# 1. Elementi di analisi funzionale Esercizi

http://www.ciram.unibo.it/~barozzi/MI2/PDF/MI2-Cap.1-Ese.pdf

## 1.1. Spazi vettoriali

## 1.2. Spazi vettoriali normati

**1.2-1.** Dimostrare la diseguaglianza triangolare in $\mathbb{C}^n$ relativamente alla norma $\|\cdot\|_1$ (↑ esempio 1).

Suggerimento ▷ Si ha $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k + y_k| \leq \dots$ .

Soluzione. Si ha

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_1 &= \sum_{k=1}^n |x_k + y_k| \leq \sum_{k=1}^n (|x_k| + |y_k|) = \\ &= \sum_{k=1}^n |x_k| + \sum_{k=1}^n |y_k| = \|\boldsymbol{x}\|_1 + \|\boldsymbol{y}\|_1 .\end{aligned}$$

**1.2-2.** Dimostrare la diseguaglianza triangolare in $\mathbb{C}^n$ relativamente alla norma $\|\cdot\|_\infty$ (↑ esempio 1).

Suggerimento ▷ Si parta dal fatto che $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_\infty = |x_{\bar{k}} + y_{\bar{k}}|$ per un certo indice $\bar{k}$.

Soluzione. Si ha

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_\infty = |x_{\bar{k}} + y_{\bar{k}}| \leq |x_{\bar{k}}| + |y_{\bar{k}}| \leq \max_k |x_k| + \max_k |y_k| = \|\boldsymbol{x}\|_\infty + \|\boldsymbol{y}\|_\infty .$$

**1.2-3.** Per ogni $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ mostrare che

$$\lim_{p\to\infty} \|\boldsymbol{x}\|_p = \|\boldsymbol{x}\|_\infty = \max_{1\leq k\leq n} |x_k| .$$

Suggerimento ▷ Se $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ non c'è niente da dimostrare. Altrimenti, supposto, per fissare le idee, che la componente di valore assoluto massimo sia la prima, cioè $|x_1| = \|\boldsymbol{x}\|_\infty$, si può scrivere

$$\Big(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\Big)^{1/p} = |x_1| \Big(1 + \sum_{k=2}^n \Big|\frac{x_k}{x_1}\Big|^p\Big)^{1/p} ,$$

dove l'ultima quantità entro parentesi tonde è compresa tra 1 e $n$.

Soluzione. Proseguendo nel ragionamento iniziato nel suggerimento, si ha

$$1 \leq \Big(1 + \sum_{k=2}^n \Big|\frac{x_k}{x_1}\Big|^p\Big)^{1/p} \leq n^{1/p} ,$$

dove l'ultima quantità tende a 1 per $p \to \infty$.

**1.2-4.** Verificare che sullo spazio $C[a,b]$ delle funzioni reali continue sull'intervallo $[a,b]$ le norme di indici 1 e $\infty$ sono effettivamente tali (↑ esempio 2).

SUGGERIMENTO ▷ Si tratta di verificare (per entrambe le norme) la diseguaglianza triangolare: per la seconda norma utilizzare il teorema di Weierstrass sull'esistenza del massimo di una funzione continua su un compatto.

SOLUZIONE. Si ha

$$\|f+g\|_1 = \int_a^b |f(x)+g(x)|\,dx \le \int_a^b |f(x)|\,dx + \int_a^b |g(x)|\,dx = \|f\|_1 + \|g\|_1.$$

Sia poi $\overline{x} \in [a,b]$ un punto tale $\|f+g\|_\infty = |f(\overline{x})+g(\overline{x})|$. Si ha

$$\begin{aligned}\|f+g\|_\infty &= |f(\overline{x})+g(\overline{x})| \le |f(\overline{x})| + |g(\overline{x})| \le \max_x |f(x)| + \max_x |g(x)| = \\ &= \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.\end{aligned}$$

**1.2-5.** Verificare che per le funzioni costanti sull'intervallo $[a,b]$, $f(x)=c$, si ha

$$\|\, f\,\|_1 = (b-a)\,\|\, f\,\|_\infty.$$

SOLUZIONE. Si ha infatti

$$\|\, f\,\|_1 = \int_a^b |c|\,dx = \int_a^b \|\, f\,\|_\infty\,dx = (b-a)\,\|\, f\,\|_\infty.$$

**1.2-6.** Dimostrare che le norme $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_\infty$ sono equivalenti sullo spazio vettoriale delle funzioni polinomiali di grado $\le 1$ sull'intervallo $[a,b]$ (in accordo con la Proposizione 1.2-1), calcolando due costanti che consentano di maggiorare una norma con l'altra.

