# SCRITTO COMPLESSIVO DI PROVA 10, con soluzioni

Nicola Arcozzi

(1) [3 punti] Trovare l'equazione delle rette passanti per il punto di coordinate $(-1,-1)$, tangenti alla circonferenza di centro $(1,1)$ e raggio $\sqrt{2}$. Disegnare la circonferenza e le rette sul piano cartesiano.
(2) [3 punti] Siano $x, y > 0$. Una sola delle seguenti affermazioni è vera. Quale?

(i) $\log_5 x + \log_5 y = \log_5(x+y)$.

(ii) $x^y = 5^{y \log_5 x}$.

(iii) $(\log_5 x)(\log_5 y) = \log_5(x+y)$.

(iv) $(\log_5 x)(\log_5 y) = \log_5(xy)$.

(3) [3 punti] Quale delle seguenti famiglie di vettori in $\mathbb{R}^3$ è una famiglia di vettori linearmente indipendenti?

(i) $(0,1,2),\ (0,0,1),\ (0,0,0)$.

(ii) $(2,3,4),\ (1,2,3),\ (0,1,2),\ (0,0,1)$.

(iii) $(1,2,0),\ (2,3,4),\ (3,4,5)$.

(iv) $(1,0,-1),\ (0,1,-1),\ (-1,1,0)$.

Lo spazio generato da questa famiglia è una base per $\mathbb{R}^3$?

(4) [3 punti] Sia $\lambda > 0$, $\lambda \neq 1$, e sia

$$C = \log_\lambda \left( \sqrt[6]{\lambda^{\lambda^\lambda} \sqrt{\lambda}} \right)$$

Allora,

(i) $C = \frac{1}{6}\lambda^\lambda + \frac{1}{12}$,

(ii) $C = \frac{1}{6}\lambda^2 + \frac{1}{12}$,

(iii) $C = \frac{1}{6}\lambda^{\lambda^\lambda} + \frac{1}{12}$,

(iv) $C = \frac{1}{6}\lambda^\lambda + \frac{1}{12}\lambda$.

(5) [3 punti] Sia

$$L = \lim_{n \to \infty} \frac{2^{-n} + n}{4^{-n} - n^2}.$$

Allora, $L =$
(i) 0
(ii) $\infty$
(iii) $-\frac{1}{2}$
(iv) $\frac{1}{2}$

(6) [3 punti] Siano $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ e $g : [0,2] \to \mathbb{R}$ funzioni continue, $f$ crescente su $[0,2]$, $f(0) = 1$, $f(2) = 3$, $g(0) = -2$, $g(2) = -4$. Quale delle seguenti affermazioni è certamente vera?

(i) Esiste $x$ in $[0,2]$ tale che $f(x)g(x) = 0$.

(ii) Esiste $x$ in $[0,2]$ tale che $f(x) + g(x) = 0$.

(iii) Non esiste $x$ in $[0,2]$ tale che $f(x) = 0$.

(iv) Non esiste $x$ in $[0,2]$ tale che $g(x) = 0$.

(7) [3 punti] Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile tale che $f(x) > 0$ per ogni $x$ in $\mathbb{R}$. Sia $h : (0, \infty) \to \mathbb{R}$,

$$h(x) = e^{f(\log(x))}$$

Quali delle seguenti è la derivata di $f$?

(i) $h'(x) = f'(x)$.

(ii) $h'(x) = e^{f(\log(x))} \cdot f'(\log(x)) \cdot \frac{1}{x}$.

(iii) $h'(x) = e^{f'(\log(x))} \cdot \frac{1}{x}$.

(iv) $h'(x) = e^{f(\log(x))} \cdot f(\log(x)) \cdot \frac{1}{f(x)}$.

(8) [5 punti] Sia $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = (x+1)\log(x+1)$$

(a) Trovare gli intervalli su cui $f$ è crescente.

(b) Calcolare

$$\lim_{x\to\infty} f(x), \quad \lim_{x\to -1} f(x)$$

(c) Trovare gli intervalli su cui $f > 0$ e disegnare sommariamente il grafico di $f$.

(9) [4 punti] Calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+2x}-1}{x}$$

**Soluzioni.**

(1) $m = 2 + \sqrt{3}$ o $m = 2 - \sqrt{3}$.

(2) (ii).

(3) (iii)

(4) (i)

(5) (i).

(6) (iii).

(7) (ii).

(8) (a) la funzione è crescente su $[e^{-1} - 1, \infty)$. (b) $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to -1} f(x) = 0$. (c) $f > 0$ su $(0, \infty)$.

(9) 1