3. Serie di Fourier
Esercizi

http://eulero.ing.unibo.it/~barozzi/MI2/PDF/MI2-Cap.3-Ese.pdf

3.1. Polinomi di Fourier

3.2. Serie di Fourier: convergenza puntuale

3.2-1. Si dimostri che la serie (v. esempio 3.2-2)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos\big((2n+1)x\big) = \cos x + \frac{1}{3^2}\cos 3x + \frac{1}{5^2}\cos 5x + \dots,$$

è totalmente, dunque uniformemente, convergente su $\mathbb{R}$.

Soluzione. Si ha

$$\Big\| \frac{\cos\big((2n+1)x\big)}{(2n+1)^2} \Big\|_\infty = \frac{1}{(2n+1)^2}$$

e la serie che ha come termine generale l'ultima quantità scritta converge in quanto

$$\frac{1}{(2n+1)^2} \sim \frac{1}{4n^2}.$$

3.2-2. Data la funzione sommabile $f(x) := 1/\sqrt{x}$, $0 < x \le 1$ (v. esempio 3.2-3), si determini una funzione g costante a tratti, minorante di f e tale che

$$\int_0^1 |f(x) - g(x)|\,dx = \int_0^1 [f(x) - g(x)]\,dx =$$
$$= \int_0^1 f(x)\,dx - \sum_{k=1}^{n} c_k(x_k - x_{k-1}) < \varepsilon$$

($\uparrow$ Prop. 3.2-1), procedendo nel modo che segue. Si determini $x_1 > 0$ in modo tale che

$$\int_0^{x_1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx < \varepsilon/2;$$

(si determini esplicitamente l'integrale a primo membro). Scelto così x_1, si suddivida l'intervallo $[x_1, 1]$ in $n-1$ parti uguali (con n abbastanza grande) e si ponga $g(x) := 0$, per $0 < x < x_1$,

$$g(x) := \inf\{f(x) \mid x_{k-1} < x < x_k\} = 1/\sqrt{x_k}$$

per $x_{k-1} < x < x_k$, $k = 2, 3, \dots, n$.

Soluzione. Si ha

$$\int_0^{x_1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x_1},$$

dunque basta scegliere $x_1 < \varepsilon^2/16$ per soddisfare la prima condizione posta.

Si ha poi, per ogni $k = 2, 3, \ldots, n$,

$$\begin{aligned}\int_{x_{k-1}}^{x_k} [f(x) - g(x)]\, dx &= \int_{x_{k-1}}^{x_k} \Big(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x_k}}\Big)\, dx = \\ &= 2[\sqrt{x_k} - \sqrt{x_{k-1}}] - \frac{x_k - x_{k-1}}{\sqrt{x_k}} = \\ &= 2\frac{x_k - x_{k-1}}{\sqrt{x_k} + \sqrt{x_{k-1}}} - \frac{x_k - x_{k-1}}{\sqrt{x_k}} = \\ &= (x_k - x_{k-1})\, \frac{\sqrt{x_k} - \sqrt{x_{k-1}}}{\sqrt{x_k}(\sqrt{x_k} + \sqrt{x_{k-1}})} \le \\ &\le (x_k - x_{k-1})\, \frac{\sqrt{x_k} - \sqrt{x_{k-1}}}{2} = \frac{1 - x_1}{n - 1}\; \frac{\sqrt{x_k} - \sqrt{x_{k-1}}}{2},\end{aligned}$$

quindi

$$\sum_{k=2}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} [f(x) - g(x)]\, dx \le \frac{1 - x_1}{n - 1} \sum_{k=2}^{n} \big(\sqrt{x_k} - \sqrt{x_{k-1}}\big) = \frac{1 - x_1}{n - 1}\, (1 - \sqrt{x_1}),$$

dove l'ultima quantità tende a 0 per $n \to \infty$.

3.2-3. Dimostrare l'uguaglianza

$$\sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} = \begin{cases} 2n + 1, \ \text{se } t \equiv 0 \pmod{2\pi}, \\[2mm] \dfrac{\sin\big((n + 1/2)t\big)}{\sin(t/2)}, \ \text{altrimenti.} \end{cases}$$

procedendo per induzione rispetto a n.

SOLUZIONE. L'uguaglianza da dimostrare sussiste per $n = 0$, riducendosi in tal caso all'uguaglianza $1 = 1$. Ammessa la validità dell'uguaglianza per un assegnato n, si ha

$$\begin{aligned}\sum_{k=-n+1}^{n+1} e^{ikt} &= \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} + e^{i(n+1)t} + e^{-i(n+1)t} = \\ &= \frac{\sin\big((n + 1/2)t\big)}{\sin(t/2)} + 2\cos\big((n + 1)t\big) = \\ &= \frac{\sin\big((n + 1/2)t\big) + 2\cos\big((n + 1)t\big)\, \sin(t/2)}{\sin(t/2)} = \\ &= \frac{\sin\big((n + 1 + 1/2)t\big)}{\sin(t/2)}.\end{aligned}$$

Abbiamo utilizzato l'identità (formula diWerner) $2\cos\alpha \sin\beta = \sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)$.

3.2-4. Dimostrare che se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ è periodica di periodo T e sommabile su $[0, T]$, allora $\int_0^T f(x)\, dx = \int_a^{a+T} f(x)\, dx$, per ogni a reale.