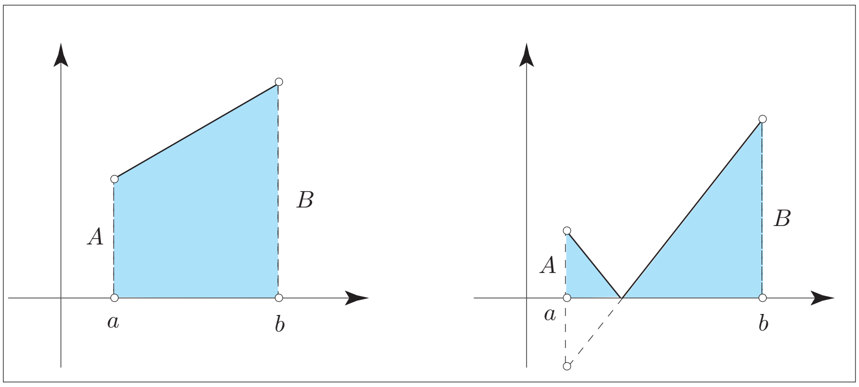
SUGGERIMENTO ▷ Sia $p(\cdot)$ un polinomio di grado $\le 1$; posto $A := |p(a)|$, $B := |p(b)|$, si cominci con l'osservare che si ha $\|\, p\,\|_\infty = \max\{A,B\}$,

$$\|\, p\,\|_1 = \int_a^b |p(x)|\,dx = \frac{b-a}{2}\,(A+B)$$

se $p(a)\cdot p(b) \ge 0$ (in tal caso il grafico di $|p|$ è un segmento), mentre

$$\|\, p\,\|_1 = \int_a^b |p(x)|\,dx = \frac{b-a}{2}\,\frac{A^2+B^2}{A+B}$$

se $p(a)\cdot p(b) < 0$ (in tal caso il grafico di $|p|$ è una spezzata composta da due segmenti ugualmente inclinati sull'asse delle ascisse).

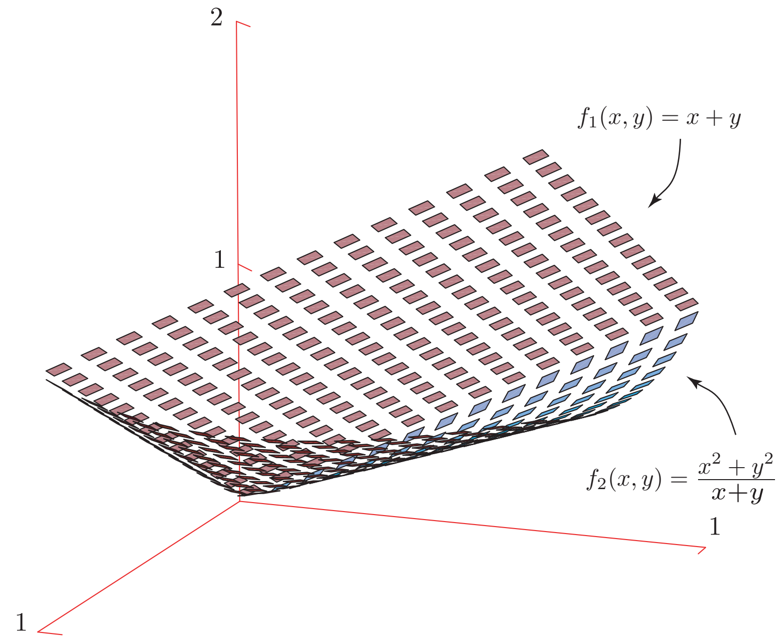



SOLUZIONE. Con riferimento alla figura di sinistra, è chiaro che si tratta dell'area di un trapezio con basi $A$ e $B$ e altezza $b-a$. Nel caso della figura di destra, la similitudine tra i due triangoli evidenziati implica che le basi degli stessi triangoli valgono

$$\frac{A}{(A+B)}\,(b-a), \qquad \frac{B}{(A+B)}\,(b-a).$$

Si ha poi $A+B \le 2\|\, p\,\|_\infty$, e per $A+B>0$ (in caso contrario p è identicamente nullo e non c'è niente da dimostrare) si ha $A^2+B^2 \le (A+B)^2$, quindi

$$\frac{A^2+B^2}{A+B} \le A+B.$$




In conclusione:

$$\|\, p \,\|_1 \le \frac{b-a}{2}\, 2 \,\|\, p \,\|_\infty = (b-a) \,\|\, p \,\|_\infty .$$

Vale il segno di uguaglianza per i polinomi costanti.

**1.2-7.** Utilizzando le funzioni polinomiali fornite al termine dell'esempio 1.2-2, dimostrare che le norme $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_\infty$ non sono equivalenti sullo spazio vettoriale delle funzioni polinomiali (senza limitazioni sul grado) sull'intervallo $[a,b]$.

SOLUZIONE. Si tratta delle funzioni $f_n(x) = x^n$, considerate sull'intervallo $[0,1]$. Per esse abbiamo trovato $\|\, f_n \,\|_1 = 1/(n+1)$, $\|\, f_n \,\|_\infty = 1$. Dunque non esiste una costante $C > 0$ tale da aversi $\|\, p \,\|_\infty \le C \,\|\, p \,\|_1$ per ogni funzione polinomiale $p$.

**1.2-8.** Sia $V = C^{(1)}[a,b]$ lo spazio delle funzioni continue su $[a,b]$ assieme alla derivata prima; si considerino le norme

$$\|\, f \,\|_1 := \max_{a\le x\le b} |f(x)| + \max_{a\le x\le b} |f'(x)|,$$

$$\|\, f \,\|_2 := |f(a)| + \max_{a\le x\le b} |f'(x)|.$$

Dimostrare che esse sono effettivamente due norme e che sono equivalenti.

