

Studio della funzione

1

$$f(x) = x \cdot e^{-|x^2-1|}$$

(i) Il dominio di f è $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ e f è continua su $\mathbb{R}$.

(ii) f è derivabile in x se $x^2 - 1 \neq 0$, cioè in $\mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$. Per $x = \pm 1$

vedremo in seguito. Ho che, se $x \neq \pm 1$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{-|x^2-1|} - x \cdot \text{sgn}(x^2-1) \cdot 2x \cdot e^{-|x^2-1|} \\ &= e^{-|x^2-1|} \cdot (1 - 2x^2 \cdot \text{sgn}(x^2-1)). \end{aligned}$$

$$(iii) \lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = \pm \infty \cdot e^{-\infty} = \pm \infty \cdot 0$$

è una forma di indeterminazione.

$$\text{Comunque: } f(x) = \frac{x}{e^{|x^2-1|}} = \frac{x}{e^{x^2 \cdot |1-1/x^2|}},$$

$$\text{quindi } f(x) \rightarrow 0 \text{ per } x \rightarrow \pm \infty \text{ poiché } \lim_{x^2=y \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{y}}{e^{y^2}} = 0.$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = 0.}$$

(iv) Cerco gli intervalli su cui f cresce/decrece.

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - 2x^2 \cdot \text{sgn}(x^2-1) \geq 0$$

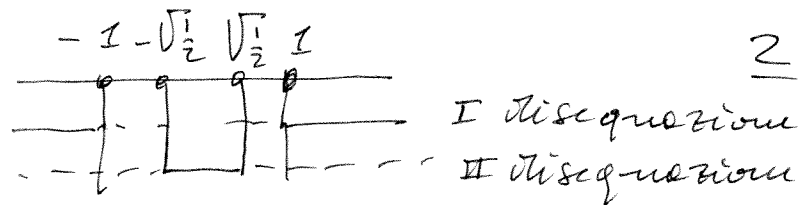
Ho due casi:

$$(1) \begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ 1 - 2x^2 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x > 1 \vee x < -1 \\ x^2 \leq 1/2 \end{cases} \quad \begin{cases} x > 1 \vee x < -1 \\ -\sqrt{1/2} \leq x \leq \sqrt{1/2} \end{cases}$$

oppure

$$(2) \begin{cases} x^2 - 1 < 0 \\ 1 + 2x^2 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 1 < 0 \\ \text{sempre vera} \end{cases} \quad \boxed{-1 < x < 1}$$

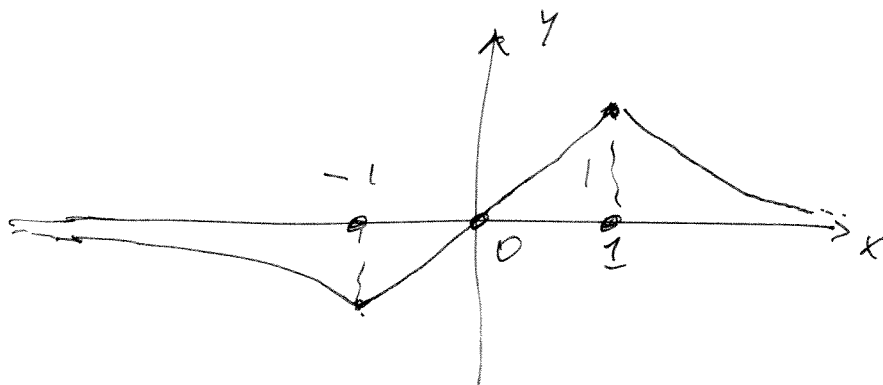
Riquadrato (D):



Le due disequazioni in (D) non valgono mai simultaneamente: (D) è impossibile.

La funzione è crescente su $[-1, 1]$,
è decrescente su $]-\infty, -1]$ e su $[1, +\infty[$.

Traccio un primo grafico
(consistendo che $f(0)=0$):

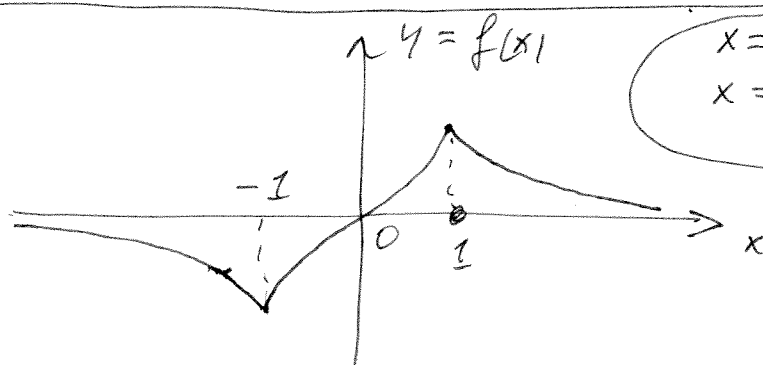


(iv) calcolo i limiti di f' in $x = \pm 1^\pm$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) &= e^0(1-2) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) &= e^0(1+2) = 3 \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \neq \\ \Rightarrow \end{array} \begin{array}{l} f \text{ non \acute{e} \\ derivabile \\ in } x=1. \end{array}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f'(x) = -1 \neq 3 = \lim_{x \rightarrow -1^+} f'(x) \Rightarrow \begin{array}{l} f \text{ non \acute{e} \\ derivabile \\ in } x=-1. \end{array}$$

f \acute{e} derivabile (esattamente) in $\mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$



$x=1$: p.to di MAX.
 $x=-1$: p.to di min.