SUGGERIMENTO ▷ Si spezzi l'integrale sull'intervallo $[a, a + T]$ nella somma di tre integrali sugli intervalli $[a, 0]$, $[0, T]$, $[T, a + T]$.)

SOLUZIONE. Si ha

$$\int_0^T f(x)\, dx = \int_0^a f(x)\, dx + \int_a^{a+T} f(x)\, dx + \int_{a+T}^{T} f(x)\, dx;$$

l'ultimo addendo si scrive $-\int_T^{a+T} f(x)\, dx = -\int_0^a f(T + \xi)\, d\xi = -\int_0^a f(\xi)\, d\xi$. Abbiamo effettuato il cambiamento di variabile $x = T + \xi$ e abbiamo sfruttato la periodicità di f.

3.2-5. Utilizzare il lemma di Riemann-Lebesgue per dimostrare che si ha, per ogni $\delta > 0$,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\delta}^{\pi} D_n(t)\,dt = 0.$$

Dedurne che

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{-\delta}^{\delta} D_n(t)\,dt = 1.$$

SOLUZIONE. Basta osservare che la funzione $t \mapsto 1/\sin(t/2)$ è continua, dunque sommabile, sugli intervalli $[\delta,\pi]$ e $[-\pi,-\delta]$.

3.2-6. Dal risultato

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots$$

ottenuto nell'esempio 3.2-2, dedurre che

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}.$$

SUGGERIMENTO ▷ Detta s la somma della serie considerata, la somma della serie costituita dai termini di indice pari vale $s/4$: $\sum_{k=1}^{\infty} 1/(2k)^2 = s/4$.
SOLUZIONE. Infatti si ha $s = s/4 + \pi^2/8$, da cui il valore di s indicato nel testo.

3.2-7. Se $g(x) := |\,x\,|$ è la funzione dell'esempio 3.2-2, e $f(x) := \mathrm{sign}(x)$ è la funzione dell'esempio 3.2-1, si ha $g'(x) = f(x)$ per ogni $x \neq k\pi$, con k intero. Se i coefficienti di Fourier di g vengono ancora indicati con i simboli a_n e b_n, mentre i coefficienti analoghi di f vengono ribattezzati a'_n, b'_n, verificare che gli sviluppi di Fourier di $f = g'$ e di g possono essere dedotti l'uno dall'altro in base alle formule $a'_n = n\,b_n$, $b'_n = -n\,a_n$.
SOLUZIONE. Basta ricordare (v. esempi citati) che

$$a_n = \quad b_n = 0, \quad a'_n = 0 \quad b'_n = .$$

3.2-8. Sia $f(x) := 0$, $-\pi < x < 0$, $f(x) := 1$, $0 < x < \pi$. Verificare che si ha

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} dt = 1,$$

$a_n = 0$, per ogni $n > 0$, mentre

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin nt\,dt = \begin{cases} 0, & \text{per } n \text{ pari},\\ 2/(n\pi), & \text{per } n \text{ dispari}.\end{cases}$$

In definitiva

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)}\sin\big((2k+1)x\big) = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\Big(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \dots\Big). \end{aligned}$$

Si osservi che la funzione $f(x) - 1/2$ è la metà della funzione $\mathrm{sign}(x)$ dell'esercizio precedente, e ciò giustifica il risultato che abbiamo ottenuto.
SOLUZIONE. Si tratta di calcolare, per $n \geq 1$, l'integrale

$$\int_0^{\pi} \sin nt\,dt = \Big[\frac{-\cos nt}{n}\Big]_0^{\pi} = \frac{1-(-1)^n}{n} = \begin{cases} 0, & \text{per } n \text{ pari},\\ 2/n, & \text{per } n \text{ dispari}.\end{cases}$$

3.2-9. Sia f la funzione periodica dispari che vale 1 per $b < x < \pi - b$, con $0 < b < \pi/2$, e si annulla nei restanti punti dell'intervallo $[0,\pi]$. Verificare il seguente sviluppo in serie di Fourier:

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\Big(\cos b \sin x + \frac{\cos 3b}{3}\sin 3x + \frac{\cos 5b}{5}\sin 5x + \dots\Big).$$

Si osservi che per $b \to 0$ si ottiene lo sviluppo della funzione $\operatorname{sign}(x)$ (↑ Esempio 3.2-1).

SOLUZIONE. Si ha

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\,\sin(nt)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_b^{\pi-b} \sin(nt)\,dt =$$
$$= \frac{2}{\pi n}\big[\cos(nb) - \cos\big(n(\pi-b)\big)\big].$$

Ma le formule di addizione forniscono

$$\cos\big(n(\pi-b)\big) = \cos(n\pi)\cos(nb) = (-1)^n\cos(nb),$$

quindi i coefficienti b_n sono nulli per n pari, valgono $4\cos(nb)/(\pi n)$ per n dispari.

3.2-10. Verificare le uguaglianze

$$\int_0^{\pi} t\,\sin kt\,dt = \frac{\pi}{k}\,(-1)^{k+1}; \qquad \int_0^{\pi} t\,\cos kt\,dt = \begin{cases} 0, & \text{per } k \text{ pari}, \\ -2/k^2, & \text{per } k \text{ dispari}; \end{cases}$$

$$\int_0^{\pi} t^2\,\cos kt\,dt = \frac{2\pi}{k^2}\,(-1)^k.$$

SOLUZIONE. Basta fare un'integrazione per parti (per i primi due integrali) e due integrazioni per parti per l'utimo integrale. In realtà, dopo aver eseguito un'integrazione per parti sull'ultimo integrale ci si riporta al primo dei tre integrali considerati.