SUGGERIMENTO ▷ Si può osservare (teorema del valor medio) che

$$f(x) = f(a) + (x-a)\, f'(\xi),$$

con $\xi \in [a,b]$, da cui

$$|f(x)| \le |f(a)| + (b-a) \cdot \max_{a\le x\le b} |f'(x)|.$$

SOLUZIONE. Proseguendo nel ragionamento iniziaro nel suggerimento, si ha

$$\max_x |f(x)| \le |f(a)| + (b-a) \cdot \max_x |f'(x)|,$$

da cui

$$\begin{aligned}\| f \|_1 &\leq |f(a)| + (b-a) \cdot \max_x |f'(x)| + \max_x |f'(x)| = \\ &= |f(a)| + (b-a+1) \max_x |f'(x)| < \\ &< (b-a+1) \left[ |f(a)| + \max_x |f'(x)| \right] = (b-a+1) \| f \|_2 .\end{aligned}$$

La disuguaglianza $\| f \|_2 \leq \| f \|_1$ è evidente.

**1.2-9.** Sia $V = C[a,b]$, $w$ una funzione continua e positiva su $[a,b]$. Dimostrare che la quantità

$$\| f \|_w := \max_{a \leq x \leq b} |w(x) \, f(x)|$$

è una norma e dire se essa è equivalente alla norma del massimo.

SUGGERIMENTO ▷ Si ha $0 < \min_x w(x) \leq w(x) \leq \max_x w(x)$; sfruttare l'identità $f(x) = w(x) \, f(w)/w(x)$.

SOLUZIONE. Si ha

$$\begin{aligned}\| f \|_\infty &= \max_x |f(x)| = \max_x \left| w(x) \, \frac{f(x)}{w(x)} \right| \leq \max_x \left| w(x) \, \frac{f(x)}{\min_x w(x)} \right| = \\ &= \frac{1}{\min_x w(x)} \max_x |w(x) \, f(x)| = \frac{1}{\min_x w(x)} \| f \|_w .\end{aligned}$$

Inversamente

$$\begin{aligned}\| f \|_w &= \max_x |w(x) \, f(x)| \leq \max_x \left| \left( \max_x w(x) \right) f(x) \right| = \\ &= \max_x w(x) \cdot \max_x |f(x)| = \max_x w(x) \cdot \| f \|_\infty .\end{aligned}$$

**1.2-10.** Siano $\| \cdot \|_1$ e $\| \cdot \|_2$ due norme equivalenti su $V$. Sia $(\boldsymbol{x}_n)_{n \in \boldsymbol{N}}$ una successione in $V$ e $\boldsymbol{x} \in V$. Verificare che

$$\big( \|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}\|_1 \to 0 \big) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \big( \|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}\|_2 \to 0 \big).$$

SOLUZIONE. Infatti per due opportune costanti positive $c_1$ e $c_2$ si ha

$$\|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}\|_1 \leq c_2 \|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}\|_2, \quad \|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}\|_2 \leq c_1 \|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}\|_1 .$$

**1.2-11.** Se $V$ è uno s.v.n. reale o complesso, una trasformazione lineare $f : V \to \mathbb{R}$ (o rispettivamente $f : V \to \mathbb{C}$) si chiama semplicemente un *funzionale* lineare. Si consideri lo spazio $C^{(1)}[0,1]$ munito della norma del massimo. Verificare che il funzionale lineare $x(\,\cdot\,) \mapsto x'(0)$ non è limitato, dunque (↑ Proposizione 1.2-2) non è continuo.

SUGGERIMENTO ▷ Scegliere, ad esempio, $x_n(t) = \sin nt$.

SOLUZIONE. Per le funzioni suggerite si ha $x_n'(t) = n \cos nt$, quindi $x_n'(0) = n$, mentre $\| x_n \|_\infty = 1$ per ogni $n$.

**1.2-12.** Si consideri lo spazio $C[0,1]$ munito della norma del massimo. Controllare che i funzionali lineari $x(\,\cdot\,) \mapsto \int_0^1 x(t) \, dt$, e $x(\,\cdot\,) \mapsto x(t_0)$, per ogni fissato $t_0 \in [0,1]$, sono continui.

SOLUZIONE. Si ha

$$\left| \int_0^1 x(t) \, dt \right| \leq \int_0^1 |x(t)| \, dt \leq \int_0^1 \| x \|_\infty \, dt = \| x \|_\infty .$$

Si ha poi $|x(t_0)| \leq \max_x |x(t)| = \| x \|_\infty$.

**1.2-13.** Si considerino gli spazi $V = C^{(1)}[0,1]$ e $W = C[0,1]$ muniti entrambi della norma del massimo. Controllare che l'operatore lineare $x(\,\cdot\,) \mapsto x'(\,\cdot\,)$ non è continuo da $V$ a $W$ (considerare, ad esempio, le funzioni $x_n(t) := (\sin nt)/\sqrt{n}$ ).

SOLUZIONE. Per le funzioni suggerite si ha $\| x_n \|_\infty = 1/\sqrt{n}$, $\| x_n' \|_\infty = \sqrt{n}$.

