4. Funzioni di variabile complessa Esercizi

[Revisione: dicembre 2007]

`http://www.ciram.unibo.it/~barozzi/MI2/PDF/MI2-Cap.4-Ese.pdf`

4.1. Il campo complesso

4.2. Funzioni di una variabile complessa

4.3. Funzioni olomorfe

4.3-1. Vogliamo verificare che, per ogni $z = x + iy \in \mathbb{C}$, si ha

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x+iy}{n}\right)^n = e^x(\cos y + i\sin y).$$

Si tratta di verificare che il modulo del primo membro tende a e^x, il suo argomento tende a y. Utilizzeremo i seguenti risultati (che supporremo noti):

a) se (a_n) è una successione reale che tende al limite a, allora

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a_n}{n}\right)^n = e^a;$$

b) $\lim_{t\to 0}(\arctan t)/t = 1$.

La dimostrazione può essere articolata nei seguenti punti. Si ha

$$\left|1+\frac{x+iy}{n}\right| = \left(1+\frac{2x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}\right)^{1/2},$$

da cui

$$\left|\left(1+\frac{x+iy}{n}\right)^n\right| = \left[1+\frac{1}{n}\left(2x+\frac{x^2+y^2}{n}\right)\right]^{n/2},$$

dove l'ultima quantità tende a $e^{2x/2} = e^x$, in virtù del punto a).
Poiché la parte reale di $1 + (x + iy)/n$ tende a 1, essa è positiva per tutti gli n abbastanza grandi, quindi

$$\operatorname{Arg}\big(1+(x+iy)/n\big) = \arctan\frac{(y/n)}{(n+x)/n} = \arctan\frac{y}{n+x}.$$

Ne segue

$$\arg\left(1+\frac{x+iy}{n}\right)^n = n\operatorname{Arg}\left(1+\frac{x+iy}{n}\right) = n\,\arctan\frac{y}{n+x};$$

a questo punto basta fare il limite dell'ultima quantità per $n \to \infty$, sfruttando il punto b).

Soluzione. La soluzione è già contenuta nel testo. Ci limitiamo ad osservare che

$$\operatorname{Arg}\left(1+\frac{x+iy}{n}\right) = \operatorname{Arg}\left(\frac{n+x}{n}+i\,\frac{y}{n}\right) = \arctan\left(\frac{y}{n}\cdot\frac{n}{n+x}\right),$$

e

$$n \arctan \frac{y}{x+n} = \frac{ny}{n+x} \cdot \frac{n+x}{y} \arctan \frac{y}{n+x}.$$

4.3-2. La formula di De Moivre (↑ formula (8) del paragrafo 4.1) si può scrivere $\cos nt = (c + is)^n$, avendo posto $c := \cos t$ e $s := \sin t$. Supposto $n \geq 2$, si sviluppi il secondo membro con la formula del binomio e si uguaglino a primo e a secondo membro le parti reali, ottenendo l'identità

$$\cos nt = \sum_{0 \leq k \leq n/2} \binom{n}{2k} (-1)^k c^{n-2k} s^{2k}.$$

Tenendo presente che $s^2 = 1 - c^2$, si deduca che $\cos nt$ si può scrivere sotto forma di polinomio di grado n nella variabile c:

$$\cos nt = \sum_{0 \leq k \leq n/2} \binom{n}{2k} (-1)^k c^{n-2k} (1 - c^2)^k =: T_n(c).$$

T_n è pari per n pari, dispari per n dispari. Si verifichino le formule:

$$T_1(c) = c,$$
$$T_2(c) = 2c^2 - 1,$$
$$T_3(c) = 4c^3 - 3c,$$
$$T_4(c) = 8c^4 - 8c^2 + 1.$$

I polinomi T_n sono noti come *polinomi di Čebyšev*, dal nome del matematico russo P.L. Čebyšev (1821-1894). Ritroveremo questi polinomi nell'esempio 8.1-4.

SOLUZIONE. Limitiamoci a verificare l'espressione di T_4:

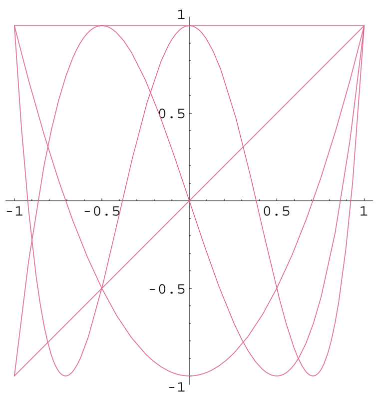
$$\begin{aligned} T_4(c) &= \sum_{0 \leq k \leq 2} \binom{4}{2k} (-1)^k c^{4-2k} (1 - c^2)^k = \\ &= \binom{4}{0} c^4 - \binom{4}{2} c^2 (1 - c^2) + \binom{4}{4} (1 - c^2)^2 = \\ &= c^4 - 6(c^2 - c^4) + 1 + c^4 - 2c^2 = 8c^4 - 8c^2 + 1. \end{aligned}$$

4.3-3. Osservato che l'uguaglianza $x = \cos t$, per $x \in [-1, 1]$ equivale a $t = \arccos x$, si ottenga l'uguaglianza

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad x \in [-1, 1],$$

e da questa le relazioni $T_n(1) = 1$, $T_n(-1) = (-1)^n$.

SOLUZIONE. Basta osservare che $\arccos 1 = 0$, $\arccos(-1) = \pi$, e che $\cos 0 = 1$, $\cos(n\pi) = (-1)^n$.



I polinomi di Čebyšev di grado non superiore a 4.

4.3-4. A partire dalle formule di addizione

$$\cos\big((n+1)t\big) = \cos nt\,\cos t - \sin nt\,\sin t,$$
$$\cos\big((n-1)t\big) = \cos nt\,\cos t + \sin nt\,\sin t$$

si deduca la relazione ricorrente

$$\cos\big((n+1)t\big) = 2\cos nt\,\cos t - \cos\big((n-1)t\big),$$

e da questa la relazione

$$T_{n+1}(x) = 2x\,T_n(x) - T_{n-1}(x).$$

Essa consente il calcolo dei polinomi di Čebyšev, a partire dai termini iniziali $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$.

Soluzione. Sommando membro a membro le due formule di addizione si ottiene la formula

$$\cos\big((n+1)t\big) = 2\cos nt\,\cos t - \cos\big((n-1)t\big);$$

basta poi ricordare che, ove si ponga $t := \arccos x$, si ha $T_n(x) := \cos(nt)$.

