatissimi:
$$f(x) = \log \frac{|x+6|}{2x^2 + |x+6|} = \log(|x+6|) - \log(2x^2 + |x+6|)$$
quindi,
$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{x+6} - \frac{4x + sign(x+6)}{2x^2 + |x+6|} \\
&= \frac{2x^2 + |x+6| - (x+6)(4x + sign(x+6))}{(x+6)(2x^2 + |x+6|)} \\
&= \frac{2x^2 + |x+6| - (x+6)sign(x+6) - 4x(x+6)}{(x+6)(2x^2 + |x+6|)} \\
&= \frac{2x^2 - 4x(x+6)}{(x+6)(2x^2 + |x+6|)} \\
&= \frac{-2x(x+12)}{(x+6)(2x^2 + |x+6|)}
\end{aligned}$$

Alcune osservazioni. Nella prima uguaglianza ho usato direttamente il fatto che $D\log(|x|) = \frac{1}{x}$. Altrimenti, avrei potuto calcolare
$$D\log(|x|) = \frac{sign(x)}{|x|} = \frac{1}{x},$$

poichè $|x| = x \cdot sign(x)$. Di questo ultimo fatto si fa uso anche nella quarta uguaglianza. Ora, il fattore $2x^2 + |x+6|$ al denominatore di f', è positivo per ogni x nel dominio di f, per quanto detto prima. Il segno degli altri fattori si determina in maniera del tutto elementare.*La funzione è crescente in* $(-\infty, -12]$ *e* $(-6, 0]$. Il punto $x = -6$ non appare, poichè on è nel domnio della funzione.Analogamente, *la funzione è decrescente in* $[-12, -6)$ *e* $[0, \infty)$.

LIMITE DI FUNZIONE CON TAYLOR [3 punti] Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{4x\cos(2x) + 2x\sin(x) - 4x\sqrt{1+x}}{x\sinh^2(2x)\log(x+2)}$$

$-\frac{31}{16\log(2)}$, $-\infty$, $-\frac{15}{8\log(2)}$, $-\frac{31}{16}$

Soluzione e svolgimento. Il limite è $\frac{-15}{8\log(2)}$.

Si verifica immediatamente che si tratta di una forma di indeterminazione, del tipo "0/0". Chi si vuole semplificare la vita, osserva che c'è un fattore x da raccogliere al numeratore, che si semplifica con un fattore x al denominatore. Procedo come se non avessi fatto questa osservazione.

Analizziamo i fattori che compaiono a numeratore e denominatore uno per uno, iniziando dai più semplici (ovviamente!). Se $x \to 0$, $\log(x+2) \to \log(2)$, questo fattore non ci infastidisce punto. $\sinh(2x) \sim 2x$ per $x \to 0$, perchè lo sviluppo di mcLaurin di sinh è $\sinh(x) = x + o(x)$. Quindi,abbiamo che, per $x \to 0$,

$$\frac{4x\cos(2x) + 2x\sin(x) - 4x\sqrt{1+x}}{x\sinh^2(2x)\log(x+2)} \sim \frac{4x\cos(2x) + 2x\sin(x) - 4x\sqrt{1+x}}{4x^3\log(2)}$$

C'è ora da vedere come si comporta il numeratore. Lo sviluppiamo in polinomio di mcLaurin, e non ha senso che consideriamo termini di grado superiore a 3, poichè il denominatore è, sostanzialmente, x^3. Procediamo, ricordando che **gli asintotici, in questo caso, non servono assolutamente a nulla (se non a fare errori)** perchè somme e differenze di asintotici non hanno alcuna utilità, mentre lo hanno prodotti e divisioni di asintotici.

$$4x\cos(2x) = 4x\left(1 - \frac{(2x)^2}{2!} + o(x^2)\right) = 4x - 8x^3 + o(x^3)$$