**1.2-14.** Si consideri lo spazio $V = C[0,1]$ munito della norma del massimo. Controllare che l'operatore lineare di $V$ in sé che ad $x(\cdot) \in V$ associa la funzione $t \mapsto \int_0^t x(s)\,ds$, $t \in [0,1]$, è continuo.

SOLUZIONE. Posto $X(t) := \int_0^t x(s)\,ds$ si ha infatti

$$\begin{aligned}\| X \|_\infty &= \max_t \left| \int_0^t x(s)\,ds \right| \leq \max_t \int_0^t |x(s)|\,ds = \int_0^1 |x(s)|\,ds = \\ &= \| x \|_1 \leq 1 \cdot \| x \|_\infty = \| x \|_\infty .\end{aligned}$$

Dunque l'operatore lineare in esame è continuo anche da $C[0,1]$ munito della norma di indice 1 allo stesso spazio munito della norma del massimo.

**1.2-15.** Si consideri lo spazio $C[0,1]$ munito della norma del massimo (norma di indice $\infty$). Controllare se sono chiusi in tale spazio gli insiemi (alcuni dei quali sono sottospazi) costituiti dalle funzioni $x(\cdot)$ tali che:

*a*) $x(0) = 0$;

*b*) $x(0) = x(1)$.

*c*) $x$ è non negativa;

*d*) l'integrale di $x$ su $[0,1]$ è nullo;

*e*) l'integrale di $x$ su $[0,1]$ è non negativo;

*f*) $x$ è derivabile in $1/2$ e $x'(1/2) = 0$;

g) $x$ è costante su $[0,1]$.

SUGGERIMENTO Per *f*) si consideri, ad esempio, la successione di funzioni

$$x_n(t) := \sqrt{\frac{1}{n^2} + \left(t - \frac{1}{2}\right)^2}.$$

SOLUZIONE. Si tratta di verificare se, data una successione $(x_n)$ convergente uniformemente ad una funzione limite $x$, dal fatto che tutte le $x_n$ verificano una delle condizioni dalla a) alla g) segue (o meno) che la stessa condizione è verificata dalla funzione limite $x$. La risposta è affermativa tranne nel caso f); infatti la funzione limite della successione suggerita è $|x - 1/2|$ che non è derivabile nel punto $1/2$.

Si consideri, alternativamente, la successione

$$x_n(x) := \frac{1}{n} \sin\big(n(t - 1/2)\big) - t;$$

essa converge uniformemente alla funzione $t \mapsto -t$, derivabile nel punto $1/2$ con derivata uguale a $-1$, pur essendo $x_n'(1/2) = 0$ per ogni $n$.

**1.2-16.** Stesso problema del precedente esercizio per gli insiemi costituiti dalle funzioni $x(\cdot)$ tali che:

*a*) $x$ è un polinomio di grado $\leq 2$;

*b*) $x$ è un polinomio di grado esattamente 2;

*c*) $x$ è un polinomio.

SUGGERIMENTO ▷ Si tenga presente che la convergenza uniforme implica la convergenza puntuale. Scelti tre valori distinti della variabile indipendente, ad esempio $t = 0$, $t = 1/2$, $t = 1$, se $x_n(t) := a_n t^2 + b_n t + c_n$ è una successione di polinomi di grado $\leq 2$ convergente uniformemente su $[0,1]$, dalla convergenza delle tre successioni

$$\begin{aligned}&n \mapsto x_n(0) = c_n, \\ &n \mapsto x_n(1/2) = a_n/4 + b_n/2 + c_n, \\ &n \mapsto x_n(1) = a_n + b_n + c_n,\end{aligned}$$

dedurre la convergenza delle successioni $n \mapsto a_n$, $n \mapsto b_n$ (oltre a quella della successione $n \mapsto c_n$).

Per $c$) si considerino i polinomi di Taylor della funzione seno.

SOLUZIONE. Proseguendo secondo le linee fornite dal suggerimento, si osserva che il sistema ottenuto si scrive

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/4 & 1/2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_n(0) \\ x_n(1/2) \\ x_n(1) \end{bmatrix},$$

la cui soluzione è data da

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n(0) \\ x_n(1/2) \\ x_n(1) \end{bmatrix}.$$

Dunque la convergenza delle successioni $\big(x_n(0)\big)$, $\big(x_n(1/2)\big)$, $\big(x_n(1)\big)$ implica la convergenza delle successioni $(a_n)$, $(b_n)$ e $(c_n)$. Dunque la risposta alla domanda a) è affermativa.

Al contrario la risposta alla domanda b) è negativa: la successione dei polinomi $n \mapsto x^2/n$ converge uniformemente a 0 sull'intervallo $[0,1]$ (di fatto su ogni intervallo compatto).

Lo stesso per la domanda c). la successione dei polinomi di Taylor della funzione seno (in breve: la serie di Taylor) converge uniformemente a $\sin x$ su ogni intervallo compatto, e la funzione limite non è polinomiale. Si tenga presente che se $T_n(x)$ è il polinomio di Taylor relativo alla funzione seno (punto iniziale $x = 0$) per il relativo resto si ha l'espressione secondo Lagrange

$$r_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\, f^{(n+1)}(\xi) \quad \Longrightarrow \quad |r_n(x)| \le \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!},$$

in quanto le derivate successive della funzione seno sono del tipo $\pm\sin x$, $\pm\cos x$.