4.3-5. Si verifichi che la successione $n \mapsto \cos nt$ è ortogonale su $L^2\big([0,\pi]\big)$:

$$\int_0^\pi \cos nt\,\cos mt\,dt = \begin{cases} 0, & \text{se } n \neq m, \\ \pi, & \text{se } n = m = 0, \\ \pi/2, & \text{se } n = m > 0. \end{cases}$$

Operando il cambiamento di variabile $t = \arccos x$, $x \in [-1,1]$, si ottengano le relazioni

$$\int_{-1}^1 \frac{T_n(x)\,T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \begin{cases} 0, & \text{se } n \neq m, \\ \pi, & \text{se } n = m = 0, \\ \pi/2, & \text{se } n = m > 0. \end{cases}$$

Esse esprimono ortogonalità dei polinomi di Čebyšev sull'intervallo $[-1,1]$, rispetto alla funzione peso $x \mapsto 1/\sqrt{1-x^2}$.

Soluzione. Per verificare le prime identità si può ricorrere alle cosiddette formule di Werner (PCAM, esercizio 2.4-9):

$$\cos nt\,\cos mt = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{n+m}{2}\,t\right) + \cos\left(\frac{n-m}{2}\,t\right)\right].$$

Le seconde identità si riportano alle prime mediante il cambiamento di variabile $x = \cos t$.

4.3-6. Verificare, mediante un calcolo diretto, l'uguaglianza

$$|\sin z\,|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y.$$

Determinare gli zeri della funzione seno in $\mathbb{C}$. Determinare l'uguaglianza analoga per la funzione $\cos z$.

Soluzione. Se $z = x + iy$, si ha $iz = -y + ix$, da cui

$$\begin{aligned}\sin z &= \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) = \frac{1}{2i}\big(e^{-y}(\cos x + i\sin x) - e^{y}(\cos x - i\sin x)\big) = \\ &= \frac{1}{2i}\big(i\sin x\,(e^{y} + e^{-y}) + \cos x\,(e^{-y} - e^{y})\big) = \\ &= \sin x\cosh y + i\cos x\sinh y.\end{aligned}$$

Ne segue

$$\begin{aligned}|\sin z\,|^2 &= \sin^2 x\cosh^2 y + \cos^2 x\sinh^2 y = \\ &= \sin^2 x\cosh^2 y + (1 - \sin^2 x)\sinh^2 y = \\ &= \sin^2 x\,(\cosh^2 y - \sinh^2 y) + \sinh^2 y = \\ &= \sin^2 x + \sinh^2 y.\end{aligned}$$

Dunque la funzione seno è illimitata in $\mathbb{C}$, in accordo col teorema di Liouville; da $\sin z = 0$ segue $\sin x = \sinh y = 0$, dunque $y = 0$, $x = k\pi$, k intero. In conclusione: gli zeri della funzione seno in campo complesso sono soltanto gli zeri della stessa funzione in campo reale.

In modo analogo si ottiene

$$\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y,$$

da cui $|\cos z|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y$.

Esercizi proposti

4.3-P1. Verificare che l'unica funzione f olomorfa in $\mathbb{C}$ per cui si abbia $f' = f$ e $f(0) = 1$ è la funzione esponenziale $f(z) = f(x, y) = e^x(\cos y + i \sin y)$:

$$\left.\begin{array}{r}\forall z \in \mathbb{C}, f'(z) = f(z) \\ f(0) = 1\end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad f(z) = e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$$

SOLUZIONE. Se $f = u + iv$, dalla uguaglianza $f'(z) = f_x(x, y) = f$ deduciamo $u_x + iv_x = u + iv$, dunque $u_x = u$, $v_x = v$. Per ogni fissato y le funzioni $x \mapsto u(x, y)$ e $x \mapsto v(x, y)$ sono soluzioni dell'equazione differenziale $\varphi'(x) = \varphi(x)$ e pertanto si scrivono

$$u(x, y) = c_1(y)\, e^x, \quad u(x, y) = c_2(y)\, e^x,$$

con c_1 e c_2 funzioni opportune. D'altra parte le condizioni di Cauchy-Riemann forniscono

$$u_x = v_y \iff c_1(y)\, e^x = c_2'(y)\, e^x \iff c_1(y) = c_2'(y),$$

$$u_y = -v_x \iff c_1'(y)\, e^x = -c_2(y)\, e^x \iff c_1'(y) = -c_2(y).$$

Finalmente da $f(0) = 1$ seguono le condizioni iniziali $c_1(0) = 1$, $c_2(0) = 0$. In definitiva c_1 e c_2 sono soluzioni del problema di valori iniziali

$$\begin{array}{l} c_1'(y) = -c_2(y), \\ c_2'(y) = c_1(y), \\ c_1(0) = 1,\ c_2(0) = 0 \end{array}$$

e dunque $c_1(y) = \cos y$, $c_2(y) = \sin y$.

4.3-P2. Data la funzione $u(x, y) = 3x + 4y$, determinare la funzione $v(x, y)$ tale che $v(0, 0) = 0$ e $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ sia intera.

SOLUZIONE. Deve essere $v_y = u_x = 3$, quindi $v(x, y) = 3y + g(x)$, con g funzione da determinare. D'altra parte deve essere anche $v_x = -u_y$, cioè $g'(x) = -4$, da cui $g(x) = -4x + c$. Dunque $v(x, y) = 3y - 4x + c$, e finalmente, per avere $v(0, 0) = 0$,$c = 0$.

In definitiva

$$f(z) = f(x + iy) = 3x + 4y + i(3y - 4x) = 3(x + iy) - 4i(x + iy) = (3 - 4i)z.$$

4.4. Serie di potenze

4.4-1. Dimostrare per induzione la seguente formula per le derivate del prodotto di due funzioni

$$D^n\big(f(z)g(z)\big) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^k f(z)\, D^{n-k} g(z).$$

SOLUZIONE. Per $n = 1$ abbiamo la formula per la derivazione del prodotto:

$$D\big(f(z)g(z)\big) = Df(z)\, g(z) + f(z)\, Dg(z).$$

Procediamo per induzione rispetto a n; se la formula in questione sussiste per un assegnato n abbiamo

$$D^{(n+1)}\big(f(z)g(z)\big) = D\big(D^n\big(f(z)g(z)\big)\big) = D\Big(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} D^k f(z)\, D^{n-k} g(z)\Big) =$$
$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} D^{(k+1)} f(z)\, D^{n-k} g(z) + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} D^k f(z)\, D^{n-k+1} g(z).$$

Se nella prima delle due sommatorie si pone $k+1=h \iff k=h-1$, e successivamente si scrive ancora k al posto di h si ottiene

$$\begin{aligned} &D^{n+1} f(z)g(z) + \sum_{h=1}^{n}\binom{n}{h-1} D^h f(z)\, D^{n+1-h} g(z) + \\ &\qquad + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k} D^k f(z)\, D^{n+1-k} g(z) + f(z)\, D^{n+1} g(z) = \\ &= D^{n+1} f(z)g(z) + \sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right] D^k f(z)\, D^{n+1-k} g(z) + \\ &\qquad + f(z)\, D^{n+1} g(z) = \\ &\qquad = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k} D^k f(z)\, D^{n+1-k} g(z). \end{aligned}$$