(ho usato il fatto che $xo(x^2) = o(x^3)$, che è anche il motivo per cui ho sviluppato $\cos(x)$ fino al secondo grado),

$$2x\sin(x) = 2x(x + o(x^2)) = 2x^2 + o(x^3)$$

(valgono osservazioni simili a quelle esposte sopra) e

$$-4x\sqrt{1+x} = -4x(1+x)^{1/2} = -4x(1+1/2\cdot x-1/8\cdot x^2+o(x^2)) = -4x-2x^2+1/2\cdot x^3+o(x^3)$$

Sommo il tutto,

$$\begin{aligned} 4x\cos(2x) + 2x\sin(x) - 4x\sqrt{1+x} &= \\ 4x - 8x^3 + o(x^3) + 2x^2 + o(x^3) - 4x - 2x^2 + 1/2\cdot x^3 + o(x^3) &= \\ (-8+1/2)x^3 + o(x^3) = \frac{-15}{2}x^3 + o(x^3) & \end{aligned}$$

Quindi,

$$\frac{4x\cos(2x) + 2x\sin(x) - 4x\sqrt{1+x}}{4x^3\log(2)} \sim \frac{\frac{-15}{2}x^3 + o(x^3)}{4x^3\log(2)} = \frac{-15+o(1)}{8\log(2)} \to \frac{-15}{8\log(2)}$$

per $x \to 0$.

PRIMITIVA DI UNA FUNZIONE [3 punti] Trovare una primitiva della funzione f,

$$f(x) = \frac{(2+4\cos(x))\sin(x)}{\sqrt{1+\cos(x)+\cos^2(x)}}$$

Soluzione e svolgimento. Una primitiva è $= -4\sqrt{1+\cos(x)+\cos^2(x)}$.
Per maggior suggestione, scrivo la primitiva come

$$\int \frac{(2+4\cos(x))\sin(x)}{\sqrt{1+\cos(x)+\cos^2(x)}}dx$$

A parte le primitive d poche funzioni elementari, sappiamo solo integrare (e anti-derivare, nel caso delle primitive) per parti e sostituzioni. La variabile x appare sempre come argomento di funzioni trigonometriche: forse c'è una buona sostituzione da fare.

Proviamo. $D(1+\cos(x)+\cos^2(x)) = -\sin(x) - 2\cos(x)\sin(x) == -\sin(x)(1+2\cos(x)) = -1/2[(2+4\cos(x))\sin(x)]$. Colpo fortunato! Poniamo $y = 1+\cos(x)+\cos^2(x)$, $dy = -1/2[(2+4\cos(x))\sin(x)]dx$. La primitiva che cercavamo diventa quindi,

$$\int \frac{(2+4\cos(x))\sin(x)}{\sqrt{1+\cos(x)+\cos^2(x)}}dx = -2\int \frac{dy}{\sqrt{y}} = -2\int y^{-1/2}dy.$$

Quest'ultima primitiva si calcola facilmente,

$$-2\int y^{-1/2}dy = -2\frac{y^{-1/2+1}}{-1/2+1} = -4y^{1/2}+c$$

Ricordo chi era y, e trovo **tutte** le primitive di f:

$$\int \frac{(2+4\cos(x))\sin(x)}{\sqrt{1+\cos(x)+\cos^2(x)}} = -4\sqrt{1+\cos(x)+\cos^2(x)}+c,\ \ c\in R$$

L'esercizio mi chiedeva **una** primitiva. Scelgo, per esempio, $-4\sqrt{1+\cos(x)+\cos^2(x)}$.

INTEGRALE Calcolare l'integrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} (x+1)\sin(3x)dx$$

Soluzione e svolgimento. L'integrale vale $\pi/9+2/3$.

