5. La trasformata di Laplace
Esercizi

Aggiornamento: febbraio 2003

http://www.ciram.unibo.it/~barozzi/MI2/PDF/MI2-Cap.5-Ese.pdf

5.1. Introduzione alla trasformata di Laplace

5.2. Proprietà della trasformata di Laplace

5.2-1. Consideriamo la funzione limitata $f(t) = (\sin t)/t$ (↑ esempio 2.2-5) e indichiamo con $F(s)$ la sua L-trasformata. In base alla Prop. 5.1-2 si verifichi che

$$F'(s) = -\mathcal{L}[tf(t)](s) = -\mathcal{L}[\sin t](s) = -\frac{1}{1+s^2}.$$

Se ne deduca, per s reale positivo, $F(s) = c - \arctan s$, e finalmente per $s \to \infty$, in base alla Prop. 5.1-1:

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2} - \arctan s.$$

Soluzione. Da

$$F'(s) = -\frac{1}{1+s^2},$$

segue $F(s) = c - \arctan s$ per ogni s con $\mathrm{Re}(s) > 0$. In particolare, la formula scritta vale per ogni s reale positivo. D'altra parte, per $s \to \infty$, $F(s)$ deve tendere a 0, quindi la costante c vale necessariamente $\pi/2$.

5.2-2. La funzione *integralseno* è stata definita nell'esempio 2.2-5 come la primitiva della funzione $f(t) = (\sin t)/t$, nulla nell'origine:

$$\mathrm{Si}(x) := \int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt.$$

Dedurre dalla Proposizione 5.2-3 che la L-trasformata dell'integralseno è

$$G(s) = \frac{F(s)}{s} = \frac{1}{s}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan s\right).$$

Per poter applicare il teorema del valore finale, occorre sapere che la funzione integralseno tende ad un limite finito per $x \to +\infty$ (in realtà tale limite è già stato calcolato nell'esempio 4.8-5, ma vogliamo ricalcolarlo in modo indipendente). Per ottenere questo risultato, si fissi $a > 0$, e si osservi che, per ogni $b > a$, si ha

$$\mathrm{Si}(b) = \int_0^b \frac{\sin t}{t}\, dt = \int_0^a \frac{\sin t}{t}\, dt + \int_a^b \frac{\sin t}{t}\, dt;$$

si integri per parti il secondo integrale e si dimostri che esso tende ad un limite finito per $b \to +\infty$ (la funzione $x \mapsto (\cos x)/x^2$ è sommabile sull'intervallo $[a, +\infty)$ in quanto maggiorata in valore assoluto da $1/x^2$).

Finalmente si applichi il teorema del valore finale alla funzione integralseno ottenendo

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{Si}(x) = \lim_{s\to 0} s\,G(s) = \lim_{s\to 0}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan s\right) = \frac{\pi}{2}.$$

SOLUZIONE. Lo schema della soluzione è contenuto nell'enunciato. Eseguiamo l'integrazione per parti suggerita; si ha

$$\int_a^b \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\cos a}{a} - \frac{\cos b}{b} + \int_a^b \frac{\cos t}{t^2}\,dt;$$

l'addendo $(\cos b)/b$ tende a 0 per $b \to +\infty$, l'ultimo integrale tende all'integrale della funzione sommabile $t \mapsto (\cos t)/t^2$ su $[b, +\infty)$.

5.2-3. Sia $\delta_h(t) := \chi_{[0,h]}(t)/h$, con $h > 0$, come nell'esempio 5.1-3. Abbiamo osservato che l'integrale di δ_h vale 1 quale che sia h. Sia $f_h(t)$ la primitiva di $\delta_h(t)$ nulla per $t \le 0$. Calcolare f_h e la relativa trasformata. A che cosa tende $f_h(t)$ per $h \to 0$?

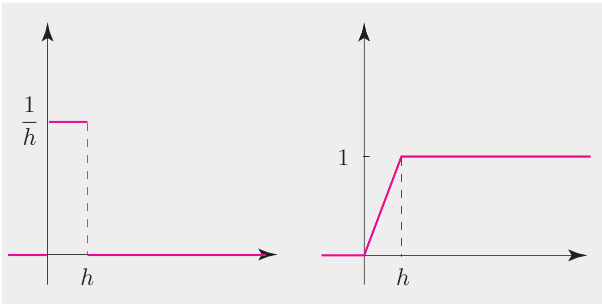


Figura 5.2-8.
Integrando un impulso unitario si ottiene una rampa unitaria.

