NUMERI REALI E VALORE ASSOLUTO

Nicola Arcozzi

1 Numeri reali: proprietà di campo ordinato.

L'insieme dei numeri reali viene indicato con $\mathbb{R}$. In $\mathbb{R}$ si introducono le operazioni di *somma* $(+)$ e *prodotto* $(\cdot)$. La struttura $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ha le proprietà elencate di seguito.
Proprietà della somma.

(S1) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}\ (a + b) + c = a + (b + c)$ (proprietà associativa).

(S2) $\forall a, b \in \mathbb{R}\ a + b = b + a$ (proprietà commutativa).

(S3) $\exists 0 \in \mathbb{R}\ \forall a \in \mathbb{R}\ a + 0 = a$ (elemento neutro).

(S4) $\forall a \in \mathbb{R} \exists (-a) \in \mathbb{R}\ a + (-a) = 0$ (elemento inverso).

Proprietà del prodotto. Nota: quando non ci sono ambiguità, si omette il simbolo $\cdot$: $ab = a \cdot b$.

(P1) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}\ (ab)c = a(bc)$ (proprietà associativa).

(P2) $\forall a, b \in \mathbb{R}\ ab = ba$ (proprietà commutativa).

(P3) $\exists 1 \in \mathbb{R}\ \forall a \in \mathbb{R}\ a1 = a$ (elemento neutro).

(P4) $\forall a \in \mathbb{R},\ a \neq 0 \exists a^{-1} \in \mathbb{R}\ a \cdot a^{-1} = 1$ (elemento inverso).

Proprietà che legano somma e prodotto.

(SP1) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}\ a(b + c) = ab + ac$ (proprietà distributiva).

(SP2) $1 \neq 0$.[1]

[1] Per quanto ovvia sia, questa proprietà non è deducibile dalle precedenti.

Le proprietà (S1)-(SP2) vengono spesso riassunte nella frase "$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ *è un* **campo**".

L'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ è poi dotato di una *relazione d'ordine* $<$, con le seguenti proprietà.

Proprietà d'ordine.

(O1) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, se $a < b$ e $b < c$, allora $a < c$ (proprietà transitiva).

(O2) $\forall a, b \in \mathbb{R}$, vale una e una sola delle seguenti: $a < b$, $a > b$, $a = b$ (tricotomia).[2]

(OS) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, se $a < b$, allora $a + c < b + c$.

(OP) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, se $a < b$ e $c > 0$, allora $ac < bc$.

Le proprietà sopra elencate dicono che $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ costituisce un *campo ordinato*. Queste proprietà non appartengono al solo insieme $\mathbb{R}$: anche $(\mathbb{Q}, +, \cdot, <\ )$ è un campo ordinato.[3]

2 Numeri reali: limitatezza degli insiemi e proprietà di completezza.

Definizione 1 *Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme di $\mathbb{R}$. A è* superiormente limitato *se*

$$\exists a \in \mathbb{R}\ \forall x \in A\ a \geq x \tag{1}$$

Se (1) vale, diciamo che a è un maggiorante *di A.*

A è inferiormente limitato se

$$\exists a' \in \mathbb{R}\ \forall x \in A\ a' \leq x \tag{2}$$

Se (2) vale, diciamo che a' è un minorante *di A.*

A è limitato *se è inferiormente* e *superiormente limitato.*

Definizione 2 *Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ e sia $M \in \mathbb{R}$. M è il* massimo *di A se (1) $M \in A$ e (2) $\forall x \in A\ M \geq x$ (cioè, se M sta in A ed è maggiorante di A). Scriviamo, in tal caso*

$$M = \max A.$$

[2] $a > b$ vuol dire $b < a$.

[3] $\mathbb{Q}$ è l'insieme dei numeri razionali.

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ e sia $m \in \mathbb{R}$. m è il minimo *di A se (1) $m \in A$ e (2) $\forall x \in A$ $m \leq x$ (cioè, se m sta in A ed è minorante di A).*

$$m = \min A.$$

Esistono, in $\mathbb{R}$, insiemi limitati che non hanno massimo e minimo. Introduciamo prima la definizione di intervallo.