Questo è il tipico integrale che si calcola per parti, poichè $x+1$ si semplifica derivando, mentre le primitive di $\sin(3x)$ si calcolano facilmente, e altrettanto facilmente si integrano. Calcoliamo,

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{3}} (x+1)\sin(3x)dx &= [(x+1)\frac{-\cos(3x)}{3}]_0^{\pi/3} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} 1\cdot\frac{-\cos(3x)}{3}dx \\ &= (\pi/3+1)\frac{-\cos(\pi)}{3} - \frac{-\cos(0)}{3} + \int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos(3x)}{3}dx \\ &= \frac{1}{3}(\pi/3+1+1) + [\frac{\sin(3x)}{9}]_0^{\pi/3} = \pi/9+2/3\end{aligned}$$

ASINTOTI Calcolare dominio e eventuali asintoti della funzione f,

$$f(x) = \sqrt{\frac{8x^3+1}{x+1}}$$

Soluzione e svolgimento. Il dominio della funzione è $(-\infty,-1)\cup[-1/2,\infty)$. C'è un asintoto verticale da sinistra per $x\to-1$. Ci sono asintoti obliqui per $x\to\pm\infty$: $y=2\sqrt{2}x-\sqrt{2}$, per $x\to\infty$, e $y=-2\sqrt{2}x+\sqrt{2}$, per $x\to-\infty$.

Per il dominio, bisogna dar senso alla radice quadrata, dunque occorre risolvere la disequazione

$$0 \leq \frac{8x^3+1}{x+1} = \frac{(2x+1)(4x^2+2x+1)}{x+1}$$

(quindi, implicitamente, porre $x+1 \neq 0$). La soluzione della disequazione è $x \in (-\infty,-1) \cup [-1/2,\infty)$ (cioè, $x < -1$ o $x \geq -1/2$).

C'è asintoto verticale da sinistra per $x \to -1$, poichè $\lim_{x\to -1} f(x) = \infty$.

Vediamo se ci sono asintoti obliqui (una procedura diversa viene data alla fine). Inizio a calcolare

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\sqrt{\frac{8x^3+1}{x+1}} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{8x^3+1}{x^2(x+1)}} = 2\sqrt{2}$$

e

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x}\sqrt{\frac{8x^3+1}{x+1}} = \lim_{x\to-\infty} -\sqrt{\frac{8x^3+1}{x^2(x+1)}} = -2\sqrt{2}.$$

Per $x \to -\infty$, il segno meno viene dal fatto che, per $x < 0$, $-x > 0$ e quindi

$$\frac{1}{x}\sqrt{\frac{8x^3+1}{x+1}} = -\frac{1}{-x}\sqrt{\frac{8x^3+1}{x+1}} = -\sqrt{\frac{8x^3+1}{x^2(x+1)}}$$

Potremmo avere un asintoto obliquo $y = 2\sqrt{2}x + p$ per $x \to \infty$ e un asintoto obliquo $y = -2\sqrt{2}x + q$ per $x \to -\infty$. p e q potrebbero essera calcolati simultaneamente, se osservassimo che i candidati asintoti hanno la forma $y = 2\sqrt{2}|x| + r$ per $x \to \pm\infty$. Basterebbe calcolare i limiti (se esistono)

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left(\sqrt{\frac{8x^3+1}{x+1}} - 2\sqrt{2}|x| \right).$$

Procederò in maniera più pedante, anche se questo raddoppia i conti e, come vedrete, quadruplica le possibilità di errore.

$$\begin{aligned} p &= \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{\frac{8x^3+1}{x+1}} - 2\sqrt{2}x \right) \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{8x^3+1} - 2\sqrt{2}x\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{x\to\infty} \frac{(8x^3+1) - 8x^2(x+1)}{(\sqrt{8x^3+1} + 2\sqrt{2}x\sqrt{x+1})\sqrt{x+1}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{-8x^2+1}{(\sqrt{8x^3+1} + 2\sqrt{2}x\sqrt{x+1})\sqrt{x+1}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2(-8+1/x^2)}{(x^{3/2}\sqrt{8+1/x^3} + 2\sqrt{2}x^{3/2}\sqrt{1+1/x})x^{1/2}\sqrt{1+1/x}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2(-8+1/x^2)}{x^{3/2+1/2}(\sqrt{8+1/x^3} + 2\sqrt{2}\sqrt{1+1/x})\sqrt{1+1/x}} \\
&= -8/(4\sqrt{2}) = -\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

Abbiamo quindi l'asintoto obliquo $y = 2\sqrt{2}x - \sqrt{2}$, per $x \to \infty$.