**1.2-17.** Sia $\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{x}$ nello s.v.n. $V$; dimostrare che $\lim_{n\to\infty} \|\boldsymbol{x}_n\| = \|\boldsymbol{x}\|$.

SUGGERIMENTO ▷ Utilizzare la diseguaglianza $(3')$.

SOLUZIONE. Si ha infatti $\big|\|\boldsymbol{x}_n\| - \|\boldsymbol{x}\|\big| \le \|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}\|$.

**1.2-18.** Sia $\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{x}$ nello s.v.n. $V$; dimostrare che esiste una costante $C$ per cui $\|\boldsymbol{x}_n\| < C$, $\forall n$. A parole: ogni successione convergente è limitata in norma.

SOLUZIONE. Il precedente esercizio ci assicura che la successione $n \mapsto \|\boldsymbol{x}_n\|$ converge a $\|\boldsymbol{x}\|$. Scelto $\varepsilon > 0$ esiste $n_\varepsilon$ tale che per ogni $n > n_\varepsilon$ si ha

$$\|\boldsymbol{x}_n\| \in [\,\|\,\boldsymbol{x}\,\| - \varepsilon, \|\,\boldsymbol{x}\,\| + \varepsilon\,].$$

Al di fuori dell'intervallo appena considerato restano dunque, al più, le norme dei primi $n_\varepsilon$ elementi. basterà prendere

$$a := \min\{\|\boldsymbol{x}_1\|, \dots, \|\boldsymbol{x}_{n_\varepsilon}\|, \|\boldsymbol{x}\| - \varepsilon\}, \quad b := \max\{\|\boldsymbol{x}_1\|, \dots, \|\boldsymbol{x}_{n_\varepsilon}\|, \|\boldsymbol{x}\| + \varepsilon\}$$

per avere un intervallo $[a, b]$ che contiene tutte le norme.

**1.2-19.** Sia $\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{x}$ nello s.v.n. complesso $V$, $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ in $\mathbb{C}$; dimostrare che $\lim_{n\to\infty} a_n\boldsymbol{x}_n = a\boldsymbol{x}$.

SUGGERIMENTO ▷ Da $a_n\boldsymbol{x}_n - a\boldsymbol{x} = a_n\boldsymbol{x}_n - a_n\boldsymbol{x} + a_n\boldsymbol{x} - a\boldsymbol{x}$ segue ... .

SOLUZIONE. ... segue

$$\begin{aligned} \|\, a_n\boldsymbol{x}_n - a\boldsymbol{x}\,\| &\le \|\, a_n\boldsymbol{x}_n - a_n\boldsymbol{x}\,\| + \|\, a_n\boldsymbol{x} - a\boldsymbol{x}\,\| = \\ &= |a_n|\,\|\,\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}\,\| + |a_n - a|\,\|\,\boldsymbol{x}\,\|; \end{aligned}$$

la successione $(|a_n|)$ è limitata in quanto convergente, dunque il secondo membro tende a 0 per $n \to \infty$.

## 1.3. Spazi vettoriali con prodotto scalare

**1.3-1.** Verificare che ponendo in $\mathbb{C}^n$ (come in $\mathbb{R}^n$) $(\boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{y}) := \sum_{k=1}^n x_k y_k$, avremmo introdotto una definizione scorretta.

SUGGERIMENTO ▷ Si consideri il vettore avente tutte le componenti uguali all'unità immaginaria $i$.

SOLUZIONE. Per il vettore in questione si avrebbe infatti $(\boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{x}) = -n$.

**1.3-2.** Dimostrare che vale il segno di uguaglianza nella diseguaglianza di Cauchy-Schwarz se e solo se i vettori $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ sono linearmente dipendenti. Se $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ sono vettori non nulli, verificare che vale il segno di uguaglianza nella diseguaglianza triangolare se e solo se $\boldsymbol{x} = t\boldsymbol{y}$, con $t > 0$.

SOLUZIONE. Con riferimento alla dimostrazione della Proposizione 1.3-2, è chiaro cha vale il segno di $=$ nella diseguaglianza di Cauchy-Schwarz se si ha $0 = \|\alpha\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2$, con $\alpha = -(\boldsymbol{y}\,|\,\boldsymbol{x})/\|\,\boldsymbol{x}\,\|^2$, dunque se $\alpha\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$, cioè i due vettori dati sono linearmente dipendenti. Inversamente, sa $\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{y}$, allora $(\boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{y}) = \lambda\,\|\,\boldsymbol{y}\,\|^2$, da cui

$$|(\boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{y})| = |\lambda|\,\|\,\boldsymbol{y}\,\|\,\|\,\boldsymbol{y}\,\| = \|\,\boldsymbol{x}\,\|\,\|\,\boldsymbol{y}\,\|.$$

Perché valga il segno di $=$ nella diseguaglianza triangolare occorre che in tutti i passaggi della dimostrazione i segni $\leq$ siano sostituiti da $=$. Questo richiede che valga il segno di $=$ nella diseguaglianza di Cauchy-Schwarz e dunque deve essere $\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{y}$. Deve poi essere $\mathrm{Re}(\boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{y}) = |(\boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{y})|$, cioè $\mathrm{Re}(\lambda) = |\lambda|$, dunque $\lambda > 0$.