Definizione 3 *Siano $a, b \in \mathbb{R}$. L'*intervallo chiuso $[a, b]$ *è il sottoinsieme di $\mathbb{R}$*

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : \ a \leq x \leq b\}$$

*L'*intervallo aperto (a, b) *è l'insieme*

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : \ a < x < b\}$$

*Abbiamo poi l'*intervallo aperto a destra *(risp., a sinistra)*

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : \ a \leq x < b\}$$

(risp.,

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : \ a < x \leq b\}).$$

Introduciamo due simboli, $+\infty$ e $-\infty$, ponendo, per convenzione,

$$-\infty < a < \infty$$

per ogni $a \in \mathbb{R}$. Indichiamo $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. **Questi simboli non denotano e non possono essere usati come numeri reali.** Cionondimeno, sono utili nella scrittura di alcuni oggetti.

Definizione 4 *Siano $a, b \in \mathbb{R}^*$. Allora,*

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : \ a < x < b\},$$
$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : \ a \leq x < b\},$$
$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : \ a < x \leq b\}.$$

Per esempio,

$$(-\infty, 1] = \{x \in \mathbb{R} : \ x \leq 1\},$$
$$(0, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : \ 0 < x\},$$

e $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$.

Osserviamo che, per esempio, $[0, 1)$ è superiormente limitato, ma non ha massimo (se avesse massimo M, sarebbe $M = 0$, ma $0 \notin \mathbb{R}$). Ci servono nozionipiù generali di massimo e minimo.

Definizione 5 *Siano* $A \subseteq \mathbb{R}$ *un sottoinsieme di* $\mathbb{R}$ *e sia* $M \in \mathbb{R}$. M *è l'*estremo superiore *di* A *se (1)* $\forall x \in A$ $M \geq x$ *(cioè,* M *è maggiorante di* A*) e (2)* $\forall p \in \mathbb{R}$, *se* $\forall x \in A$ $p \geq x$, *allora* $p \geq M$ *(cioè,* M *è minore, o uguale, a ogni altro maggiorante di* A*). Scriviamo, in tal caso*

$$M = \sup A.$$

Siano ora $A \subseteq \mathbb{R}$ *un sottoinsieme di* $\mathbb{R}$ *e sia* $m \in \mathbb{R}$. m *è l'*estremo inferiore *di* A *se (1)* $\forall x \in A$ $m \leq x$ *(cioè,* M *è minorante di* A*) e (2)* $\forall q \in \mathbb{R}$, *se* $\forall x \in A$ $q \leq x$, *allora* $q \leq m$ *(cioè,* m *è maggiore, o uguale, a ogni altro minorante di* A*). Scriviamo, in tal caso*

$$m = \inf A.$$

Siamo ora pronti a enunciare la proprietà fondamentale di $\mathbb{R}$.
Proprietà di completezza.

(C) Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme superiormente limitato di $\mathbb{R}$. Allora, esiste $\sup A$ in $\mathbb{R}$.

3 Valore assoluto di un numero reale.

Definizione 6 *Sia* $x \in \mathbb{R}$. *Il* valore assoluto di x, $|x|$, *è definito da*

$$|x| = \begin{cases} x, & se\ x \geq 0 \\ -x, & se\ x \leq 0 \end{cases}$$

Proposizione 7 *Siano* x, y *numeri reali. Allora*

(1) $|x| \geq 0$ *e* $|x| = 0$ *se e solo se* $x = 0$.

(2) $||x|| = |x|$.

(3) $|xy| = |x| \cdot |y|$.

(4) Se $x \neq 0$, *allora* $|1/x| = 1/|x|$.

(5) $|x+y| \leq |x| + |y|$. *Vale l'uguaglianza se e solo se* x *e* y *hanno lo stesso segno.*

(6) $|x-y| \geq ||x| - |y||$. *Vale l'uguaglianza se e solo se* x *e* y *hanno lo stesso segno.*