Abbiamo sfruttato l'identità

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}.$$

4.4-2. Sia f una funzione olomorfa in un intorno dell'origine e $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n\, z^n$ il suo sviluppo di Taylor in tale intorno. Indichiamo simbolicamente con la scrittura $f \leftrightarrow (a_n)$ la corrispondenza tra la funzione f e la successione (a_n) dei suoi coefficienti di Taylor. Se g è una funzione analoga ad f, e $g(z) = \sum_{n\geq 0} b_n\, z^n$ è il suo sviluppo di Taylor, verificare che:

$$\begin{aligned} f+g &\quad\leftrightarrow\quad (a_n)+(b_n) := (a_n+b_n), \\ \lambda f &\quad\leftrightarrow\quad \lambda(a_n) := (\lambda a_n), \quad \lambda\in\mathbb{C}, \\ f\cdot g &\quad\leftrightarrow\quad (a_n)*(b_n) := \Big(\sum_{k=0}^{n} a_k\, b_{n-k}\Big). \end{aligned}$$

L'operazione che alla coppia di successioni $(a_n), (b_n)$ associa la successione

$$(a_n)*(b_n) = \big(a_0b_0,\ a_0b_1+a_1b_0,\ a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0,\ \dots\ \big),$$

si chiama *convoluzione* tra le successioni date. Verificare che se tali successioni sono *definitivamente nulle* (dunque f e g sono polinomi) si ritrova l'ordinaria moltiplicazione tra polinomi.

SUGGERIMENTO ▷ Si scriva l'identità dell'esercizio precedente nella forma

$$\frac{D^n\big(f(z)g(z)\big)}{n!} = \sum_{k=0}^{n}\frac{D^k f(z)}{k!}\,\frac{D^{n-k} g(z)}{(n-k)!}.$$

SOLUZIONE. L'unico cosa da dimostrare è la terza formula, relativa al prodotto di due funzioni. Basta ricordare che l'n-esimo coefficiente dello sviluppo in serie del prodotto fg è $[D^{(n)}(fg)(0)]/n!$ e applicare il risultato dell'esercizio precedente.

Dunque se f, g, e h sono tre funzioni analitiche in un intorno dell'origine, $f \leftrightarrow (a_n)$, $g \leftrightarrow (b_n)$ e $h \leftrightarrow (c_n)$, ed inoltre $(c_n) = (a_n)*(b_n)$, allora $h = fg$.

4.4-3. Sia $f(z) = e^{z_1 z}$, $g(z) = e^{z_2 z}$, dove z_1 e z_2 sono due numeri complessi ad arbitrio. Verificare che $f(z)g(z) = e^{z_1 z}\, e^{z_2 z} = e^{(z_1+z_2)z}$, da cui, ponendo $z=1$, $e^{z_1}\, e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$.

Soluzione. Con i simboli dell'esercizio precedente abbiamo

$$e^{z_1 z} \leftrightarrow \left(\frac{z_1^n}{n!}\right), \quad e^{z_2 z} \leftrightarrow \left(\frac{z_2^n}{n!}\right), \quad e^{(z_1+z_2)z} \leftrightarrow \left(\frac{(z_1+z_2)^n}{n!}\right);$$

la convoluzione tra le prime due successioni fornisce la terza successione, come abbiamo verificato nel testo, a pagina 126.

4.4-4. Dall'uguaglianza $Dz^n/n! = z^{n-1}/(n-1)!$, valida per ogni $n > 0$, dedurre che $De^z = e^z$.

Soluzione. Basta osservare che, derivando termine a termine la serie esponenziale $\sum_{n\geq 0} z^n/n!$, si ottiene nuovamente le serie stessa.

4.4-5. Derivando termine a termine lo sviluppo della funzione $1/(1-z)^2$, ottenuto nell'esempio 4.4-1, si ottenga lo sviluppo

$$\frac{1}{(1-z)^3} = \sum_{n\geq 0} \frac{(n+1)(n+2)}{2}\, z^n, \quad |z| < 1.$$

Si ottenga lo stesso risultato moltiplicando tra loro gli sviluppi delle funzioni $1/(1-z)$ e $1/(1-z)^2$.

Soluzione. Derivando termine a termine l'uguaglianza

$$\frac{1}{(1-z)^2} = (1-z)^{-2} = \sum_{n\geq 0}(n+1)\, z^n$$

si ottiene

$$2(1-z)^{-3} = \sum_{n\geq 1}(n+1)\, n\, z^{n-1},$$

da cui la formula proposta nel testo, scrivendo n al posto di $n-1$. Moltiplicando la serie $\sum_{n\geq 0}(n+1)\, z^n$ per la serie $\sum_{n\geq 0} z^n$ si ottiene la serie

$$\sum_{n\geq 0} \sum_{k=0}^{n} (k+1)\, z^k\, z^{n-k},$$

dunque la serie precedentemente ottenuta, ove si ricordi che la somma dei numeri naturali da 1 a $n+1$ vale $(n+1)(n+2)/2$.

4.4-6. Dallo sviluppo in serie geometrica di ragione $-z$

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{n\geq 0}(-1)^n\, z^n, \quad |z| < 1,$$

si deduca lo sviluppo

$$\frac{1}{(1+z)^2} = \sum_{n\geq 0}(-1)^n\, (n+1)\, z^n = 1 - 2z + 3z^2 - 4z^3 + \dots\,,$$

prima mediante derivazione e successivamente mediante moltiplicazione della serie di partenza per se stessa.

Soluzione. Limitiamoci alla prima richiesta; derivando la serie data si ottiene

$$\frac{-1}{(1+z)^2} = \sum_{n\geq 1}(-1)^n\, n\, z^{n-1},$$

da cui il risultato fornito nel testo, scrivendo n al posto di $n-1$.

4.4-7. Dedurre dalla serie geometrica lo sviluppo

$$\frac{1}{a^2+z^2} = \sum_{n\geq 0}(-1)^n\, \frac{z^{2n}}{a^{2n+2}},$$

valido, per ogni fissato $a \neq 0$, per $|z| < |a|$.

Soluzione. Si ha

$$\frac{1}{a^2+z^2} = \frac{1}{a^2(1+z^2/a^2)} = \frac{1}{a^2}\sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{z^{2n}}{a^{2n}}.$$

4.4-8. La successione dei numeri di Fibonacci è definita ricorsivamente ponendo

$$F_0 := 0, \quad F_1 := 1; \quad F_n := F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n \geq 2.$$

Verificare che la serie

$$\sum_{n\geq 0} F_{n+1} z^n = 1 + z + 2z^2 + 3z^3 + 5z^4 + \ldots$$

ha raggio di convergenza $R = 2/(1+\sqrt{5})$.

