2. Elementi di teoria dell'integrazione Esercizi

http://www.ciram.unibo.it/~barozzi/MI2/PDF/MI2-Cap.2-Ese.pdf

2.1. Richiami sull'integrale di Riemann

2.2. La misura di Lebesgue

2.2-1. Ritocchiamo la definizione di pluri-intervallo, convenendo di considerare soltanto unioni *finite* di intervalli: $P = \bigcup_{k=1}^{N} I_k$, con N naturale positivo ad arbitrio. In conseguenza di tale scelta, definiamo una "misura esterna"

$$m_e(E) := \inf_P m(P),$$

intendendo che l'estremo inferiore venga considerato al variare di P tra i pluri-intervalli che "coprono" E.

Una tale misura esterna viene spesso associata ai nomi di G. Peano (1858-1932) e C. Jordan (1838-1922). Se $E = [0,1] \cap \mathbb{Q}$ ($\uparrow$ esempio 2.2-1), si trova

$$m_e(E) = m_e\big([0,1] \setminus E\big) = m_e\big([0,1]\big) = 1,$$

dunque E non è "misurabile" nel senso di Peano-Jordan, in quanto non vale l'analoga dell'identità (6).

Soluzione. Se $P = \bigcup_{k=1}^{N} I_k$, con $N \in \mathbb{N}^*$, possiamo riscrivere P nella forma $P = \bigcup_{k=1}^{N'} I'_k$, con $N' \leq N$, dove gli intervalli I'_k sono a due a due disgiunti. Si tenga presente che se l'intersezione tra due intervalli non è vuota, la loro unione è ancora un intervallo.

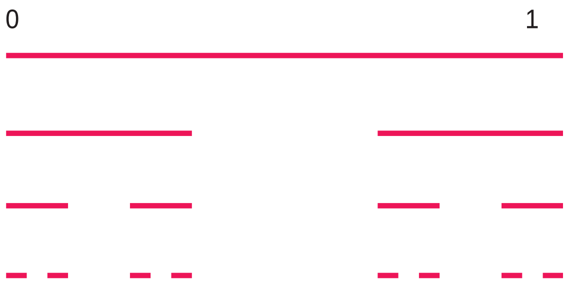
Ora tanto E (insieme dei razionali dell'intervallo $[0,1]$) quanto $[0,1] \setminus E$ (insieme degli irrazionali dell'intervallo $[0,1]$) sono densi nell'intervallo $[0,1]$, quindi sono contenuti in un plurintervallo del tipo $P = \bigcup_{k=1}^{N'} I'_k$ solo se $[0,1]$ è contenuto in uno degli intervalli I'_k. Questo implica che $m(P) \geq 1$. D'altra parte l'intervallo $[0,1]$, di misura 1, contiene tanto E quanto $[0,1] \setminus E$, e questo prova che, per entrambi gli insiemi, la misura esterna vale 1.

2.2-2. Vogliamo definire l'*insieme ternario* di Cantor per sottrazioni successive a partire dall'intervallo $I = [0,1]$. Sia P_1 l'insieme che si ottiene togliendo da I l'intervallo aperto concentrico di ampiezza $1/3$:

$$P_1 = I \setminus (1/3, 2/3) = [0, 1/3] \cup [2/3, 1].$$

Da ciascuno dei due intervalli di cui si compone P_1 togliamo l'intervallo aperto concentrico di ampiezza pari ad $1/3$ dell'ampiezza dello stesso intervallo. Dunque P_2 è l'unione di 4 intervalli chiusi di lunghezza $1/9$, quindi $m(P_2) = 4/9 = (2/3)^2$.

Proseguiamo sempre col medesimo criterio, togliendo da ciascuno dei 2^n intervalli di cui si compone P_n l'intervallo aperto concentrico di ampiezza pari a $1/3$ dell'intervallo stesso. Si trova, per ogni n, $m(P_n) = (2/3)^n$.



Sia P l'intersezione di tutti i pluri-intervalli P_n: $P := \bigcap_{n\geq 1} P_n$. Verificare che P è di misura nulla, anzi è tale anche rispetto alla "misura di Peano-Jordan" considerata nel precedente esercizio.