**1.3-3.** Dimostrare che in uno s.v. con prodotto scalare il prodotto scalare stesso è una funzione continua, nel senso che se

$$\boldsymbol{x}_n \to \boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{y}_n \to \boldsymbol{y}$$

(vale a dire $\|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}\| \to 0$, $\|\boldsymbol{y}_n - \boldsymbol{y}\| \to 0$ per $n \to +\infty$), allora $(\boldsymbol{x}_n\,|\,\boldsymbol{y}_n) \to (\boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{y})$.

SUGGERIMENTO ▷ Si utilizzi la diseguaglianza di Cauchy-Schwarz.

SOLUZIONE. Si ha

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{x}_n\,|\,\boldsymbol{y}_n) - (\boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{y}) &= (\boldsymbol{x}_n\,|\,\boldsymbol{y}_n) - (\boldsymbol{x}_n\,|\,\boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x}_n\,|\,\boldsymbol{y}) - (\boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{y}) = \\ &= (\boldsymbol{x}_n\,|\,\boldsymbol{y}_n - \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{y}).\end{aligned}$$

Dalla diseguaglianza triangolare e da quella di Cauchy-Schwarz segue allora

$$\begin{aligned}|(\boldsymbol{x}_n\,|\,\boldsymbol{y}_n) - (\boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{y})| &\leq |(\boldsymbol{x}_n\,|\,\boldsymbol{y}_n - \boldsymbol{y})| + |(\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{y})| \leq \\ &\leq \|\boldsymbol{x}_n\|\,\|\boldsymbol{y}_n - \boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}\|\,\|\boldsymbol{y}\|.\end{aligned}$$

Il risultato segue allora dalle ipotesi, tenendo conto del fatto che la successione $n \mapsto \|\boldsymbol{x}_n\|$ è limitata in quanto convergente (v. esercizio 1.2-18).

**1.3-4.** Dedurre dalle identità (9) che, se la norma $\|\cdot\|$ sullo spazio vettoriale $V$ è hilbertiana, cioè indotta dal prodotto scalare $(\cdot\,|\,\cdot)$, allora tale prodotto scalare è univocamente individuato dalla norma mediante l'uguaglianza

$$(\boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{y}) = \frac{1}{4}\,\left[\,\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 - \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2\right]$$

se $V$ è reale, dall'uguaglianza

$$(\boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{y}) = \frac{1}{4}\,\left[\,\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 - \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2 + i\,\|\boldsymbol{x}+i\boldsymbol{y}\|^2 - i\,\|\boldsymbol{x}-i\boldsymbol{y}\|^2\right]$$

se $V$ è complesso.

SOLUZIONE. Basta sviluppare i secondi membri. Si ha, ad esempio,

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\,\left[\,\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 - \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2\right] &= \frac{1}{4}\,[(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\,|\,\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) - (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\,|\,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})] = \\ &= \frac{1}{4}\,[2(\boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{y}) + 2(\boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{y})] = (\boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{y}).\end{aligned}$$

**1.3-5.** Dimostrare che le norme $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_\infty$ su $\mathbb{R}^n, n \geq 2$ ($\uparrow$ esempio 1.2-1) non verificano l'identità del parallelogramma, e dunque non sono norme hilbertiane.

Suggerimento $\triangleright$ Prendere $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_1 = (1,0,0,\ldots,0)$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{e}_2 = (0,1,0,\ldots,0)$.

Soluzione. Per i vettori in questione si ha infatti

$$\|\boldsymbol{e}_1\|_1 = \|\boldsymbol{e}_2\|_1 = 1, \quad \|\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2\|_1 = \|\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2\|_1 = 2;$$

$$\|\boldsymbol{e}_1\|_\infty = \|\boldsymbol{e}_2\|_\infty = \|\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2\|_\infty = \|\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2\|_\infty = 1.$$

**1.3-6.** Dimostrare che le norme $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_\infty$ su $C[0,1]$ ($\uparrow$ esempio 1.2-2) non verificano l'identità del parallelogramma, e dunque non sono norme hilbertiane.

Suggerimento $\triangleright$ Prendere, ad esempio, $f(x) = x$, $g(x) = 1 - x$.