3.2-11. Dimostrare che si ha

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}$$

in base alle seguenti considerazioni:

i) l'integrale in questione esiste come integrale generalizzato semplicemente (ma non assolutamente) convergente, in virtù del criterio di convergenza di Dirichlet: esso afferma che l'integrale generalizzato

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^{x} f(t)g(t)\,dt$$

esiste finito se f è dotata di una primitiva limitata (nel nostro caso è la funzione $-\cos t$) e g è monotona e decrescente a 0 all'infinito (nel nostro caso è la funzione $t \mapsto 1/t$);

ii) si ha, per ogni n,

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin\big((n+1/2)t\big)}{2\,\sin(t/2)}\,dt = \frac{\pi}{2};$$

iii) si ha

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{2\,\sin(t/2)} - \frac{1}{t}\right)\sin\big((n+1/2)t\big)\,dt = 0$$

(dimostrare che la funzione entro parentesi tonde tende a 0 per $t \to 0$);

iv) infine

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin\,(n+1/2)t}{t}\,dt = \int_0^{(n+1/2)\pi} \frac{\sin x}{x}\,dt.$$

SOLUZIONE. L'identità *ii*)

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin\big((n+1/2)t\big)}{2\,\sin(t/2)}\,dt = \frac{\pi}{2};$$

è stata stabilita come una delle proprietà del nucleo di Dirichlet (↑ formula (5), par. 3.2). Per la *iii*) si tratta di applicare il Lemma di Riemann-Lebesgue alla funzione

$$t \mapsto \frac{1}{2\,\sin(t/2)} - \frac{1}{t} = \frac{t - 2\,\sin(t/2)}{2t\,\sin(t/2)}.$$

Ora si ha

$$t - 2\,\sin(t/2) = \frac{t^3}{24} + O(t^4), \qquad 2t\,\sin(t/2) = t^2 + O(t^3), \quad t \to 0$$

quindi la funzione in esame è prolungabile con continuità nell'origine, ponendola uguale a 0. Combinando la *ii*) con la *iii*) si ottiene

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^\pi \frac{\sin\big((n+1/2)t\big)}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}.$$

Infine, per verificare la *iv*) basta operare il cambiamento di variabile $(n+1/2)t = x$.

3.3. Serie di Fourier: convergenza uniforme

3.4. Serie di Fourier: convergenza in media quadratica

3.4-1. Verificare il seguente sviluppo in serie per la funzione $f(x) := |\cos x|$:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{1\cdot 3} - \frac{\cos 4x}{3\cdot 5} + \frac{\cos 6x}{5\cdot 7} + \dots\right).$$

SOLUZIONE. Si trova

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi |\cos x|\,dx = \frac{2}{\pi}\Big[\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx - \int_{\pi/2}^{\pi} \cos x\,dx\Big] = \\ = \frac{4}{\pi}.$$

Per $n \geq 1$ si ha analogamente

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi |\cos x| \cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\Big[\int_0^{\pi/2} \cos x \cos nx\,dx - \int_{\pi/2}^{\pi} \cos x \cos nx\,dx\Big].$$

Per $n = 1$ la funzione integranda ammette la primitiva $x \mapsto (x = \sin x \cos x)/2$, da cui segue facilmente $a_1 = 0$. Per $n > 1$, con due integrazioni per parti si ottiene la primitiva

$$x \mapsto \frac{\sin x \cos nx - n \cos x \sin nx}{n^2 - 1},$$

da cui segue

$$a_n = \begin{cases} -\dfrac{4}{\pi}\,\dfrac{(-1)^{n/2}}{(n-1)(n+1)}, & \text{per } n \text{ pari },\\ 0, & \text{per } n \text{ dispari.}\end{cases}$$

3.4-2. Per la funzione $f(x) := \max\{0, \cos x\} = (\cos x)^+$ verificare lo sviluppo:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{\cos x}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{1\cdot 3} - \frac{\cos 4x}{3\cdot 5} + \frac{\cos 6x}{5\cdot 7} + \dots\right).$$

Fare un calcolo diretto, oppure sfruttare il fatto che $(\cos x)^+ = (\cos x + |\cos x|)/2$.

Verificare la convergenza totale, dunque uniforme, della serie scritta; stessa questione per la serie del precedente esercizio.

SOLUZIONE. Sommando $\cos x$ allo sviluppo precedentemente ottenuto e dividendo per 2, si ottiene quanto richiesto. Si può osservare che tanto la funzione $x \mapsto |\cos x|$ quanto la funzione $x \mapsto (\cos x)_+$ verificano le ipotesi della Proposizione 3.3-1.