Suggerimento ▷ Posto $r_n := F_{n+1}/F_n \geq 1$, verificare la formula ricorsiva $r_{n+1} = 1 + 1/r_n$, da cui passando il limite . . . .

Soluzione. Scrivendo la formula ricorsiva che genera i numeri di Fibonacci nella forma $F_{n+2} := F_{n+1} + F_n$, si ottiene la relazione $r_{n+1} = 1 + 1/r_n$, da accoppiare alla condizione iniziale $r_1 = 1$, semplicemente dividendo per F_{n+1}. La successione dei rapporti (r_n) è studiata in dettaglio in PCAM, esempio 3.2-3 ed esercizio 3.4-3; per la soluzione degli esercizi si veda il file

`http://eulero.ing.unibo.it/~barozzi/PCAM_Complementi/`
`PCAM_Soluzioni_3.pdf`.

La successione dei termini di indice dispari è strettamente crescente, quella dei termini di indice pari è strettamente decrescente ed entrambe tendono allo stesso limite. Se L è il limite in questione, la relazione $r_{n+1} = 1 + 1/r_n$ per $n \to \infty$ fornisce

$$L = 1 + \frac{1}{L} \quad \Longleftrightarrow \quad L^2 - L - 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad L = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Abbiamo tenuto conto del fatto che tutti i rapporti r_n sono ≥ 1. Il criterio del rapporto applicato alla serie $\sum_{n\geq 0} F_{n+1}|z|^n$ conduce al limite

$$\lim_{n\to\infty} r_{n+1}\,|z| = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\,|z|,$$

dunque la serie in esame ha raggio di convergenza $R = 2/(1+\sqrt{5})$.

4.4-9. Detta $s(z)$ la somma della serie considerata nel precedente esercizio, $|z| < 2/(1+\sqrt{5})$, dedurre dalla definizione dei numeri di Fibonacci la relazione

$$s(z)(1-z-z^2) = 1 \quad \Longrightarrow \quad s(z) = \frac{1}{1-z-z^2}.$$

Verificare che la funzione razionale $1/(1-z-z^2)$ è olomorfa nel disco $|z| < 2/(1+\sqrt{5})$.

Soluzione. Dalle uguaglianze

$$\begin{aligned}
s(z) &= 1 + z + 2z^2 + 3z^3 + 5z^4 + \ldots + F_{n+1}\,z^n + \ldots,\\
zs(z) &= \phantom{1+{}} z + z^2 + 2z^3 + 3z^4 + \ldots + F_n\,z^n + \ldots,\\
z^2 s(z) &= \phantom{1+z+{}} z^2 + z^3 + 2z^4 + \ldots + F_{n-1}\,z^n + \ldots,
\end{aligned}$$

si ottiene la relazione voluta sottraendo la seconda e la terza uguaglianza dalla prima. Il trinomio $1-z-z^2$ ammette gli zeri $(-1\pm\sqrt{5})/2$, di cui il secondo è il più prossimo all'origine, distando da essa

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{2}{\sqrt{5}+1}.$$

4.5. Integrazione in campo complesso

Nel seguito useremo il simbolo

$$\oint_\gamma f(z)\,dz$$

per indicare l'integrale di f sul circuito γ, orientato positivamente.

4.5-1. Sia $\gamma : t \mapsto z_0 + r\,e^{it}$, $0 \le t \le k \cdot 2\pi$, con k intero ≥ 1, cioè la circonferenza di centro z_0 e raggio r percorsa in senso positivo k volte. Verificare che (↑ Esempio 4.5-4)

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{1}{z - z_0}\,dz = k.$$

SOLUZIONE. A parametrizzazione avvenuta si ottiene

$$\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2k\pi} \frac{1}{r\,e^{it}}\,ir\,e^{it}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2k\pi} dt = k.$$

4.5-2. Sia $u(x, y)$ una funzione di classe $C^{(1)}$ in un aperto contenente il rettangolo $D := [a, b] \times [c, d]$ e sia γ la frontiera di D orientata positivamente rispetto ad esso. Verificare che

$$\iint_D \frac{\partial u}{\partial x}\,dx\,dy = \int_c^d [\,u(b, y) - u(a, y)\,]\,dy = \oint_\gamma u\,dy,$$

$$\iint_D \frac{\partial u}{\partial y}\,dx\,dy = \int_a^b [\,u(x, d) - u(x, c)\,]\,dx = -\oint_\gamma u\,dx.$$

SOLUZIONE. Infatti

$$\iint_D \frac{\partial u}{\partial x}\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_a^b \frac{\partial u}{\partial x}\,dx\right) dy = \int_c^d \left[u(x, y)\right]_{x=a}^{x=b} dy.$$

4.5-3. Supponiamo che il dominio D sia descritto nel modo seguente:

$$D := \{(x, y) \,|\, a \le x,\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\}$$

dove φ_1 e φ_2 sono funzioni continue. Se u è di classe $C^{(1)}$ in un aperto contenente D, verificare che

$$\iint_D \frac{\partial u}{\partial y}\,dx\,dy = \int_a^b [\,u(x, \varphi_2(x)) - u(x, \varphi_1(x))\,]\,dx = -\oint_\gamma u\,dx.$$

Analogamente, se D è descritto come

$$D := \{(x, y) \,|\, c \le y \le d,\ \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)\},$$

dove ψ_1 e ψ_2 sono funzioni continue, allora

$$\iint_D \frac{\partial u}{\partial x}\,dx\,dy = \int_c^d [\,u(\psi_2(y), y) - u(\psi_1(y), y)\,]\,dy = \oint_\gamma u\,dy.$$

SOLUZIONE. Infatti

$$\iint_D \frac{\partial u}{\partial y}\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial u}{\partial y}\,dy\right) dx = \int_a^b \left[u(x, y)\right]_{y=\varphi_1(x)}^{y=\varphi_2(x)} dx.$$

4.6. Proprietà delle funzioni analitiche

4.6-1. Provare l'identità $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}, \forall z_1, z_2, \in \mathbb{C}$, utilizzando il teorema di unicità del prolungamento analitico.

SUGGERIMENTO ▷ Fissare $z_1 \in \mathbb{R}$ e considerare le funzioni intere $z \mapsto e^{z_1+z}$, $z \mapsto e^{z_1} e^z$; esse coincidono . . . .

SOLUZIONE. ... sull'asse reale, dunque coincidono in tutto il campo complesso.

4.6-2. Utilizzando il teorema fondamentale dell'algebra, mostrare che ogni polinomio p (non costante) trasforma $\mathbb{C}$ su se stesso, cioè il piano complesso ha come immagine mediante p se stesso.

SUGGERIMENTO ▷ Per ogni fissato w, l'equazione $p(z) = w$ equivale a ... .