Per l'altro asintoto, i conti sono molto simili (devo fare attenzione a quando spezzo la radice, di conservare fattori positivi):

$$
\begin{aligned}
q &= \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{\frac{8x^3+1}{x+1}} + 2\sqrt{2}x\right) \\
&= \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{\frac{-8x^3-1}{-x-1}} + 2\sqrt{2}x\right) \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{-8x^3-1} + 2\sqrt{2}x\sqrt{-x-1}}{\sqrt{-x-1}} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{(-8x^3-1) - 8x^2(-x-1)}{(\sqrt{-8x^3-1} - 2\sqrt{2}x\sqrt{-x-1})\sqrt{-x-1}} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{8x^2-1}{(\sqrt{-8x^3-1} - 2\sqrt{2}x\sqrt{-x-1})\sqrt{-x-1}} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2(8-1/x^2)}{((-x)^{3/2}\sqrt{8+1/x^3} + 2\sqrt{2}(-x)^{3/2}\sqrt{1+1/x})(-x)^{1/2}\sqrt{1+1/x}} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2(8-1/x^2)}{(-x)^{3/2+1/2}(\sqrt{8+1/x^3} + 2\sqrt{2}\sqrt{1+1/x})\sqrt{1+1/x}} \\
&= 8/(4\sqrt{2}) = \sqrt{2}
\end{aligned}
$$

Abbiamo quindi l'asintoto obliquo $y = -2\sqrt{2}x + \sqrt{2}$, per $x \to -\infty$.

Per calcolare gli asintoti, c'è una **procedura alternativa**, che utilizza gli sviluppi di Taylor.Tenete conto del fatto che $\sqrt{x^2} = |x|$!

$$
f(x) = \sqrt{\frac{8x^3+1}{x+1}}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sqrt{\frac{x^3(8+1/x^3)}{x(1+1/x)}} \\
&= 2\sqrt{2}|x|\sqrt{\frac{1+1/(8x^3)}{1+1/x}}
\end{aligned}
$$

A questo punto, sviluppo la radice in polinomio di Taylor rispetto alla variabile $z = 1/x$, osservando che $z = 1/x \to 0$ per $x \to \pm\infty$. Mi basterà uno sviluppo di primo grado. Utilizzerò prima lo sviluppo di $1/(1+z) = 1 - z + o(z)$, poi $\sqrt{1+w} = 1 + 1/2w + o(w)$, per $w \to 0$.

$$
\begin{aligned}
\sqrt{\frac{1+1/(8x^3)}{1+1/x}} &= \sqrt{(1+1/(8x^3))(1-1/x+o(1/x))} \\
&= \sqrt{(1-1/x+o(1/x)+1/(8x^3)-1/(8x^4)+o(1/x^4)} = \sqrt{(1-1/x+o(1/x)} \\
&= 1+1/2[-1/x+o(1/x)]+o(-1/x+o(1/x)) \\
&= 1-\frac{1}{2}1/x+o(1/x)
\end{aligned}
$$

Sostituisco nella espressione che avevamo per f,

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 2\sqrt{2}|x|\sqrt{\frac{1+1/(8x^3)}{1+1/x}} \\
&= 2\sqrt{2}|x|(1-\frac{1}{2}1/x+o(1/x)) \\
&= 2\sqrt{2}|x|1-\sqrt{2}\frac{|x|}{x}+o(1) \\
&= 2\sqrt{2}|x|1-\sqrt{2}sign(x)+o(1)
\end{aligned}
$$

Gli asintoti verticali per $x \to \pm\infty$, quindi, sono $y = 2\sqrt{2}|x|1 - \sqrt{2}sign(x)$. Dividendo nei casi $x \to \infty$ (quindi, $x > 0$) e $x \to -\infty$ (quindi, $x < 0$), troviamo gli asintoti $y = 2\sqrt{2}x - \sqrt{2}$, per $x \to \infty$, e $y = -2\sqrt{2}x + \sqrt{2}$, per $x \to -\infty$.