3.4-3. Se $a > 0$ è una costante *non intera*, verificare il seguente sviluppo in serie uniformemente convergente:

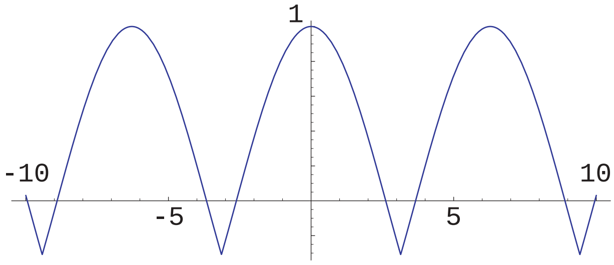
$$\cos ax = \frac{2\sin a\pi}{\pi}\left[\frac{1}{2a} + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{a}{a^2-k^2}\cos kx\right].$$

Dedurne il seguente sviluppo (in serie non uniformemente convergente)

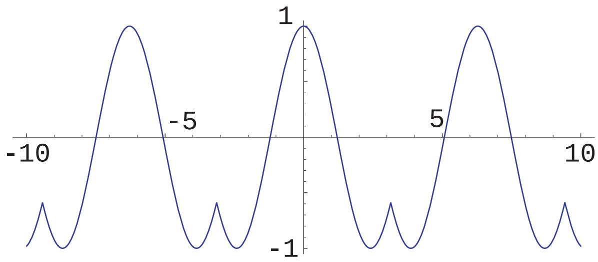
$$\sin ax = \frac{2\sin a\pi}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{k}{a^2-k^2}\sin kx,$$

sfruttando i legami tra i coefficienti di Fourier di una funzione ed i coefficienti analoghi della sua derivata.

SOLUZIONE. S'intende che la funzione f è 2π-periodica e vale $\cos ax$ per $|x| \le \pi$.



La figura sopra mostra il caso $a = 0.6$, mentre quella sotto mostra il caso $a = 1.3$



Si ha

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos at\,dt = \frac{2}{\pi a}\big[\sin at\big]_0^{\pi} = \frac{2\sin a\pi}{\pi a}$$

Per ogni $k \ge 1$ si ha poi

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos at\,\cos kt\,dt = \frac{2}{\pi}I_k.$$

L'integrale I_k può essere calcolato mediante le formule di Werner, oppure con due integrazioni per parti. Seguendo quest'ultimo metodo si ha

$$\begin{aligned} I_k &= \left[\cos at\,\frac{\sin kt}{k}\right]_0^{\pi} + \frac{a}{k}\int_0^{\pi}\sin at\,\sin kt\,dt = \\ &= \frac{a}{k}\left\{-\left[\sin at\,\frac{\cos kt}{k}\right]_0^{\pi} + \frac{a}{k}\int_0^{\pi}\cos at\,\cos kt\,dt\right\} = \\ &= -a\sin a\pi\,\frac{(-1)^k}{k^2} + \frac{a^2}{k^2}I_k, \end{aligned}$$

da cui segue

$$I_k = a\sin a\pi\,\frac{(-1)^k}{a^2-k^2} \quad \Longrightarrow \quad a_k = \frac{2a\sin a\pi}{\pi}\,\frac{(-1)^k}{a^2-k^2}.$$

La funzione f verifica le ipotesi della Prop. 3.3-1. Si osservi che $a_k = O(1/k^2)$. Essendo poi

$$\sin ax = -\frac{1}{a}(\cos ax)',$$

i coefficienti b_k dello sviluppo della funzione $\sin ax$ si ottengono dai coefficienti a_k dello sviluppo di $\cos ax$ moltiplicandoli per il fattore k/a.

3.4-4. Dall'identità

$$(\boldsymbol{x} \,|\, \boldsymbol{y}) := \frac{1}{4}\left[\, \|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 - \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2 + i\,\|\boldsymbol{x}+i\boldsymbol{y}\|^2 - i\,\|\boldsymbol{x}-i\boldsymbol{y}\|^2 \,\right]$$

valida in ogni s.v. complesso con prodotto scalare, dedurre che se $\phi : V_1 \to V_2$ (V_1, V_2 s.v. complessi) è un'isometria lineare, cioè

$$\|\phi(\boldsymbol{x})\|_2 = \|\boldsymbol{x}\|_1$$

per ogni $\boldsymbol{x} \in V_1$, allora ϕ conserva i prodotti scalari:

$$\big(\phi(\boldsymbol{x}) \,|\, \phi(\boldsymbol{y})\big)_2 = (\boldsymbol{x} \,|\, \boldsymbol{y})_1,$$

per ogni $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V_1$. (Gli indici in basso stanno a specificare che si tratta dei prodotti scalari e delle norme negli spazi V_1 e V_2 rispettivamente.)

SOLUZIONE. L'identità precedente, scritta in corrispondenza dei vettori $\phi(\boldsymbol{x})$ e $\phi(\boldsymbol{y})$, fornisce infatti

$$\begin{aligned}\big(\phi(\boldsymbol{x}) \,|\, \phi(\boldsymbol{y})\big)_2 &= \frac{1}{4}\left[\, \|\phi(\boldsymbol{x})+\phi(\boldsymbol{y})\|^2 - \|\phi(\boldsymbol{x})-\phi(\boldsymbol{y})\|^2 + \right.\\ &\quad \left. + i\,\|\phi(\boldsymbol{x})+i\phi(\boldsymbol{y})\|^2 - i\,\|\phi(\boldsymbol{x})-i\phi(\boldsymbol{y})\|^2 \,\right] = \\ &= \frac{1}{4}\left[\, \|\phi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\|^2 - \|\phi(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\|^2 + \right.\\ &\quad \left. + i\,\|\phi(\boldsymbol{x}+i\boldsymbol{y})\|^2 - i\,\|\phi(\boldsymbol{x}-i\boldsymbol{y})\|^2 \,\right] = \\ &= \frac{1}{4}\left[\, \|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 - \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2 + i\,\|\boldsymbol{x}+i\boldsymbol{y}\|^2 - i\,\|\boldsymbol{x}-i\boldsymbol{y}\|^2 \,\right] = \\ &= (\boldsymbol{x} \,|\, \boldsymbol{y})_1\end{aligned}$$