SOLUZIONE. ... $p(z) - w = 0$, dove $p(z) - w$ è ancora un polinomio; dunque il teorema fondamentale assicura che il primo membro si annulla in almeno un punto.

4.7. Punti singolari. Serie bilatere

4.7-1. Determinare (e classificare) le singolarità delle funzioni

$$1)\quad \frac{z}{\sin z}, \qquad 2)\quad \frac{\sin z}{z^2 - \pi^2}.$$

SOLUZIONE. La prima funzione ha una sigolarità eliminabile nell'origine e un polo semplice in ciascuno dei punti $z_k = k\pi$, k intero non nullo; infatti in tali punti il numeratore non si annulla mentre il denominatore presenta uno zero del primo ordine (= zero semplice). Poiché il denomitatore della seconda funzione si scrive $(z-\pi)(z+\pi)$, essa presenta due singolarità eliminabili nei punti $z = \pi$ e $z = -\pi$; in tali punti tanto il numeratore quanto il denominatore presentano zeri semplici.

4.7-2. Considerate le funzioni

$$1)\quad e^{-1/z^2}, \quad 2)\quad \frac{e^{1/z}}{z}, \quad 3)\quad \sin\frac{1}{z}, \quad 4)\quad \sinh\frac{1}{z},$$

$$5)\quad \frac{\sin z^4}{z^3}, \quad 6)\quad \frac{1 - e^{-z}}{z}, \quad 7)\quad \frac{e^{-1/z^2}}{z}, \quad 8)\quad z^3 \sin\frac{1}{z},$$

classificare l'origine in quanto singolarità per ciascuna di esse.

SOLUZIONE. Esercizio 1. Da

$$e^{-1/z^2} = 1 - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2!\,z^2} - \frac{1}{3!\,z^6} + \dots$$

segue che l'origine è una singolarità essenziale.

Esercizio 2. Da

$$\frac{e^{1/z}}{z} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2!\,z^3} + \frac{1}{3!\,z^4} + \dots$$

segue che l'origine è una singolarità essenziale.

Esercizi 3 e 4. Considerazioni analoghe alle precedenti: basta scrivere $1/z$ al posto di z nelle serie del seno e del seno iperbolico rispettivamente.

Esercizio 5. Da $\sin z^4 \sim z^4$, per $z \to 0$, segue che la funzione ha una singolarità eliminabile, anzi uno zero del primo ordine nell'origine.

Esercizio 6. Poiché $e^{-z} = 1 - z + O(z^2)$, l'origine è una singolarità eliminabile.

Esercizi 7 e 8. Considerazioni analoghe a quelle fatte per gli esercizi 1 e 2: in entrambi i casi si tratta di singolarità essenziali.

4.7-3. Calcolare i residui delle funzioni

$$1)\quad \frac{1}{z^2 - 1}, \quad 2)\quad \frac{\sin z}{\cos z}, \quad 3)\quad \frac{z \cos z}{\sin z}, \quad 4)\quad e^{2/z}, \quad 5)\quad z \sin\frac{1}{z},$$

in ciascuna delle loro singolarità.

SOLUZIONE. Esercizio 1. La funzione presenta due poli semplici nei punti $z_1 = 1$, $z_2 = -1$, con residui rispettivamente $1/2$ e $-1/2$. Si può applicare la formula (3′) del paragrafo 4.7.

Esercizio 2. La funzione presenta poli semplici in tutti i punti in cui si annulla il denominatore; la formula citata poco sopra consente di affermare che i residui valgono -1.

Esercizio 3. La funzione presenta una singolarità eliminabile nell'origine. In ciascuno dei punti $z_k = k\pi$, k intero non nullo, c'è un polo semplice con residuo uguale a $k\pi$.

Esercizio 4. Da

$$e^{2/z} = 1 + \frac{2}{z} + \frac{2}{z^2} + \dots$$

segue che il residuo nell'origine vale 2.

Esercizio 5. Da

$$z \sin\frac{1}{z} = 1 - \frac{1}{3!\,z^2} + \dots$$

segue che l'origine è una singolarità essenziale con residuo nullo.

4.7-4. Mediante il metodo dei coefficienti indeterminati, dedurre dagli sviluppi delle funzioni seno e coseno lo sviluppo

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} = z + \frac{1}{3}\,z^3 + \frac{2}{15}z^5 + O(z^7).$$

SOLUZIONE. Sappiamo che la tangente è una funzione dispari, dunque lo sviluppo cercato è del tipo $\tan z = a_1 z + a_3 z^3 + a_5 z^5 + O(z^7)$. Sarà dunque

$$\left[a_1 z + a_3 z^3 + a_5 z^5 + O(z^7)\right]\left[1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} + O(z^6)\right] = z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} + O(z^7).$$

Sviluppando il prodotto a primo membro, ed uguagliando i coefficienti delle potenze z, z^3 e z^5 si ottengono le uguaglianze

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, \\ -\frac{1}{2}\,a_1 + a_3 &= -\frac{1}{6}, \\ \frac{1}{24}\,a_1 - \frac{1}{2}\,a_3 + a_5 &= \frac{1}{120}, \end{aligned}$$

da cui segue facilmente il risultato dato nel testo.

4.8. Il teorema dei residui

4.8-1 Calcolare (mediante il teorema dei residui) gli integrali

$$1)\quad \int_0^{2\pi} \sin^2 x\,dx = \pi,$$

$$2)\quad \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1+\sin^2 x} = \sqrt{2}\,\pi,$$

$$3)\quad \int_0^{2\pi} \frac{dx}{2+\sin x\cos x} = \frac{4\,\pi}{\sqrt{15}},$$

$$4)\quad \int_0^{2\pi} \frac{dx}{2+\sin x+\cos x} = \sqrt{2}\,\pi.$$

SUGGERIMENTO ▷ Trasformare ciascun integrale in un integrale sulla circonferenza di centro l'origine e raggio 1.

SOLUZIONE. La tecnica consiste nell'utilizzare le formule di Eulero, in modo da scrivere un integrale esteso alla circonferenza unitaria che si trasformerebbe nell'integrale proposto se si parametrizzasse la circonferenza stessa.

Esercizio 1. Preferiamo indicare con la lettera t la variabile d'integrazione; per il primo integrale, posto $z = e^{it}$, si ha

$$\sin^2 t = \left(\frac{z - 1/z}{2i}\right)^2 = \frac{-z^4 + 2z^2 - 1}{4z^2},$$

quindi

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 t\, dt = \oint_{|z|=1} \frac{-z^4 + 2z^2 - 1}{4z^3\, i}\, dz.$$

Abbiamo tenuto conto del fatto che da $z = e^{it}$ segue

$$dz = ie^{it}\, dt = iz\, dt \qquad \Longleftrightarrow \qquad dt = \frac{1}{iz}\, dz.$$

A questo punto possiamo utilizzare il teorema dei residui. Poiché la funzine ntegranda ammette nell'origine un polo del terzo ordine con residuo uguale a $-i/2$, si trova per l'ultimo integrale il valore $2\pi i(-i/2) = \pi$.