SOLUZIONE. Per la primitiva $f_h(t)$ si trova (vedi figura a destra)

$$f_h(t) = \begin{cases} 0, & \text{per } t \le 0 \\ t/h, & \text{per } 0 < t \le h \\ 1, & \text{per } 1 \le t\ . \end{cases}$$

Per $h \to 0$, $f_h(t)$ tende alla funzione nulla per $t \le 0$, uguale a 1 per $t > 0$, dunque la funzione limite è il gradino unitario (o funzione di Heaviside) a meno del valore nell'origine. Per la trasformata di $f_h(t)$ abbiamo, con un'integrazione per parti,

$$\int_0^h (t/h)\,e^{-st}\,dt + \int_h^\infty e^{-st}\,dt = -\frac{e^{-hs}}{s} + \frac{1-e^{-hs}}{hs^2} + \frac{e^{-hs}}{s} =$$
$$= \frac{1-e^{-hs}}{hs^2}$$

per ogni s con parte reale positiva. Poiché $e^{-hs} = 1 - hs + h^2s^2/2 + \dots$, per $h \to 0$ la trasformata calcolata tende a $1/s$.

5.2-4. Sia $f(t) = \chi_{[0,1]}(t)$, cioè la funzione uguale a 1 nell'intervallo $[0,1]$ e nulla fuori dello stesso intervallo. Verificare che

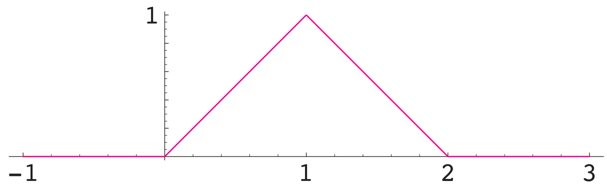
$$(f * f)(t) = \begin{cases} t, & \text{per } 0 \le t \le 1, \\ 2-t & \text{per } 1 \le t \le 2, \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Tracciare un grafico della convoluzione ottenuta.

SOLUZIONE. La funzione $\tau \mapsto f(\tau)$ ha come supporto l'intervallo $[0,1]$, mentre la funzione $\tau \mapsto f(t-\tau)$ ha come supporto l'intervallo $[t-1, t]$. Dunque la convoluzione è nulla quando t è esterno all'intervallo $[0,2]$, in quanto, per tali valori, i supporti delle due funzioni in questione sono tra loro disgiunti. Per $t \in [0,1]$ essa vale

$$\int_0^t d\tau = t,$$

mentre per $t \in [1,2]$ essa vale
$$\int_t^2 d\tau = 2 - t.$$



5.2-5. Sia $\delta_h(t) := \chi_{[0,h]}(t)/h$, con $h > 0$, come nell'esercizio 5.2-3. Si verifichi che $(f * \delta_h)(t)$ è uguale alla media integrale della funzione f sull'intervallo $[t-h, t]$. Se f è una funzione continua su $\mathbb{R}$, a che cosa tende $(f * \delta_h)(t)$ per $h \to 0$?

SOLUZIONE. Infatti, poiché il supporto della funzione $\tau \mapsto \delta_h(t-\tau)$ è l'intervallo $[t-h, t]$, si trova
$$(f * \delta_h)(t) = \frac{1}{h} \int_{t-h}^{t} f(\tau)\, d\tau.$$
Se f è continua, la media integrale calcolata coincide col valore di f in un punto opportuno $\xi \in [t-h, t]$, e dunque tende a $f(t)$ per $h \to 0$.

5.2-6. Con i simboli dell'esercizio precedente, calcolare esplicitamente $(H * \delta_h)(t)$ e tracciarne il grafico. Si suggerisce di fare calcoli separati per $0 \le t \le h$ e per $t \ge h$. Verificare che la convoluzione ottenuta è continua su $\mathbb{R}$. Confrontare con quanto visto nell'esercizio 5.2-3.

SOLUZIONE. Utilizzando il risultato del precedente esercizio, si riconosce subito che la convoluzione richiesta è nulla per $t < 0$, e vale 1 per $t > h$. Per $t \in [0, h]$, si ha
$$(H * \delta_h)(t) = \int_0^t 1\, \frac{1}{h}\, d\tau = \frac{t}{h}.$$
In definitiva si ottiene la rampa $f_h(t)$ considerata nell'esercizio 5.2-3.

5.2-7. Stesso problema dell'esercizio precedente per $(t_+ * \delta_h)(t)$. Verificare che la convoluzione ottenuta è di classe $C^{(1)}(\mathbb{R})$.

SOLUZIONE. Sempre in base al risultato dell'esercizio 5.2-5, abbiamo cha la convoluzione richiesta è nulla per $t \le 0$. Per $0 < t \le h$ essa vale
$$\frac{1}{h} \int_0^t \tau\, d\tau = \frac{t^2}{2h},$$
mentre per $t \ge h$ essa vale
$$\frac{1}{h} \int_{t-h}^{t} \tau\, d\tau = \frac{1}{h} \left[\frac{\tau^2}{2} \right]_{t-h}^{t} = t - \frac{h}{2}.$$
In definitiva
$$(t_+ * \delta_h)(t) = \begin{cases} 0, & \text{per } t \le 0 \\ \dfrac{t^2}{2h}, & \text{per } 0 < t \le h \\ t - \dfrac{h}{2}, & \text{per } t > h. \end{cases}$$
Come si vede, non solo la convoluzione calcolata è continua, ma anche la sua derivata prima è continua:
$$(t_+ * \delta_h)'(t) = \begin{cases} 0, & \text{per } t < 0 \\ \dfrac{t}{h}, & \text{per } 0 < t < h \\ 1, & \text{per } t > h. \end{cases}$$

5.3. Le funzioni beta e gamma di Eulero

5.3-P1. Dedurre dalla relazione $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, la relazione

$$\Gamma(x+n+1) = x(x+1)(x+2)\ldots(x+n)\,\Gamma(x)$$

per ogni naturale n.