SOLUZIONE. Chiaramente $P \subset P_n$ per ogni n, dove P_n è un pluri-intevallo unione di 2^n intervalli disgiunti, di misura $(2/3)^n$. Ma $\lim_{n\to\infty}(2/3)^n = 0$, quindi P può essere ricoperta da un pluri-intervallo (unione di un numero finito di intervalli) di misura arbitrariamente piccola. Ciò corrisponde al fatto che la misura degli intervalli che sono stati rimossi vale

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{4}{27}+\frac{8}{81}+\ldots = \frac{1}{3}\left(1+\frac{2}{3}+\frac{2^2}{3^2}+\frac{2^3}{3^3}+\ldots\right) = \\ = \frac{1}{3}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{3}\frac{1}{1-2/3} = 1$$

2.2-3. Verificare che l'insieme di Cantor del precedente esercizio può essere identificato con l'insieme dei numeri reali dell'intervallo $[0,1]$ che possono essere espressi in base tre senza utilizzare la cifra uno. Ad esempio: $1 = (0.\overline{2})_3$, $2/3 = (0.2)_3$, $1/3 = (0.0\overline{2})_3$.

SOLUZIONE. Consideriamo la rappresentazione ternaria (= in base tre) dei numeri dell'intervallo $[0,1]$. Poiché $1/3$ si scrive $(0.1)_3$ e $2/3$ si scrive $(0.2)_3$, vediamo che al primo passo, quando rimuoviamo il terzo intermedio dell'intervallo $[0,1]$, vengono tolti i numeri nella cui rappresentazione ternaria compare la cifra 1 nella prima posizione delle parte frazionaria. Se si tiene presente che $1/3$ (punto che non viene rimosso) si scrive anche $(0.0\overline{2})_3$ possiamo dire che vengono rimossi tutti i numeri che presentano 1 nella prima posizione della parte frazionaria.

Al secondo passo vengono rimossi tutti i punti che presentano la cifra 1 nella seconda posizione della parte frazionaria e così via.

In generale, i secondi estremi degli intervalli che costituiscono il pluri-intervallo P_n hanno rappresentazioni ternarie limitate in cui l'ultima cifra vale 1 mentre le (eventuali) cifre precedenti valgono 0 oppure 2. Ciascuna di tali rappresentazioni equivale a quella che si ottiene srivendo 0 al posto di 1, seguito da una successione di cifre tutte uguali a 2. Ad esempio il numero $7/9$ (secondo estremo del terzo intervallo di P_2) si scrive

$$\frac{7}{9} = \frac{2}{3}+\frac{1}{9} = (0.21)_3 = (0.2022222\ldots)_3 = (0.20\overline{2})_3.$$

Ci si può chiede quali punti restino nell'insieme di Cantor, oltre agli estremi degli intervalli che costituiscono ciascun P_n. Un esempio è fornito dal numero $1/4$, la cui rappresentazione ternaria è $(0.\overline{02})_3$. Per convincersene basta scrive 4 in base 3, cioè $4 = (11)_3$, ed iniziare la divisione di 1 per 4 facendo i calcoli in base 3. Dopo due passi si sono ottenute le cifre 0 e 2 e nuovamente il resto 1:

$$\begin{array}{r|l} 1 & 11 \\ \cline{2-2} 10 & 0.02 \\ 100 & \\ 22 & \\ \cline{1-1} 1 & \end{array}$$

Di fatto l'insieme di Cantor, pur essendo di misura nulla, ha la stessa cardinalità dell'intervallo $[0,1]$, cioè può essere posto in corrispondenza biunivoca con tale intervallo. Per convincersene basta considerare la corrispondenza che, ad ogni allineamento ternario costituito soltanto dalle cifre 0 e 2, associa l'allineamento binario ottenuto scrivendo 1 al posto di 2. Ad esempio, al numero

$$(0.0202020202\ldots)_3 = (0.\overline{02})_3 = 1/4$$

viene associato il numero

$$(0.0101010101\ldots)_2 = (0.\overline{01})_2 = 1/3.$$

Poiché l'insieme di Cantor contiene tutti (e soltanto) i numeri che hanno rappresentazioni ternarie costituite da una parte intera nulla e dalle cifre 0 e 2, si ottengono come corrispondenti tutti gli allineamenti binari con parte intera nulla, dunque tutti i punti dell'intervallo $[0,1]$.