Peraltro l'integrale in esame si calcola agevolmente utilizzando la primitiva

$$x \mapsto \frac{t - \sin t \cos t}{2}.$$

Esercizio 2. Si trova

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{1 + \sin^2 t} = \oint_{|z|=1} \frac{4iz}{1 - 6z^2 + z^4}\, dz.$$

L'equazione biquadratica che si ottiene uguagliando a zero il denominatore ammette quattro radici (a due a due tra loro opposte) di cui hanno valore assoluto minore di 1 le radici $z_1 = 1 - \sqrt{2}$, e $z_2 = -z_1$. I residui della funzione integranda in tali punti valgono entrambi $-i/(2\sqrt{2})$, dunque per l'integrale si trova $4\pi i\,(-i/(2\sqrt{2})) = \sqrt{2}\pi$.

Esercizio 3. Si trova

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2 + \sin t \cos t} = \oint_{|z|=1} \frac{4z}{-1 + 8iz^2 + z^4}\, dz.$$

Con la sostituzione $z^2 = s$ si è condotti a studiare l'equazione di secondo grado $-1 + 8is + s^2 = 0$, che ammette due radici complesse, di cui $s_0 = i(\sqrt{15} - 4)$ ha valore assoluto minore di 1.

Siamo dunque condotti ad applicare il teorema dei residui relativamente ai poli semplici

$$z_1 = e^{i3\pi/4}\sqrt{4 - \sqrt{15}} = \frac{-1 + i}{\sqrt{2}}\sqrt{4 - \sqrt{15}}$$

e $z_2 = -z_1$; poiché i residui in tali poli valgono entrambi $-i/\sqrt{15}$, si trova il risultato fornito nel testo.

Esercizio 4. Si trova

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2 + \sin t + \cos t} = \oint_{|z|=1} \frac{1 - i}{i + (2 + 2i)z + z^2}\, dz.$$

Il denominatore si annulla in due punti, di cui $z_1 = (1 + i)(\sqrt{2}/2 - 1)$ ha valore assoluto minore di 1. Poiché il residuo della funzione integranda in tale punto vale $-i/\sqrt{2}$, si ottiene il risultato fornito nel testo.

4.8-2 Con la stessa tecnica per precedente esercizio verificare che

1) $$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{a + \cos x} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}, \quad a > 1,$$

2) $$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 + a \sin x} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - a^2}}, \quad 0 < a < 1,$$

3) $$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(a + b \cos x)^2} = \frac{2\pi a}{(a^2 - b^2)^{3/2}}, \quad a > b > 0.$$

Soluzione. Indichiamo ogni volta col simbolo f la funzione di variabile complessa che viene integrata sulla circonferenza unitaria.

Esercizio 1. Si ha

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{a+\cos x} = \oint_{|z|=1} \frac{-2i}{z^2+2az+1}\,dz = 2\pi i \cdot \operatorname{res}(f; \sqrt{a^2-1}-a) = = 2\pi i \cdot \frac{-i}{\sqrt{a^2-1}} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}.$$

Esercizio 2. Si ha

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1+a\sin x} = \oint_{|z|=1} \frac{2}{az^2+2iz-a}\,dz = 2\pi i \cdot \operatorname{res}\Big(f; i\,\frac{\sqrt{1-a^2}-1}{a}\Big) = = 2\pi i \cdot \frac{1}{i\sqrt{1-a^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}.}$$

Esercizio 3. Si ha

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(a+b\cos x)^2} = \oint_{|z|=1} \frac{-4iz}{(bz^2+2az=b)^2}\,dz = = 2\pi i \cdot \operatorname{res}\Big(f; \frac{\sqrt{a^2-b^2}-a}{b}\Big) = 2\pi i \cdot \frac{-ia}{(a^2-b^2)^{3/2}} = = \frac{2\pi a}{(a^2-b^2)^{3/2}}.$$

4.8-3 Utilizzando il teorema dei residui verificare che

1) $\displaystyle \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+x+1}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2-x+1}\,dx = \frac{2\,\pi}{\sqrt{3}},$

2) $\displaystyle \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+x+1)^2}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2-x+1)^2}\,dx = \frac{4\,\pi}{3\,\sqrt{3}},$

3) $\displaystyle \int_0^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,dx = \frac{\pi}{4},$

4) $\displaystyle \int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+4)^2(x^2+9)}\,dx = \frac{\pi}{200},$

5) $\displaystyle \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^6+1} = \frac{2\,\pi}{3},$

6) $\displaystyle \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+x^2+1} = \frac{\pi}{\sqrt{3}},$

7) $\displaystyle \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x(1+x^2)}\,dx = \frac{\pi(e-1)}{e},$

8) $\displaystyle \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{e}.$

Soluzione. In ciascuno degli esercizi dal numero 1 al numero 6 indichiamo con la lettera f la funzione di variabile complessa che si ottiene scrivendo $z \in \mathbb{C}$ al posto di $x \in \mathbb{R}$. In base al lemma del grande cerchio si hanno i seguenti risultati.

Esercizio 1.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+x+1}\,dx = 2\pi i \cdot \operatorname{res}\big(f; (-1+i\sqrt{3}\,)/2\big) = 2\pi i \cdot \frac{-i}{\sqrt{3}} = \frac{2\,\pi}{\sqrt{3}}.$$

Esercizio 2. A differenza dell'esercizio precedente, il punto $z_0 = -1/2 + i\sqrt{3}/2$ è un polo doppio per la funzione integranda, dunque il relativo residuo si calcola con la formula fornita dalla Proposizione 4.7-1, ottenendo

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+x+1)^2}\,dx = 2\pi i \cdot \operatorname{res}\big(f; (-1+i\sqrt{3}\,)/2\big) = 2\pi i \cdot \frac{-2i}{3\sqrt{3}} = \frac{4\,\pi}{3\,\sqrt{3}}.$$

Esercizio 3. Trattandosi di una funzione pari, possiamo calcolare l'integrale su tutta la retta reale. Abbiamo

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\, dx = 2\pi i \cdot \mathrm{res}(f; i) = 2\pi i \cdot \frac{-i}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

Esercizio 4. Trattandosi di una funzione pari, possiamo calcolare l'integrale su tutta la retta reale. Abbiamo

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+4)^2(x^2+9)}\, dx = 2\pi i\,[\mathrm{res}(f; 2i) + \mathrm{res}(f; 3i)] = 2\pi i \left[\frac{-13i}{200} + \frac{3i}{50}\right] =$$
$$= \frac{\pi}{100}.$$

