6. La trasformata di Fourier Esercizi

http://www.ciram.unibo.it/~barozzi/MI2/PDF/MI2-Cap.6-Ese.pdf

6.1. Introduzione alla trasformata di Fourier

6.2-1. Sia f una funzione sommabile e $\widehat{f}(\omega) := \int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega x} f(x)\,dx$ la sua F-trasformata. Utilizzare il lemma di Riemann-Legesgue (↑ Prop. 3.2-1) per dimostrare che

$$\lim_{|\omega|\to\infty} \widehat{f}(\omega) = 0.$$

Se (ω_n) è una successione convergente a ω_0, verificare che $\lim_{n\to\infty} \widehat{f}(\omega_n) = \widehat{f}(\omega_0)$ (continuità di $\widehat{f}(\omega)$) sfruttando il teorema della convergenza dominata di Lebesgue (↑ Prop. 2.3-1).

Suggerimento ▷ Per dimostrare che $\lim_{|\omega|\to\infty} \widehat{f}(\omega) = 0$, si osservi che, scelto $\varepsilon > 0$, si può trovare in corrispondenza un $r > 0$ tale che

$$\int_{-\infty}^{-r} |f(x)|\,dx + \int_{r}^{\infty} |f(x)|\,dx < \varepsilon/2.$$

Per concludere che $\widehat{f}(\omega)$ è infinitesima all'infinito, applicare il lemma di Riemann-Legesgue (↑ Prop. 3.2-1) all'integrale $\int_{-r}^{r} e^{-i\omega x} f(x)\,dx$.

Soluzione. Riprendendo il ragionamento indicato nel suggerimento, si ha

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega x} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{-r} e^{-i\omega x} f(x)\,dx + \int_{-r}^{r} e^{-i\omega x} f(x)\,dx + \int_{r}^{\infty} e^{-i\omega x} f(x)\,dx,$$

da cui, prendendo i valori assoluti,

$$\left|\int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega x} f(x)\,dx\right| \le \varepsilon/2 + \left|\int_{-r}^{r} e^{-i\omega x} f(x)\,dx\right|.$$

Ma il lemma di Riemann-Legesgue ci assicura che l'ultimo integrale scritto si può rendere in valore assoluto minore di $\varepsilon/2$ a patto che $|\omega|$ sia abbastanza grande.

Per verificare che

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega_n x} f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega_0 x} f(x)\,dx$$

basta osservare che le funzioni $f_n(x) = e^{-i\omega_n x} f(x)$ sono tutte maggiorate in valore assoluto dalla funzione sommabile $|f(x)|$, dunque è applicabile il teorema di Lebesgue.

6.2-2. Con una tecnica simile a quella mostrata nell'esempio 6.1-3, calcolare le seguenti trasformate:

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{x^2 \pm x + 1}\right](\omega) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\, e^{\pm i\,\omega/2}\, e^{-(\sqrt{3}/2)|\omega|},$$

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{x^4 + 1}\right](\omega) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\, e^{-|\omega|/\sqrt{2}} \left(\cos(\omega/\sqrt{2}) + \sin(|\omega|/\sqrt{2})\right).$$

Ritrovare il primo risultato combinando la trasformata della funzione $x \mapsto 1/(x^2+a^2)$ (↑ Tabella 6.2-1) con la Prop. 6.2-2. Dedurre dall'ultimo risultato le trasformate delle funzioni

$$\frac{x}{x^4+1}, \quad \frac{x^2}{x^4+1}.$$

SOLUZIONE. La funzione

$$f(z) = \frac{e^{-i\omega z}}{z^2+z+1}$$

presenta due poli semplici nei punti $z_{1,2} = -1/2 \pm i\sqrt{3}/2$, con residui

$$r_{1,2} = \frac{e^{(\pm\sqrt{3}/2+i/2)\omega}}{\pm i\sqrt{3}},$$

dunque

$$\mathcal{F}\Big[\frac{1}{x^2+x+1}\Big](\omega) = \begin{cases} 2\pi i \cdot r_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\, e^{i\,\omega/2}\, e^{(\sqrt{3}/2)\omega}, & \text{per } \omega < 0, \\ 2\pi i \cdot r_2 = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\, e^{i\,\omega/2}\, e^{-(\sqrt{3}/2)\omega}, & \text{per } \omega > 0. \end{cases}$$

Alternativamente, poiché sappiamo che la trasformata di $1/(a^2+x^2)$ è

$$\frac{\pi}{a}\, e^{-a|\omega|}, \quad a > 0$$

utilizzando la Proposizione 6.2-2 troviamo che la trasformata di

$$\frac{1}{x^2+x+1} = \frac{1}{(x+1/2)^2 + (\sqrt{3}/2)^2}$$

è ancora

$$\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\, e^{i\,\omega/2}\, e^{-(\sqrt{3}/2)|\omega|}.$$

Per quanto riguarda la funzione $x \mapsto 1/(x^4+1)$, si può procedere in modo analogo a quello che abbiamo seguito per l'esercizio precedente, osservando che la funzione

$$f(z) = \frac{e^{-i\omega z}}{z^4+1}$$

presenta nel semipiano $\mathrm{Im}(z) > 0$ i due poli semplici

$$z_1 = e^{i\pi/4} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \quad z_2 = e^{i3\pi/4} = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}$$

e nel semipiano $\mathrm{Im}(z) < 0$ i due poli semplici

$$z_3 = e^{i5\pi/4} = \frac{-1-i}{\sqrt{2}}, \quad z_4 = e^{i7\pi/4} = \frac{1-i}{\sqrt{2}}.$$

In ciascun polo z_k il residuo vale

$$r_k = \frac{e^{-i\omega z_k}}{4z_k^3} = -\frac{z_k}{4}\, e^{-i\omega z_k},$$

in quanto $z_k^4 = -1$.