Se φ è la corrispondenza appena considerata, che trasforma l'insieme di Cantor C sull'intervallo $[0,1]$, possiamo prolungarla in una funzione dell'intervallo $[0,1]$ su se stesso convenendo che φ sia costante su ciascuno degli intervalli che costituiscono il complementare dell'insieme C, e precisamente sia uguale al valore che φ assume in corrispondenza degli estremi dello stesso intervallo.

Ad esempio, poiché $1/3$ e $2/3$ hanno le rappresentazioni $(0.022222\ldots)_3$ e $(0.2)_3$, a cui corrispondono la rappresentazioni binarie $(0.0111111\ldots)_2$ e $(0.1)_2$ rispettivamente, e queste rappresentano entrambe $1/2$, allora la funzione φ varrà $1/2$ nell'intervallo $[1/3, 2/3]$.

La funzione così costruita coincide con quella che viene introdotta e studiata nell'esempio 2.3-8, dove viene chiamata V. Il suo grafico è la "scala del diavolo".

2.2-4. Dimostrare che, in $\mathbb{R}^2$, ogni segmento con i lati paralleli agli assi coordinati è di misura nulla.

SOLUZIONE. Sia $L > 0$ la lunghezza del segmento in esame; dato $\varepsilon > 0$ ad arbitrio, possiamo coprire il segmento con un unico intervallo bidimensionale (un rettangolo) di dimensioni L e ε/L.

2.2-5. Si consideri in $\mathbb{R}^2$ un segmento non parallelo agli assi coordinati; con riferimento alla figura 2.2-7, si verifichi che la misura del pluri-intervallo (= pluri-rettangolo) che ricopre il segmento vale $(L^2 \sin\alpha\cos\alpha)/n$, dove L è la lunghezza del segmento, α la misura dell'angolo che esso forma con l'asse delle ascisse, n il numero di parti uguali in cui lo stesso segmento è stato suddiviso.

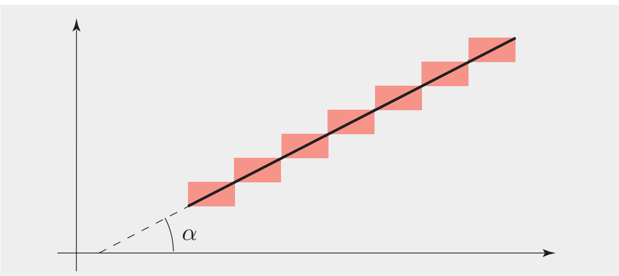


Figura 2.2-7.
La misura del pluri-intervallo in figura si può rendere arbitrariamente piccola prendendo convenientemente grande il numero degli intervalli (= rettangoli) che lo compongono.

Se ne deduca che il segmento in questione è di misura nulla in $\mathbb{R}^2$. Si dimostri che ogni retta ha misura nulla in $\mathbb{R}^2$.

Soluzione. Ciascuno dei rettangoli in figura ha area

$$\frac{L}{n}\cos\alpha\,\frac{L}{n}\sin\alpha$$

quindi il plurirettangolo mostrato ha misura $(L^2\sin\alpha\cos\alpha)/n \to 0$ per $n\to\infty$.

Quanto al caso di una retta nel piano, possiamo pensarla come unione di un'infinità numerabile di segmenti di lunghezza L (peraltro arbitraria) e applicare il risultato contenuto nell'esercizio seguente.

2.2-6. Dimostrare che l'unione di un'infinità numerabile di insiemi di misura nulla è ancora di misura nulla.

Soluzione. Sia $E = \cup_{n\in\mathbb{N}^*} E_n$, dove ciascuno degli insieme E_n ha misura nulla. Scelto $\varepsilon > 0$, copriamo E_n con un plurintervallo P_n, unione di un'infinità numerabile di intervalli $I_{n,k}$ di misura complessiva $\le \varepsilon/2^n$. Allora $\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} I_{n,k}\right)$ è una famiglia numerabile di intervalli di misura complessiva non superiore a ε.