Esercizio 5. Il polinomio $z^6 + 1$ ammette, nel semipiano $\mathrm{Im}(z) > 0$, i tre zeri

$$z_1 = e^{i\pi/6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1}{2}, \quad z_2 = e^{i\pi/2} = i, \quad e^{i5\pi/6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1}{2}.$$

Per ogni $k = 1, 2, 3$, si ha il residuo

$$r_k = \frac{1}{6z_k^5} = \frac{z_k}{6z_k^6} = \frac{-z_k}{6},$$

quindi l'integrale da calcolare vale

$$2\pi i\,(r_1 + r_2 + r_3) = \frac{-\pi i}{3}(z_1 + z_2 + z_3) = \frac{-\pi i}{3} \cdot 2i = \frac{2\,\pi}{3}.$$

Esercizio 6. La funzione integranda ammette, nel semipiano $\mathrm{Im}(z) > 0$, i due zeri

$$z_1 = e^{i\pi/3} = \frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad z_2 = e^{i2\pi/3} = -\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2},$$

con residui, rispettivamente,

$$r_1 = -\frac{1}{4}\Big(1 + \frac{i}{\sqrt{3}}\Big), \quad r_2 = \frac{1}{4}\Big(1 - \frac{i}{\sqrt{3}}\Big);$$

ne segue il risultato proposto nel testo.

Esercizio 7. In questo caso non è conveniente considerare la funzione

$$f(z) = \frac{\sin z}{z(1+z^2)},$$

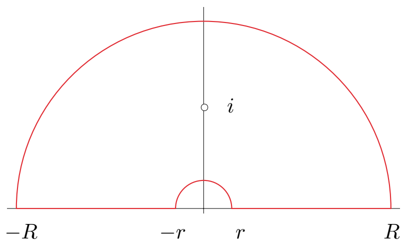
in quanto tale funzione è illimitata (in valore assoluto), tanto nel semipiano $\mathrm{Im}(z) > 0$ quanto nel semipiano $\mathrm{Im}(z) < 0$. Consideriamo piuttosto la funzione

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z(1+z^2)},$$

la cui restrizione all'asse reale vale

$$\frac{\cos x + i \sin x}{x(1+x^2)}.$$

Integriamo tale funzione sul circuito $C_{r,R}$ mostrato in figura.



Tenendo conto del fatto che a funzione $x \mapsto \cos x/(x(1+x^2))$ è dispari, dopo aver fatto il limite per $R \to \infty$ e $r \to 0$, e applicato i lemmi di 4.8-3 e 4.8-4, si trova

$$i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x(1+x^2)}\,dx - i\pi\cdot\operatorname{res}(f;0) = 2\pi i\cdot\operatorname{res}(f;i),$$

cioè

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x(1+x^2)}\,dx - \pi = -\frac{\pi}{e},$$

da cui il risultato proposto nel testo.

Esercizio 8. Analogamente a quanto abbiamo fatto nell'esercizio precedente, conviene considerare la funzione

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{1+z^2}.$$

Integrando sul circuito C_R che si ottiene concatenando il segmento $[-R,R]$ con la semicirconferenza di centro l'origine e raggio R contenuta nel semipiano $\operatorname{Im}(z) > 0$, applicando il Lemma di Jordan si ottiene

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{1+x^2}\,dx = 2\pi i\cdot\operatorname{res}(f;i) = 2\pi i\cdot\frac{e^{-1}}{2i} = \frac{\pi}{e}.$$

4.8-4 Verificare l'uguaglianza

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^n} = \frac{\pi}{n}\,\frac{1}{\sin(\pi/n)},\qquad n \geq 2$$

mediante il teorema dei residui, utilizzando il circuito che congiunge l'origine con $R > 1$, successivamente con $Re^{2\pi i/n}$ attraverso un arco di cerchio, e di nuovo con l'origine.

Utilizzare il risultato ottenuto per calcolare l'integrale

$$\int_0^{\infty}\frac{dx}{x^3+8} = \frac{\sqrt{3}}{18}\,\pi.$$

Soluzione. Sia I_n l'integrale che vogliamo calcolare e sia $f(z) := 1/(1+z^n)$; il circuito specificato contiene soltanto il punto $z_0 = e^{\pi i/n}$ che è un polo semplice per f con residuo

$$\frac{1}{nz_0^{n-1}} = \frac{z_0}{nz_0^n} = -\frac{1}{n}\,z_0.$$

Il segmento che congiunge l'origine col punto $Re^{2\pi i/n}$ si parametrizza nella forma

$$t \mapsto e^{2\pi i/n}\cdot t,\quad 0 \leq t \leq R,$$

dunque l'integrale ad esso relativo vale

$$e^{2\pi i/n}\int_0^R\frac{dt}{1+t^n} = e^{2\pi i/n}\,I_n.$$

In definitiva, applicando il teorema dei residui e facendo tendere R a $+\infty$, tenendo conto del lemma del grande cerchio si ottiene

$$I_n(1-e^{2\pi i/n}) = -\frac{2\pi i}{n}\,e^{\pi i/n},$$

da cui

$$I_n = -\frac{2\pi i}{n}\,\frac{e^{\pi i/n}}{1-e^{2\pi i/n}} = \frac{\pi}{n}\,\frac{2i}{e^{\pi i/n}-e^{-\pi i/n}} = \frac{\pi/n}{\sin(\pi/n)}.$$

In particolare si ottiene

$$I_2 = \int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2},$$

calcolabile elementarmente utilizzando la funzione arcotangente.

L'ulteriore integrale proposto si riconduce al calcolo di I_3, osservando che

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^3+8} = \frac{1}{8}\int_0^\infty \frac{dx}{(x/2)^3+1}.$$

4.8-5 Verificare l'uguaglianza

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{x/3}}{1+e^x}\,dx = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

utilizzando la poligonale che congiunge, nell'ordine, i punti R, $R+2\pi i$, $-R+2\pi i$, $-R$, R, con $R>0$. Dimostrare che gli integrali estesi ai due segmenti paralleli all'asse immaginario tendono a 0 per $R\to\infty$.