SOLUZIONE. Basta procedere per induzione rispetto a n.

5.4. Inversione della trasformata di Laplace

5.4-P1. Mediante il teorema di convoluzione, determinare l'antitrasformata di Laplace per ciascuna delle funzioni

$$F_0(s) = \frac{1}{(s^2+1)^2}, \quad F_1(s) = \frac{s}{(s^2+1)^2}, \quad F_2(s) = \frac{s^2}{(s^2+1)^2}.$$

SOLUZIONE. Poiché $1/(s^2+1)$ e $s/(s^2+1)$ sono la trasformate di $(\sin t)_+$ e $(\cos t)_+$ rispettivamente, le antitrasformate richieste sono, nell'ordine,

$$f_0(t) = (\sin t)_+ * (\sin t)_+, \quad f_1(t) = (\sin t)_+ * (\cos t)_+,$$

$$f_2(t) = (\cos t)_+ * (\cos t)_+.$$

Per $t \geq 0$ si trova

$$\begin{aligned} f_0(t) &= \int_0^t \sin\tau\,\sin(t-\tau)\,d\tau = \sin t \int_0^t \sin\tau\,\cos\tau\,d\tau - \cos t \int_0^t \sin^2\tau\,d\tau = \\ &= \sin t\,\frac{\sin^2 t}{2} - \cos t\,\frac{t - \sin t\cos t}{2} = \\ &= \frac{1}{2}\,(\sin t - t\cos t). \end{aligned}$$

In modo analogo si trova

$$f_1(t) = \frac{1}{2}\,t\sin t, \quad f_2(t) = \frac{1}{2}\,(t\cos t + \sin t).$$

5.5. Equazioni differenziali ordinarie

5.5-P1 Utilizzare la trasformata di Laplace per risolvere il problema di valori iniziali

$$y'' + 2y' + y = 1$$

con le condizioni $y(0) = -1$, $y'(0) = 1$.

SOLUZIONE. Si trova

$$Y(s) = \frac{1-s-s^2}{s(s+1)^2}.$$

Poiché abbiamo un polo semplice per $s_1 = 0$, e un polo doppio in $s_2 = -1$, avremo una decomposizione in fratti semplice del tipo (si veda la Prop. 4.7-1)

$$Y(s) = \frac{1-s-s^2}{s(s+1)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{(s+1)^2}.$$

La costante A è semplicemente il residuo di $Y(s)$ nel polo $s_1 = 0$, quindi si calcola immediatamente

$$A = \lim_{s\to 0} sY(s) = 1.$$

L'uguaglianza

$$\frac{1-s-s^2}{s(s+1)^2} = \frac{1}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{(s+1)^2}$$

si scrive anche

$$\frac{-3-2s}{(s+1)^2} = \frac{B}{s+1} + \frac{C}{(s+1)^2},$$

dopodiché si possono calcolare i valori $B = -2$ e $C = -1$ col metodo dei coefficienti indeterminati o, più semplicemente, osservando che $-3-2s = -2(s+1)-1$. In definitiva

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{2}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2}$$

da cui $y(t) = 1-(2+t)e^t$ per t ≥ 0.

5.5-P2 Determinare le risposte impulsive per ciascuna delle equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti:

1. $y'' + y = 0$;
2. $y'' + y' + y = 0$;
3. $y'' - y' + y = 0$;
4. $y'' - y = 0$;
5. $y'' + 2y' + y = 0$.

Soluzione. Si tratta di anti-trasformare le funzioni

$$P_1(s) = \frac{1}{s^2+1}; \quad P_2(s) = \frac{1}{s^2+s+1}; \quad P_3(s) = \frac{1}{s^2-s+1};$$
$$P_4(s) = \frac{1}{s^2-1}; \quad P_5(s) = \frac{1}{s^2+2s1} = \frac{1}{(s+1)^2}.$$

Si trovano, nell'ordine, le soluzioni

1. $y_1(t) = (\sin t)_+\,;$
2. $y_2(t) = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\left(e^{-t/2}\sin\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,t\right)\right)_+;$
3. $y_3(t) = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\left(e^{t/2}\sin\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,t\right)\right)_+;$
4. $y_4(t) = (\sinh t)_+\,;$
5. $y_4(t) = (te^{-t})_+\,.$

Si osservi il legame tra il comportamento delle risposte impulsive calcolate e la collocazione, nel piano complesso, degli zeri dei polinomi caratteristici.