2.2-7. Sia $f : E \to \mathbb{R}$ una funzione misurabile, e siano f_j^+ e f_j^- due successioni crescenti di funzioni semplici non negative, convergenti q.o. a f^+ e f^- rispettivamente. Verificare che $f_j^+ + f_j^-$ è una successione crescente di funzioni semplici convergente q.o. a $|f|$; se quest'ultima è sommabile, dalle relazioni

$$\int_E f_j^+(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} \le \int_E \left(f_j^+(\boldsymbol{x}) + f_j^-(\boldsymbol{x})\right)d\boldsymbol{x} \le \int_E |f(\boldsymbol{x})|\,d\boldsymbol{x},$$

$$\int_E f_j^-(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} \le \int_E \left(f_j^+(\boldsymbol{x}) + f_j^-(\boldsymbol{x})\right)d\boldsymbol{x} \le \int_E |f(\boldsymbol{x})|\,d\boldsymbol{x}$$

dedurre la sommabilità di f^+ e f^- e quindi la sommabilità di f.

Soluzione. Ciascuna funzione $f_j^+ + f_j^-$ è semplice in quanto somma di funzioni semplci; la successione $j \mapsto f_j^+ + f_j^-$ è crescente in quanto somma di successioni crescenti. Per ottenere la sommabilità di f^+ e f^- si può ricorrere al teorema di B. Levi.

2.2-8. Sia $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ una funzione sommabile; dimostrare che *se esiste* il limite $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, esso è necessariamente uguale a 0.

Suggerimento ▷ Sia, per assurdo, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lambda > 0$; allora per tutti gli x abbastanza grandi, diciamo per $x > x_\lambda$, si ha $f(x) > \lambda/2$. Per gli stessi x avremmo

$$\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^{x_\lambda} f(t)\,dt + \int_{x_\lambda}^x f(t)\,dt > \int_0^{x_\lambda} f(t)\,dt + \frac{\lambda}{2}(x - x_\lambda),$$

quindi per $x \to +\infty$ ... .

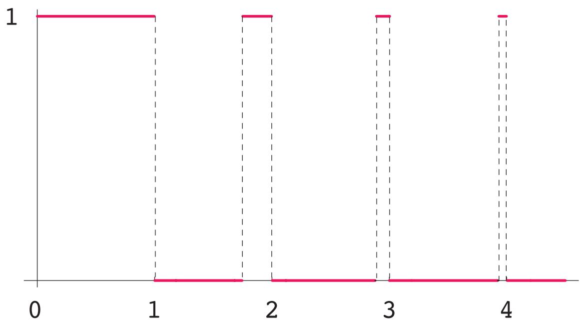
Soluzione. Proseguendo nel ragionamento iniziato nel suggerimento, nelle ipotesi ammesse avremmo $\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)\,dt = +\infty$, in quanto il prodotto $\lambda/2\,(x - x_\lambda)$ tende a $+\infty$, contro l'ipotesi di sommabilità della funzione f. Un ragionamento del tutto analogo vale se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lambda < 0$.

2.2-9. Si consideri la funzione caratteristica del pluri-intervallo di misura finita (↓ esercizio 3.2-6) $P := \bigcup_{n\ge1}[n - 1/n^2, n]$; se ne concluda che una funzione sommabile su $\mathbb{R}_+$ può essere priva di limite all'infinito.

Soluzione. La sommabilità della funzione in esame, sia f, equivale alla convergenza della serie armonica generalizzata

$$\sum_{n\ge1}\frac{1}{n^2},$$

verificata in PCAM, Esempio 6.2-2, ed anche nell'esercizio citato, dove si dimostra che la somma delle serie vale $\pi^2/6$.



Chiaramente la funzione in esame è priva di limite per $x \to \infty$: comunque si fissi un valore $\overline{x}$, esistono valori di $x > \overline{x}$ tali $f(x) = 0$, ed altri tali che $f(x) = 1$.