SOLUZIONE. All'interno del circuito suggerito la funzione $f(z) = e^{z/3}/(1+e^z)$ ammette il polo semplice $z_0 = i\pi$, con residuo

$$\frac{e^{i\pi/3}}{e^{i\pi}} = -e^{i\pi/3}.$$

La retta $y = 2\pi$ ammette la parametrizzazione $t \mapsto x + 2\pi i$, $r \in \mathbb{R}$, quindi l'integrale di f relativo ad essa vale $e^{i2\pi/3}I$, dove I è l'integrale che vogliamo calcolare. Per $R\to\infty$ si ottiene dunque

$$I(1-e^{i2\pi/3}) = -2\pi i \cdot e^{i\pi/3},$$

da cui

$$I = -2\pi i\,\frac{e^{i\pi/3}}{1-e^{i2\pi/3}} = \pi\,\frac{2i}{e^{i\pi/3}-e^{-i\pi/3}} = \frac{\pi}{\sin(\pi/3)} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}.}$$

Resta da dimostrare che gli integrali estesi ai due segmenti paralleli all'asse immaginario tendono a 0 per $R\to\infty$. Per il segmento di estremi R e $R+2\pi i$ si ha la parametrizzazione $t\mapsto z(t) = R + 2\pi i\cdot t$, $0\le t\le 1$, dunque tale integrale vale

$$2\pi i\, e^{R/3}\int_0^1 \frac{e^{i(2\pi/3)t}}{1+e^R\,e^{i2\pi t}}\,dt.$$

Il valore assoluto del numeratore della funzione integranda vale 1, mentre il valore assoluto del denominatore è maggiore o uguale a $\big||e^R\,e^{i2\pi t}|-|1|\big| = e^R - 1$. In definitva il valore assoluto dell'integrale in esame non supera $2\pi e^{R/3}/(e^R-1)$.

Esercizi proposti

4.8-P1. Calcolare

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2+1}\,dx.$$

SOLUZIONE. Consideriamo la funzione

$$f(z) = \frac{\sqrt{z}}{z^2+1}, \quad z\in\mathbb{C}$$

e integriamola sul circuito $C_{r,R}$ già utilizzato per l'esercizio 4.8-3, numero 7.

Per la funzione

$$\sqrt{z} = \begin{cases} 0, & \text{per } z = 0,\\ \sqrt{|z|}\,e^{i\theta/2}, & \text{per } z\neq 0,\end{cases}$$

dove $\theta\in\arg(z)$, scegliamo una determinazione dell'argomento che collochi la semiretta di discontinuità della stessa funzione nel semipiano $\mathrm{Im}(z) < 0$, ad esempio $\theta\in(-\pi/2, 3\pi/2]$. Con tale scelta f è olomorfa in un aperto contenente il circuito $C_{r,R}$. Il teorema dei residui fornisce

$$\oint_{C_{r,R}} f(z)\,dz = 2\pi i\cdot \mathrm{res}(f;i) = 2\pi i \lim_{z\to i}\frac{\sqrt{z}}{2z} = 2\pi i\,\frac{e^{i\pi/4}}{2i} = \pi\,\frac{1+i}{\sqrt{2}}.$$

Per $r\to 0$ l'integrale di f sulla semicirconferenza di raggio r tende a 0 (Lemma del piccolo cerchio), e lo stesso accade per l'integrale sulla semicirconferenza di raggio

R, per $R \to \infty$ (Lemma del grande cerchio). Per $r \to 0$ e $R \to \infty$ l'integrale di f sull'intervallo $[r, R]$ fornisce l'integrale I che vogliamo calcolare; per $x < 0$, posto $t := |x| = -x$, si ha infine

$$\int_{-R}^{-r} f(x)\,dx = -i \int_{R}^{r} \frac{\sqrt{t}}{t^2+1}\,dt = i \int_{r}^{R} \frac{\sqrt{t}}{t^2+1}\,dt \to iI.$$

Dunque

$$I(1+i) = \pi\,\frac{1+i}{\sqrt{2}} \quad \Longrightarrow \quad I = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

4.8-P2. Calcolare

$$I = \int_0^\infty \frac{x^3 \sin x^2}{x^4+1}\,dx.$$

SOLUZIONE. Consideriamo la funzione

$$f(z) := \frac{z^3 e^{iz^2}}{z^4+1};$$

essa possiede quattro poli semplici, di cui uno nel primo quadrante:

$$z_0 = e^{i\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i),$$

avendo ivi come residuo $1/4e$. Valutiamo l'integrale di f sul circuito ottenuto concatenando:

- il segmento γ_1 che congiunge l'origine col punto $z = R$ sull'asse reale ($R > 1$);
- il quarto di cerchio γ_2 (contenuto nel primo quadrante) che congiunge il punto $z = R$ col punto $z = iR$;
- il segmento γ_3 che congiunge il punto $z = iR$ con l'origine.

Applicando il teorema dei residui si trova

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz + \int_{\gamma_3} f(z)\,dz = \frac{2\pi i}{4e}. \tag{$*$}$$

Ammettiamo per un istante che l'integrale su γ_2 tenda a 0 per $R \to \infty$; l'integrale su γ_1 tende a

$$\int_0^\infty \frac{x^3 \cos x^2}{x^4+1}\,dx + i \int_0^\infty \frac{x^3 \sin x^2}{x^4+1}\,dx.$$

L'integrale su γ_3 (si tenga conto del verso di percorrenza e si ponga $z = iy$) tende a

$$-\int_0^\infty \frac{y^3 \cos y^2}{y^4+1}\,dy + i \int_0^\infty \frac{y^3 \sin y^2}{y^4+1}\,dx.$$

Indicando ovunque la variabile d'integrazione con la lettera x, la (*), per $R \to \infty$, fornisce

$$2i \int_0^\infty \frac{x^3 \sin x^2}{x^4+1}\,dx = \frac{2\pi i}{4e},$$

quindi l'integrale da calcolare vale $\pi/(4e)$.
L'integrale su γ_2 si può parametrizzare ponendo $z = Re^{it}$, $0 \le t \le \pi/2$. Esso diventa

$$iR \int_0^{\pi/2} \frac{R^3 e^{i3t}\, e^{iR^2(\cos 2t + i \sin 2t)}}{R^4\, e^{i4t} - 1}\,dt.$$

Prendiamo il valore assoluto e sfruttiamo a denominatore la diseguaglianza triangolare nella forma $|z_1 - z_2| \ge \big||z_1| - |z_2|\big|$; si trova che l'integrale scritto non supera, in valore assoluto,

$$\frac{R^4}{R^4-1}\int_0^{\pi/2} e^{-R^2\sin 2t}\,dt < 2\int_0^{\pi/2} e^{-R^2\sin 2t}\,dt.$$

Abbiamo sfruttato il fatto che la funzione $R \mapsto R^4/(R^4-1)$ è monotona decrescente per $R > 1$, e tende a 1 per $R \to \infty$, dunque è certamente minore di 2 per R abbastanza grande (ad esempio per $R > 2$).

Per q. o. fissato $t \in [0, \pi/2]$, la funzione integranda nell'ultimo integrale tende a 0 per $R \to \infty$, e, al variare di R, le funzioni integrande sono maggiorate dalla funzione continua (dunque sommabile) $g(t) = e^{-\sin 2t}$. Il teorema di Lebesgue della convergenza dominata assicura la liceità del passaggio al limite sotto il segno di integrale.