3.4-5. Applicando l'identità di Parseval allo sviluppo

$$|\, x \,| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{1}{3^2}\cos 3x + \frac{1}{5^2}\cos 5x + \cdots \right)$$

dedurre l'uguaglianza

$$\sum_{k\,\geq\,0} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$$

Con un ragionamento simile a quello svolto nell'esercizio 3.2-6, dedurne che

$$\sum_{n\,\geq\,1} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

SOLUZIONE. Si ha

$$\|f\|_2^2 = 2\int_0^{\pi} x^2\,dx = \frac{2}{3}\,\pi^3.$$

L'identità di Parseval si scrive

$$\pi\left[\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k\geq 1} |a_k|^2\right] = \|f\|_2^2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \pi\left[\frac{\pi^2}{2} + \frac{16}{\pi^2}\sum_{k\geq 0}\frac{1}{(2k+1)^4}\right] = \frac{2}{3}\,\pi^3,$$

da cui

$$\frac{16}{\pi^2}\sum_{k\geq 0}\frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^2}{6} \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{k\geq 0}\frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

Si ha poi

$$s := \sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^4} = \sum_{k\geq 0}\frac{1}{(2k+1)^4} + \sum_{k\geq 1}\frac{1}{(2k)^4} = \frac{\pi^4}{96} + \frac{1}{16}\,s,$$

da cui segue subito il valore fornito per s.

3.4-6. Applicando l'identità di Parseval allo sviluppo

$$\operatorname{sgn}(x) = \frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \cdots\right)$$

dedurre l'uguaglianza

$$\sum_{k\geq 0}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Soluzione. Si ha

$$\|f\|_2^2 = \int_{-\pi}^{\pi} 1\,dx = 2\pi.$$

L'identità di Parseval si scrive

$$\pi\sum_{k\geq 1}|b_k|^2 = \|f\|_2^2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \pi\,\frac{16}{\pi^2}\sum_{k\geq 0}\frac{1}{(2k+1)^2} = 2\pi$$

da cui segue subito il risultato.

3.4-7. Applicando l'identità di Parseval allo sviluppo

$$x = 2\left(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \cdots\right)$$

dedurre l'uguaglianza

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Soluzione. Si ha

$$\|f\|_2^2 = \int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx = \frac{2}{3}\,\pi^3.$$

L'identità di Parseval si scrive

$$4\pi\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2} = \frac{2}{3}\,\pi^3,$$

da cui segue subito il risultato.

3.4-8. Applicando l'identità di Parseval allo sviluppo

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\cos x - \frac{1}{2^2}\cos 2x + \frac{1}{3^2}\cos 3x - \cdots\right)$$

dedurre l'uguaglianza

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Soluzione. Si ha

$$\|f\|_2^2 = \int_{-\pi}^{\pi} x^4\,dx = \frac{2}{5}\,\pi^5.$$

L'identità di Parseval si scrive

$$\pi\left[\frac{4\pi^4}{18} + 16\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^4}\right] = \frac{2}{5}\,\pi^5 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 16\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^4} = \frac{8\pi^4}{45},$$

da cui segue subito il risultato.

3.5 Serie di Fourier: ulteriori risultati

3.5-1. Sia $x \mapsto f(x)$ una funzione periodica di periodo T, avente coefficienti di Fourier c_k, $k \in \mathbb{Z}$. Verificare che la funzione $x \mapsto f(x - x_0)$ ha coefficienti di Fourier $e^{-ik\omega x_0}\,c_k$.

SOLUZIONE. Per il coefficiente di Fourier della funzione in esame, sia γ_k, abbiamo

$$\gamma_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(x-x_0)\, e^{-ik\omega x}\, dx = \frac{1}{T} e^{-ik\omega x_0}\int_0^T f(t)\, e^{-ik\omega t}\, dt = e^{-ik\omega x_0}\, c_k.$$

Abbiamo effettuato il cambiamento di variabile $x - x_0 = t$ e abbiamo tenuto conto del fatto che l'integrale di una funzione T-periodica su un intervallo di lunghezza T è invariante rispetto alla collocazione dello stesso intervallo (↑ esercizio 3.2-4). In particolare si ha $|\gamma_k| = |c_k|$, per ogni k.

3.5-2. Dedurre dal precedente esercizio che le funzioni $x \mapsto f(x)$ e $x \mapsto f(x - x_0)$ hanno lo stesso spettro di ampiezza.

SOLUZIONE. Dalle relazioni $A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$, $c_k(a_k - ib_k)/2$, segue $|A_k| = 2|c_k|$. Dunque lo spettro di ampiezza dipende esclusivamente dai valori assoluti dei coefficienti di Fourier.

3.5-3. Sia f una funzione periodica di periodo T, avente coefficienti di Fourier c_k, $k \in \mathbb{Z}$. Dimostrare che se $\overline{f(t)} = f(-t)$ (proprietà di *simmetria hermitiana*), dunque in particolare se f è reale pari, allora i coefficienti di Fourier sono reali: $\overline{c_k} = c_k$.

SUGGERIMENTO ▷ Scrivere $\overline{c_k}$ sotto forma integrale e cambiare di segno la variabile d'integrazione.