2.3. L'integrale di Lebesgue

2.3-1.P. Dedurre dal teorema della convergenza dominata di Lebesgue il seguente enunciato:

Sia $f(x,t)$ una funzione definita per $x \in E \subset \mathbb{R}^n$, $t \in I$ intervallo di $\mathbb{R}$. Supponiamo f derivabile parzialmente rispetto a t per ogni t e si abbia

$$|f_t(x,t)| \leq g(x) \quad \text{q.o. in } E$$

con g sommabile su E. Allora

$$\frac{d}{dt} \int_E f(x,t)\, dx = \int_E f_t(x,t)\, dx$$

SOLUZIONE. Fissiamo $t \in I$ e scegliamo una successione infinitesima h_n tale che $t + h_n \in I$. Posto

$$f_n(x) := \frac{f(x, t+h_n) - f(x,t)}{h_n},$$

la tesi significa che

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\, dx = \int_E \lim_{n\to\infty} f_n(x)\, dx.$$

Si può scrivere

$$\frac{f(x, t+h_n) - f(x,t)}{h_n} = \left.\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\right|_{t=\tau}$$

per un opportuno τ, dunque per q.o. x si ha $|f_n(x)! \leq g(x)$. A questo punto possiamo applicare il teorema della convergenza dominata.

NOTA. Applicando il teorema appena dimostrato si ha una dimestrazione diretta della Proposizione 6.2-5, relativa alla derivata della trasformata di Fourier.

2.4. Spazi di funzioni sommabili

2.4-1. Verificare che il predicato "x è irrazionale", è verificato q.o. su $\mathbb{R}$. Altrettanto per il predicato "x non è intero".

SOLUZIONE. Infatti il primo predicato è falso in corrispondenza dei numeri razionali, il cui insieme, in quanto numerabile, è di misura nulla. Lo stesso vale per l'insieme degli interi in cui è falso il secondo predicato.

2.4-2. Verificare che q.o. su $\mathbb{R}$ si ha $\lim_{n\to\infty} e^{-n|x|} = 0$, e precisamente ... .

SOLUZIONE. L'unico punto in cui il limite in questione non è 0 è l'origine.

2.4-3. Sia $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = 1/x$ (funzione definita q.o. su $\mathbb{R}_+$); procedendo come nell'esempio 2.3-4, verificare che

$$f \notin L^1[0,1], \quad f \notin L^1[1,+\infty),$$

dove abbiamo indicato semplicemente con f la restrizione della stessa funzione agli intervalli $[0,1]$ e rispettivamente $[1,+\infty)$.

SOLUZIONE. Infatti le successioni

$$n \mapsto \int_{1/n}^{1} \frac{1}{x}\, dx = \log n, \qquad n \mapsto \int_{1}^{n} \frac{1}{x}\, dx = \log n$$

sono divergenti.

2.4-4. Sia $f_\varepsilon : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ la funzione $f_\varepsilon(x) = 1/x^{1+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$. Verificare che

$$f_\varepsilon \notin L^1[0,1], \quad f_\varepsilon \in L^1[1,+\infty).$$

Ad esempio $x \mapsto 1/x^2$ è sommabile su $[1,\infty)$, non è sommabile su $[0,1]$.

SOLUZIONE. Una primitiva di f_ε si scrive

$$F_\varepsilon(x) = -\frac{1}{\varepsilon}\frac{1}{x^\varepsilon},$$

quindi

$$\int_{1/n}^{1} f_\varepsilon(x)\, dx = -\frac{1}{\varepsilon}\Big[1 - n^\varepsilon\Big] \to +\infty \quad \text{per } n \to \infty,$$

$$\int_{1}^{n} f_\varepsilon(x)\, dx = -\frac{1}{\varepsilon}\Big[\frac{1}{n^\varepsilon} - 1\Big] \to \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{per } n \to \infty.$$

2.4-5. Sia $f_{-\varepsilon} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ la funzione $f_{-\varepsilon}(x) = 1/x^{1-\varepsilon}$, $0 < \varepsilon < 1$. Verificare che

$$f_{-\varepsilon} \in L^1[0,1], \quad f_{-\varepsilon} \notin L^1[1,+\infty).$$

Ad esempio $x \mapsto 1/\sqrt{x}$ non è sommabile su $[1,\infty)$, mentre è sommabile su $[0,1]$.