Soluzione. Sia ha $f(x) + g(x) = 1$, $f(x) - g(x) = 2x - 1$, da cui facilmente

$$\|f\|_1 = \|g\|_1 = 1, \quad ,\|f+g\|_1 = 1, \quad \|f-g\|_1 = 1/2;$$

$$\|f\|_\infty = \|g\|_\infty = \|f+g\|_\infty = \|f-g\|_\infty = 1.$$

**1.3-7.** Sia $V$ uno spazio vettoriale con prodotto scalare $(\cdot|\cdot)$. Verificare che se $V$ è reale, allora

$$\big(\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\|^2 = \|\boldsymbol{u}\|^2 + \|\boldsymbol{v}\|^2\big) \quad \Longleftrightarrow \quad \big((\boldsymbol{u}|\boldsymbol{v}) = 0\big),$$

mentre se $V$ è complesso, allora

$$\big(\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\|^2 = \|\boldsymbol{u}\|^2 + \|\boldsymbol{v}\|^2\big) \quad \Longleftrightarrow \quad \big(\mathrm{Re}(\boldsymbol{u}|\boldsymbol{v}) = 0\big).$$

Costruire due vettori non nulli di $\mathbb{C}^n$ per cui valga l'uguaglianza

$$\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\|^2 = \|\boldsymbol{u}\|^2 + \|\boldsymbol{v}\|^2$$

ma $(\boldsymbol{u}|\boldsymbol{v}) \neq 0$ (s'intende di utilizzare il prodotto scalare canonico e la relativa norma).

Soluzione. Si ha infatti

$$\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\|^2 = (\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = \|\boldsymbol{u}\|^2 + \|\boldsymbol{v}\|^2 + (\boldsymbol{u}|\boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{v}|\boldsymbol{u}),$$

dove la somma degli ultimi due addendi vale $2\big(\mathrm{Re}(\boldsymbol{u}|\boldsymbol{v})$ se si tratta di uno spazio complesso, e semplicemente $2(\boldsymbol{u}|\boldsymbol{v})$ se si tratta di uno spazio reale. Per i vettori $\boldsymbol{u} = (i,i,\ldots,i)$ e $\boldsymbol{v} = (1,1,\ldots,1)$ si ha $\mathrm{Re}(\boldsymbol{u}|\boldsymbol{v}) = 0$ ma $(\boldsymbol{u}|\boldsymbol{v}) \neq 0$.

**1.3-8.** Utilizzando le stesse funzioni dell'esempio 1.2-16, si verifichi che lo spazio $C\big([-1,1],\mathbb{R}\big)$ non è completo rispetto alla norma indotta dal prodotto scalare $(f|g) :=$ $= \int_a^b f(x)g(x)\,dx$.

Suggerimento $\triangleright$ Si tenga presente che, se $|f(x)| \leq 1$, allora $|f(x)|^2 \leq |f(x)|$.

Soluzione. Si tratta di dimostrare che la successione di funzioni $(f_n)$ considerata nell'esempio citato è di Cauchy rispetto alla norma di indice 2. Ora si ha (con i simboli dell'esempio)

$$\begin{aligned}
\|f_n - f_m\|_2^2 &= \|(f_n - f) + (f - f_m)\|_2^2 \leq \big(\|f_n - f\|_2 + \|f_m - f\|_2\big)^2 \leq \\
&\leq 2\big(\|f_n - f\|_2^2 + \|f_m - f\|_2^2\big) = \\
&= 2\left(\int_{-1}^1 |f_n(x) - f(x)|^2\,dx + \int_{-1}^1 |f(x) - f_m(x)|^2\,dx\right) \leq \\
&= 2\left(\int_{-1}^1 |f_n(x) - f(x)|\,dx + \int_{-1}^1 |f(x) - f_m(x)|\,dx\right) = \frac{2}{n} + \frac{2}{m}.
\end{aligned}$$

Abbiamo sfruttato il fatto che $|f_n(x) - f(x)| \leq 1$ e $|f_m(x) - f(x)| \leq 1$, dunque le funzioni ai primi membri sono $\geq$ dei rispettivi quadrati. Si è utilizzata inoltre la disuguaglianza $(A+B)^2 \leq 2(A^2 + B^2)$, dove $A, B \geq 0$.

**1.3-9.** Utilizzando la diseguaglianza di Cauchy-Schwarz nello spazio $C\big([a,b];\mathbb{C}\big)$ relativamente alle funzioni $x \mapsto |f(x)|$ e $x \mapsto 1$, dove $f$ è una qualsivoglia funzione dello spazio in esame, dimostrare la diseguaglianza $\|f\|_1 \leq \sqrt{b-a}\,\|f\|_2$.

SOLUZIONE. Si ha infatti

$$\|\, f \,\|_1 = \int_a^b |f(x)|\, dx = \int_a^b |f(x)| \cdot 1\, dx \leq \|\, f \,\|_2 \,\|\, 1 \,\|_2 = \sqrt{b-a}\,\|\, f \,\|_2.$$

## 1.4. Proiezioni ortogonali

ESERCIZI PROPOSTI

**1.4-P.1.** Sia $V = \mathbb{R}^n$ munito del prodotto scalare canonico, $V_1$ il sottospazio di $V$ di dimensione 1 generato dal vettore $\boldsymbol{v}_1 := (1, 1, \ldots, 1)$. Un vettore $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ è ortogonale a $\boldsymbol{v}_1$ (dunque appartiene a $V_1^{\perp}$) se e solo se $\sum_{k=1}^n x_k = 0$.
Verificare che la proiezione ortogonale di $\boldsymbol{x}$ su $V_1$ è data dal vettore con tutte le componenti uguali alla media aritmetica delle componenti di $\boldsymbol{x}$ stesso.