SOLUZIONE. Seguendo il suggerimento si trova

$$\overline{c_k} = \frac{1}{T}\int_0^T \overline{f(t)}\, e^{ik\omega t}\, dt = \frac{1}{T}\int_0^T \overline{f(-x)}\, e^{-ik\omega x}\, dx = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\, e^{-ik\omega x}\, dx =$$
$$= c_k.$$

ESERCIZI PROPOSTI

3.P-1. Calcolare la somma della serie trigonometrica

$$\sum_{n\geq 0} \frac{\cos nx}{2^n}$$

ni a partire dalla serie geometrica

$$\sum_{n\geq 0} \frac{e^{inx}}{2^n}.$$

SOLUZIONE. La somma della serie trigonometrica è la arte reale della somma della serie geometrica

$$\sum_{n\geq 0} \left(\frac{e^{ix}}{2}\right)^n;$$

poiché la ragione di tale serie ha come valore assoluto $1/2$, essa converge alla somma

$$\frac{1}{1 - e^{ix}/2} = \frac{2}{2 - e^{ix}} = \frac{2}{(2 - \cos x) - i \sin x}.$$

La parte reale della somma calcolata vale

$$\frac{4 - 2\cos x}{5 - 4\cos x}.$$

3.P-2. Calcolare lo sviluppo in serie di Fourier della funzione periodica di periodo 2π, la cui restrizione all'intervallo $[-\pi, \pi]$ vale x per $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$, e vale 0 altrimenti (fare uno schizzo).

A quale valore converge la serie di Fourier per $x = \pi/2$?

SOLUZIONE. Poiché f è una funzione dispari, avremo uno sviluppo del tipo

$$f(x) = \sum_{n\geq 1} b_n \sin nx.$$

Le condizioni di Dini sono soddisfatte per $x = \pi/2$, quindi la somma della serie in tale punto vale $\pi/4$:

$$\sum_{n\geq 1} b_n \sin(n\pi/2) = \pi/4$$

cioè

$$\sum_{k\geq 0} b_{2k+1} \sin((2k+1)\pi/2) = \sum_{k\geq 0} b_{2k+1}(-1)^k = \pi/4. \qquad (*)$$

Abbiamo tenuto conto del fatto che $\sin(n\pi/2)$ è nullo per n pari, vale $(-1)^k$ per $n = 2k+1$.

Per i coefficienti b_n abbiamo, con un'integrazine per parti,

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} x \sin nx\, dx = -\frac{\cos(n\pi/2)}{n} + \frac{2}{\pi}\,\frac{\sin(n\pi/2)}{n^2}.$$

Separando i casi n pari e n dispari, avremo duque

$$b_{2k} = \frac{(-1)^{k+1}}{2k}, \qquad b_{2k+1} = \frac{2}{\pi}\,\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}.$$

Sostituendo nella (*) si trova dunque

$$\frac{2}{\pi}\sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}(-1)^k = \frac{\pi}{4} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sum_{k\geq 0}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8},$$

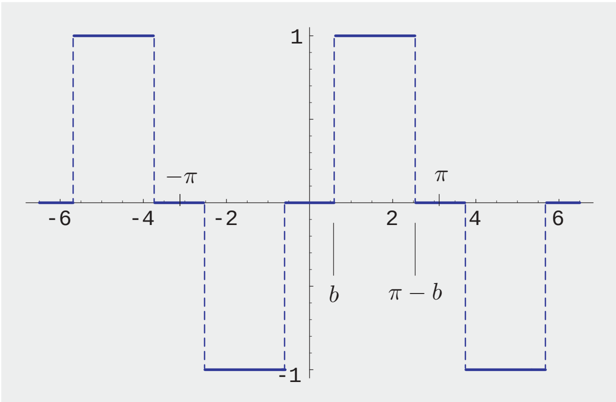
risultato già ottenuto (v. esercizio 3.4-6).

Si veda anche il notebook

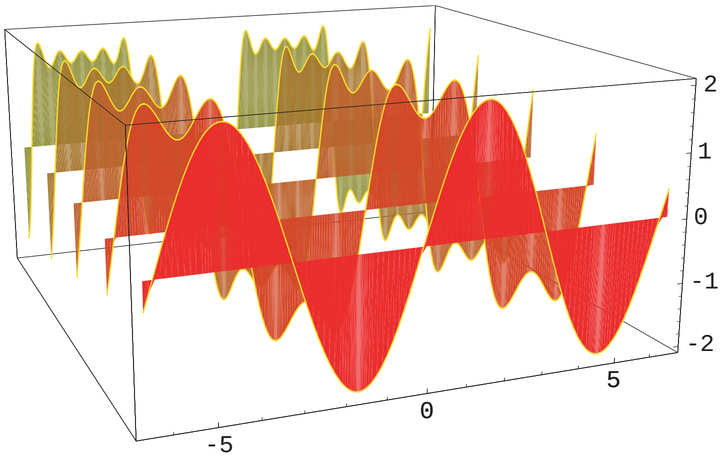
`http://eulero.ing.unibo.it/~barozzi/MI2/Mathematica/Mathematica-3.2.nb`