SOLUZIONE. Una primitiva di $f_{-\varepsilon}$ si scrive $F_{-\varepsilon}(x) = x^\varepsilon/\varepsilon$, quindi

$$\int_{1/n}^{1} f_{-\varepsilon}(x)\, dx = \frac{1}{\varepsilon}\Big[1 - \frac{1}{n^\varepsilon}\Big] \to \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{per } n \to \infty,$$

$$\int_{1}^{n} f_{-\varepsilon}(x)\, dx = \frac{1}{\varepsilon}\Big[n^\varepsilon - 1\Big] \to +\infty \quad \text{per } n \to \infty.$$

funzione degli errori

2.4-6. Verificare che la *funzione degli errori*

$$\operatorname{erf}(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt$$

tende a 1 per $x \to +\infty$ (↑ esempio 2.3-6). Dallo sviluppo in serie della funzione integranda, dedurre il seguente sviluppo (utile per x "piccolo"):

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_0^\infty (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)\, n!} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \Big(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \frac{x^7}{42} + \frac{x^9}{216} + \dots\Big)$$

SOLUZIONE. Sappiamo dall'esempio citato che $\int_0^\infty e^{-t^2}\, dt = \sqrt{\pi}/2$. Dallo sviluppo

$$e^{-t^2} = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{t^{2n}}{n!}$$

segue il risultato integrando termine a termine sull'intervallo $[0,x]$.

2.4-7. Partendo dalla uguaglianza

$$\operatorname{erf}(x) = (2/\sqrt{\pi})\Big[\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt - \int_x^\infty e^{-t^2}\,dt\Big] = 1 - (2/\sqrt{\pi})\int_x^\infty e^{-t^2}\,dt,$$

dedurre lo sviluppo asintotico per x "grande":

$$\operatorname{erf}(x) = 1 - \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}}\Big(\frac{1}{x} - \frac{1}{2\cdot x^3} + \frac{1\cdot 3}{2^2\cdot x^5} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot x^7} + \dots\Big).$$

SUGGERIMENTO ▷ Applicare per $k = 0, 2, 4, \dots$ l'identità (integrazione per parti)

$$\int_x^\infty \frac{e^{-t^2}}{t^k}\,dt = \frac{e^{-x^2}}{2x^{k+1}} - \frac{k+1}{2}\int_x^\infty \frac{e^{-t^2}}{t^{k+2}}\,dt.$$

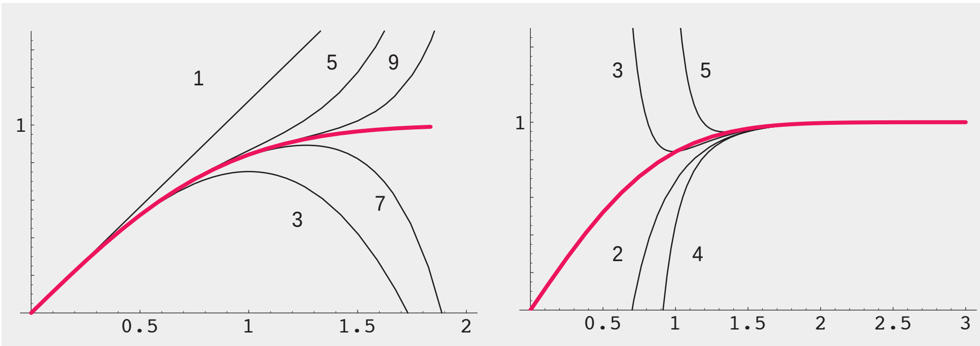


Figura 2.4-3. A sinistra: grafico della funzione degli errori e di alcune somme parziali del suo sviluppo in serie (il numero a fianco della curva indica il grado della somma corrispondente); a destra alcuni termini dello sviluppo asintotico della stessa funzione (il numero a fianco della curva indica quanti termini sono stati presi in considerazione).

SOLUZIONE. Per interpretare correttamente l'integrazione per parti suggerita occorre scrivere la funzione integranda a primo membro come

$$\frac{-2t\,e^{-t^2}}{-2t^{k+1}}$$

e considerare $-2t\,e^{-t^2}$ come la derivata di e^{-t^2}. Dopodiché, applicando l'uguaglianza scritta per $k = 0, 2, 4, \dots$, i termini integrati forniscono uno dopo l'altro gli addendi entro parentesi tonde.