**1.4-P.2.** Sia $V = \mathbb{R}^8$ munito del prodotto scalare canonico e $V_2$ sia il sottospazio di $V$ di dimensione 2 generato dai vettori

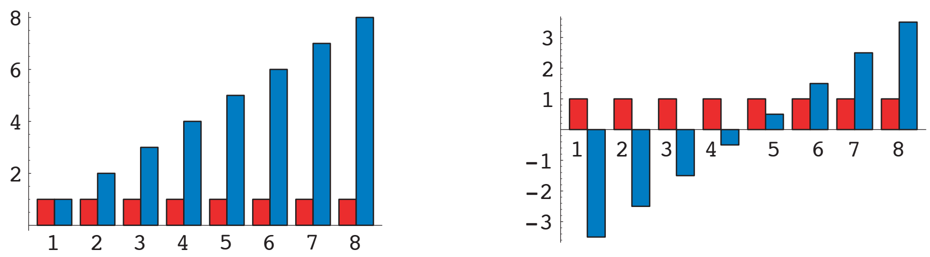
$$\boldsymbol{v}_1 = (\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{8 \text{ componenti}}), \quad \boldsymbol{v}_2 = (1, 2, 3, \ldots, 8).$$

$V_2$ è costituito da tutti (e soltanto) i vettori di $\mathbb{R}^8$ le cui componenti sono in "progressione aritmetica": $x_k - x_{k-1} =$ costante, per $k = 2, 3, \ldots, 8$.

Verificare che il procedimento di Gram-Schmidt, applicato ai vettori dati, produce i vettori

$$\boldsymbol{z}_1 = \boldsymbol{v}_1, \quad \boldsymbol{z}_2 = \boldsymbol{v}_2 - (9/2)\boldsymbol{v}_1 = (1 - 9/2, 2 - 9/2, \ldots, 8 - 9/2)$$

dove $9/2$ è la media aritmetica delle componenti di $\boldsymbol{v}_2$.




A sinistra i vettori $\boldsymbol{v}_1$ e $\boldsymbol{v}_2$, a destra i vettori $\boldsymbol{z}_1$ e $\boldsymbol{z}_2$.

---

La proiezione ortogonale di $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ su $V_2$ si scrive dunque

$$\frac{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{z}_1}{\|\boldsymbol{z}_1\|^2}\,\boldsymbol{z}_1 + \frac{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{z}_2}{\|\boldsymbol{z}_2\|^2}\,\boldsymbol{z}_2 = \frac{\sum_{k=1}^8 x_k}{8}\,\boldsymbol{z}_1 + \frac{\sum_{k=1}^8 k\, x_k}{42}\,\boldsymbol{z}_2$$

42 essendo il quadrato della norma di $\boldsymbol{z}_2$.

**1.4-P.3.** Generalizzare i risultati del precedente esercizio al caso dello spazio $\mathbb{R}^n$, con $n$ qualunque $\geq 2$. Ora abbiamo

$$\boldsymbol{v}_1 = (\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{n \text{ componenti}}), \quad \boldsymbol{v}_2 = (1, 2, 3, \ldots, n),$$

da cui segue

$$\boldsymbol{z}_1 = \boldsymbol{v}_1, \quad \boldsymbol{z}_2 = (1 - m,\ 2 - m,\ \ldots,\ n - m)$$

dove $m = (n+1)/2$ è la media ritmetica delle componenti di $\boldsymbol{v}_2$. Il quadrato della norma di $\boldsymbol{z}_1$ vale $n$, mentre il quadrato della norma di $\boldsymbol{z}_2$ vale $n(n^2-1)/12$. Per effettuare quest'ultimo calcolo occorre ricordare la formula (v. PCAM, pag. 54)

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

**1.4-P.4.** Consideriamo i polinomi $p_0(x) = 1, \quad p_1(x) = x, \quad p_2(x) = x^2$ nello spazio delle funzioni continue sull'intervallo $[0, 2]$, munito del consueto prodotto scalare $(f|g) = \int_0^2 f(x)\overline{g(x)}\,dx$.
Applicare ad essi il procedimento di Gram-Schmidt (Prop. 1.4-3), ottenendo i polinomi $q_0(x), q_1(x), q_2(x)$. Si ottiene una base ortogonale del sottospazio $\mathcal{P}_2$ costituito dai polinomi di grado $\leq 2$. Utilizzando tale base, calcolare il polinomio di secondo grado che meglio approssima la funzione $f(x) = x^3$ nello spazio considerato.
SUGGERIMENTO ▷ Utilizzare la Proposizione 1.3-4.)

SOLUZIONE. Si trova

$$q_0(x) = 1, \quad q_1(x) = x - 1, \quad q_1(x) = x^2 - 2x + 2/3.$$

Il polinomio di migliore approssimazione è $p(x) = c_0\ q_0(x) + c_1\ q_1(x) + c_2\ q_2(x)$ con $c_k = (f|q_k)/(q_k|q_k)$, $k = 0, 1, 2$, quindi

$$c_0 = 2, \quad c_1 = 18/5, \quad c_2 = 3,$$

da cui finalmente $p(x) = 3x^2 - 12/5\,x + 2/5$.