PROVA SCRITTA DI ANALISI L-A, II APPELLO C.d.L. in Ingegneria Edile e Tecnico del Territorio, sede di Ravenna

11 gennaio 2006

Nome e Cognome (in stampatello)...

Corso di Laurea: (i) Ingegneria Edile, (ii) Tecnico delTerritorio.
Segnare con una croce il corso di laurea a cui è iscritto il candidato.

(1) [5 punti] Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = -\log(x^2 - x - 1).$$

Trovare il dominio di f. Quali sono gli intervalli su cui f é decrescente?

(i) $(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2}]$.

(ii) $[\frac{1}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2})$.

(iii) $(-\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2})$.

(iv) $(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty)$.

(2) [4 punti] Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile e sia $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$h(x) = f(1 + f(x)).$$

Supponiamo che $f(0) = 2$, $f'(0) = 3$, $f'(1) = 5$, $f'(3) = 7$, $f'(2) = 11$. Allora,

(i) $h'(0) = 33$.

(ii) $h'(0) = 5$.

(iii) $h'(0) = 15$.

(iv) $h'(0) = 21$.

(3) [4 punti] Calcolare L,

$$L = \lim_{x \to 0^+} \frac{x(e^{3x} - 1)}{\sin(5x)}.$$

(i) $L = \frac{9}{5}$.

(ii) $L = 0$.

(iii) $L = +\infty$.

(iv) $L = \frac{3}{5}$.

(4)[3 punti] Calcolare il seguente limite di successione.

$$L = \lim_{n \to \infty} \frac{3 \cdot n^5 + 3^{2+2n}}{5 \cdot n^5 + 9^{2+n}}$$

(i) $L = \frac{3}{5}$.

(ii) $\frac{1}{9}$.

(iii) $L = 0$.

(iv) $L = 1$.

(5) [3 punti] Quali delle seguenti uguaglianze vale per ogni scelta di $a > 1$?

(i) $a^{\log_{a^2}(a)} = a$.

(ii) $a^{\log_{a^2}(a)} = 1$.

(iii) $a^{\log_{a^2}(a)} = \sqrt{a}$.

(iv) $a^{\log_{a^2}(a)} = a^2$.

(6) [3 punti] Quali delle seguenti affermazioni vale per ogni $x \in \mathbb{R}$?

(i) $0 < \frac{1}{x^2} < \frac{1}{4} \iff 0 < |x| < 2$.

(ii) $0 < \frac{1}{x^2} < \frac{1}{4} \iff x > 2$ o $x < -2$.

(iii) $0 < \frac{1}{x^2} < \frac{1}{4} \iff -2 < x < 2$.

(iv) $0 < \frac{1}{x^2} < \frac{1}{4} \iff x > 2$.

(7) [4 punti] Siano $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ e $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue, avente agli estremi i valori $f(0) = 2$, $g(0) = 3$, $f(1) = 3$, $g(1) = 2$. Quale delle seguenti affermazioni é certamente vera?

(i) Esiste $c \in [0,1]$ tale che $f(c)^2 + g(c)^2 = 0$.

(ii) Esiste $c \in [0,1]$ tale che $f(c) \cdot g(c) = 0$.

(iii) La funzione $h = 5f + g \cdot f$ ha massimo in $[0,1]$.

(iv) Esiste $c \in [0,1]$ tale che $f(c) + g(c) = 0$.

(8) [4 punti] Trovare tutti i valori di $z \in \mathbb{R}$ tali per cui i vettori

$$(z^2 - 2z + 1, z + 1), \ (z + 1, 1)$$

sono linearmente dipendenti.

(i) $z = \pm 1$.

(ii) Non esiste nessun valore di z con questa proprietá.

(iii) $z = 0$.

(iv) $z = 0, \ z = 1$.

(Facoltativo) [3 punti] Sia f la funzione dell'esercizio (1). Calcolare

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$$

e gli intervalli su cui f é convessa. Calcolare

$$\lim_{x\to\frac{1-\sqrt{5}}{2}} f(x), \quad \lim_{x\to\frac{1+\sqrt{5}}{2}} f(x)$$

Utilizzare queste informazioni per disegnare il grafico di f.