Un elenco di sviluppi in serie di Fourier in forma visuale

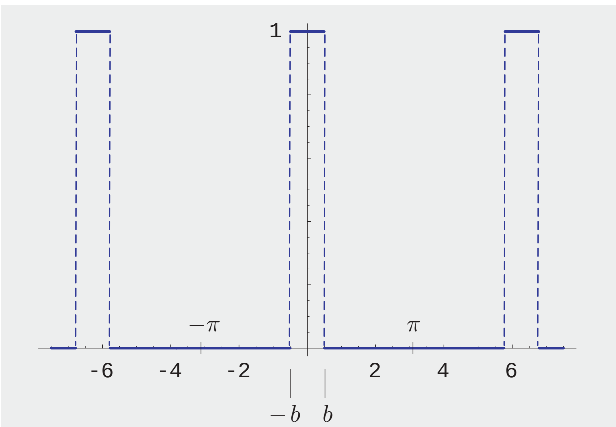
1. $f(x) = \dfrac{4}{\pi}\left[\cos b \,\sin x + \dfrac{\cos 3b}{3}\,\sin 3x + \dfrac{\cos 5b}{5}\,\sin 5x + \dots\right]$



La restrizione di f all'intervallo $[-\pi, \pi]$ si scrive $\chi_{[b,\pi-b]}(x) \cdot \operatorname{sgn}(x)$, con $0 \le b < \pi/2$. Per $b = 0$ si ottiene lo sviluppo della funzione segno. La figura seguente mostra i primi cinque polinomi di Fourier di ordine dispari della funzione segno.

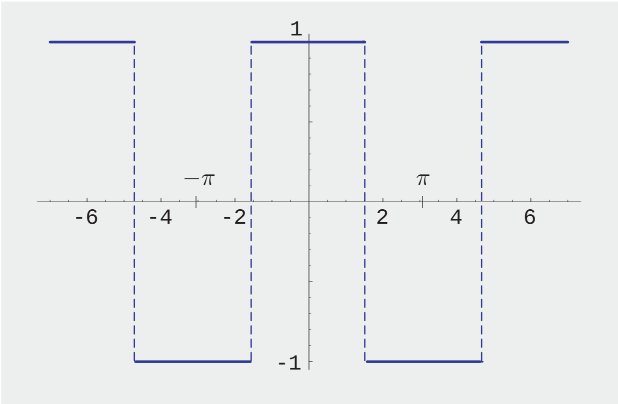


2. $f(x) = \dfrac{2}{\pi}\left[\dfrac{b}{2} + \sin b \,\cos x + \dfrac{\sin 3b}{3}\,\cos 3x + \dfrac{\sin 5b}{5}\,\cos 5x + \dots\right]$ (esempio 3.5-1)



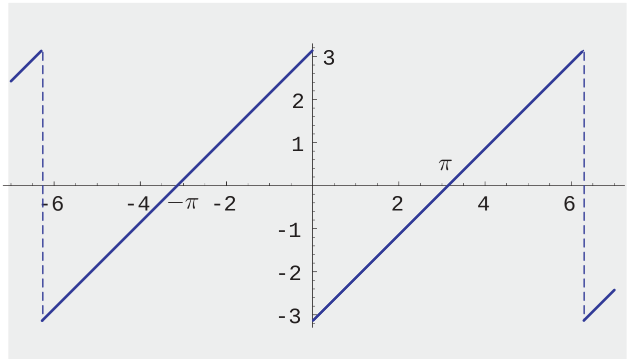
La restrizione di f all'intervallo $[-\pi, \pi]$ si scrive $\chi_{[-b,b]}(x)$.

3. $f(x) = \dfrac{4}{\pi}\Big[\cos x - \dfrac{\cos 3x}{3} + \dfrac{\cos 5x}{5} - \dfrac{\cos 7x}{7} + \dots\Big]$

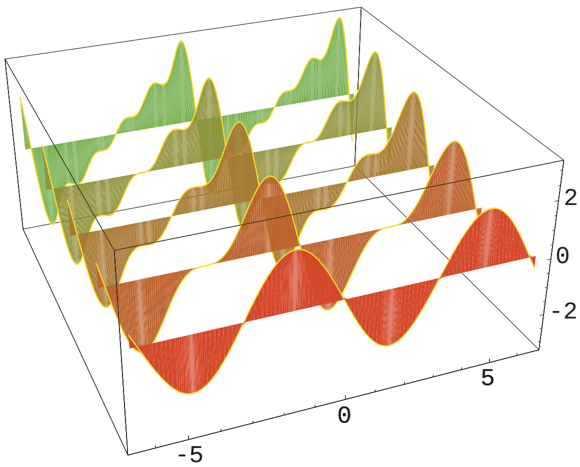


La restrizione di f all'intervallo $[-\pi, \pi]$ si scrive $\operatorname{sgn}(\pi/2 - |x|)$.

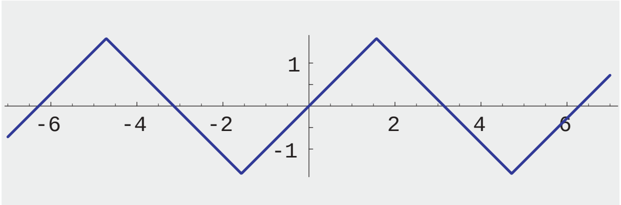
4. $f(x) = -2\Big[\sin x + \dfrac{\sin 2x}{2} + \dfrac{\sin 3x}{3} + \dots\Big]$ (↓ grafico monometrico)



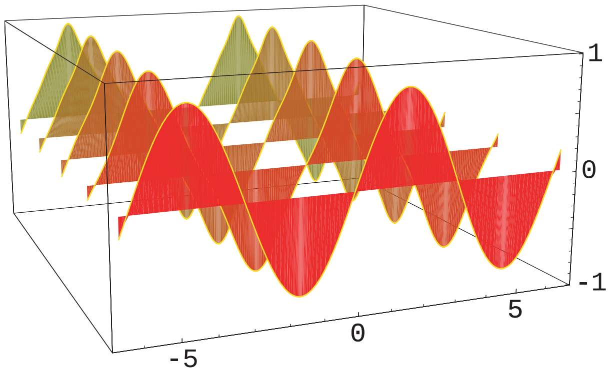
La restrizione di f all'intervallo $[-\pi, \pi]$ si scrive $x - \operatorname{sgn}(x) \cdot \pi$. La figura seguente mostra i primi cinque polinomi di Fourier della funzione considerata.



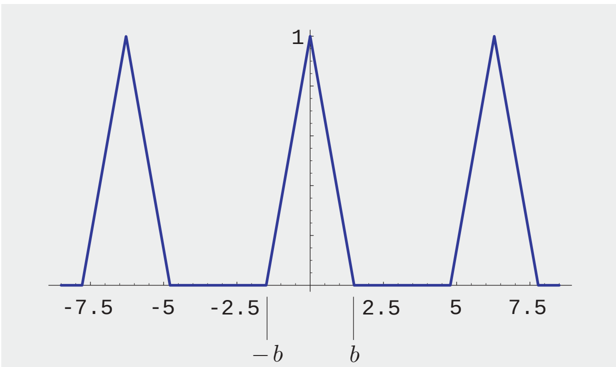
5. $f(x) = \dfrac{8}{\pi^2}\left[\sin x - \dfrac{\sin 3x}{3^2} + \dfrac{\sin 5x}{5^2} + \dots\right]$ (↓ grafico monometrico)



La restrizione di f all'intervallo $[-\pi, \pi]$ vale x per $|x| \leq \pi/2$, vale $\operatorname{sgn}(x) \cdot \pi - x$ per $\pi/2 \leq |x| \leq \pi$. La figura seguente mostra i primi cinque polinomi di Fourier della funzione considerata.



6. $f(x) = \dfrac{b}{2\pi} + \dfrac{2}{\pi^2}\left[(1 - \cos b)\, \cos x + \dfrac{1 - \cos 2b}{2^2}\, \cos 2x + \dfrac{1 - \cos 3b}{3^2}\, \cos 3x + \dots\right]$

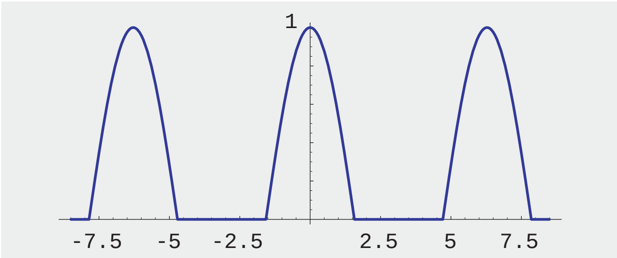


La restrizione di f all'intervallo $[-\pi, \pi]$ vale $(1 - |x/b|)^+ = \max\{1 - |x/b|, 0\}$.

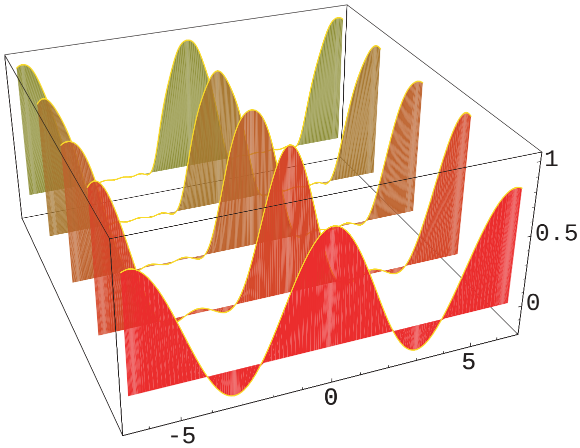
7. $f(x) = (\cos x)^+ = \max\{0, \cos x\} =$

$$= \frac{1}{\pi} + \frac{\cos x}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{1 \cdot 3} - \frac{\cos 4x}{3 \cdot 5} + \frac{\cos 6x}{5 \cdot 7} + \dots\right).$$

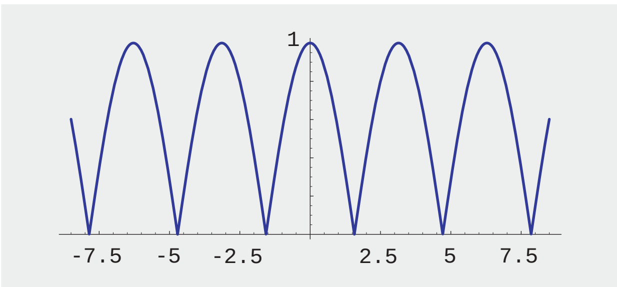
(esempio 3.4-2)



La figura seguente mostra i primi cinque polinomi di Fourier della funzione f.



8. $f(x) = |\cos x| = \dfrac{2}{\pi} + \dfrac{4}{\pi}\left(\dfrac{\cos 2x}{1\cdot 3} - \dfrac{\cos 4x}{3\cdot 5} + \dfrac{\cos 6x}{5\cdot 7} + \dots\right).$ (esempio 3.4-1)



La figura seguente mostra i primi cinque polinomi di Fourier della funzione f.