Dunque per $\omega > 0$ si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\Big[\frac{1}{x^4+1}\Big](\omega) &= -2\pi i(r_3+r_4) = \frac{i\pi}{2}[z_3 e^{-i\omega z_3} + z_4 e^{-i\omega z_4}] = \\ &= \frac{i\pi}{2\sqrt{2}} e^{-\omega/\sqrt{2}} \Big[-(1+i)\big(\cos(\omega/\sqrt{2}) + i\sin(\omega/\sqrt{2})\big) + \\ &= \qquad + (1-i)\big(\cos(\omega/\sqrt{2}) - i\sin(\omega/\sqrt{2})\big)\Big] = \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{2}}\, e^{-\omega/\sqrt{2}}\, \big(\cos(\omega/\sqrt{2}) + \sin(\omega/\sqrt{2})\big). \end{aligned}$$

Scrivendo $|\omega|$ al posto di ω e tenendo conto della parità del coseno, si ottiene il risultato.

Per calcolare poi la trasformata delle funzioni $x/(x^4+1)$ e $x^2/(x^4+1)$ si può applicare la Proposizione 6.2-5. Si trova, ad esempio, per la trasformata della prima funzione (che è reale e dispari):

$$-i\pi e^{-|\omega|/\sqrt{2}}\sin(\omega/\sqrt{2}).$$

6.2-3. Generalizzare la prima funzione del precedente esercizio, mostrando che, per ogni α reale e per ogni $\beta>0$, si ha

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{(x-\alpha)^2+\beta^2}\right](\omega)=\frac{\pi}{\beta}e^{-i\,\alpha\omega}\,e^{-\beta|\omega|}.$$

SOLUZIONE. Basta osservare che la funzione

$$f(z)=\frac{e^{-i\omega z}}{(z-\alpha)^2+\beta^2}$$

presenta poli semplici nei punti $z_{1,2}=\alpha\pm i\beta$, con residui

$$r_{1,2}=\frac{e^{(\pm\beta-i\alpha)\omega}}{\pm 2i\beta}.$$

6.2-4. Verificare che la funzione

$$f(x)=\begin{cases} e^{-ax}, & \text{per } x\geq 0,\\ 0, & \text{altrimenti,}\end{cases}$$

con $a>0$, ha come F-trasformata $1/(a+i\omega)$. Dedurne le trasformate delle funzioni $x\mapsto xf(x)$, $x\mapsto x^2 f(x)$, in generale $x\mapsto x^n f(x)$, per ogni naturale n.

SOLUZIONE. Si ha

$$\widehat{f}(\omega)=\int_0^\infty e^{-i\omega}xe^{-ax}\,d=\left[\frac{e^{-(a+i\omega)x}}{-(a+i\omega)}\right]_0^\infty=\frac{1}{(a+i\omega)}.$$

Per calcolare le trasformate di $xf(x)$, $x^2f(x)$, … , si può applicare la proposizione 6.2-5, ottenendo

$$\mathcal{F}\left[xf(x)\right](\omega)=i\widehat{f}\,'(\omega)=\frac{1}{(a+i\omega)^2},$$

$$\mathcal{F}\left[x^2f(x)\right](\omega)=i\widehat{f}\,''(\omega)=\frac{2}{(a+i\omega)^3},$$

e in generale

$$\mathcal{F}\left[x^2f(x)\right](\omega)=\frac{n!}{(a+i\omega)^{n+1}}.$$

Più semplicemente si può osservare che la trasformata di Laplace del segnale x_+^n essendo $n!/s^{n+1}$, per $\mathrm{Re}(s)>0$, la restrizione di tale trasformata alla retta $a+i\omega$, $\omega\in\mathbb{R}$, ci fornisce la F-trasformata del segnale $f(x)=(x^n e^{-ax})_+$, secondo quanto abbiamo osservato a pag. 244 del testo.

6.2-5. Si consideri l'impulso unitario

$$p_h(x):=\frac{1}{h}\chi_{[-h/2,h/2]}(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{h}, & \text{se } |x|\leq h/2\\ 0, & \text{altrimenti.}\end{cases}$$

Verificare, mediante un calcolo diretto, che

$$(p_h*p_h)(x)=t_h(x):=\frac{1}{h}\left(1-\frac{|x|}{h}\right)^+=\begin{cases}\dfrac{1}{h}\left(1-\dfrac{|x|}{h}\right), & \text{se } |x|\leq h\\ 0, & \text{altrimenti.}\end{cases}$$

Ritrovare lo stesso risultato utilizzando la trasformata di Fourier, sfruttando le trasformate calcolate negli esempi 6.1-1 e 6.2-5.

Soluzione. La funzione $\xi \mapsto p_h(\xi)$ ha come supporto l'intervallo $[-h/2, h/2]$, la funzione $\xi \mapsto p_h(x-\xi)$ ha come supporto l'intervallo $[x-h/2, x+h/2]$; l'intersezione tra tali supporti è dunque

$$[-h/2, h/2] \cap [x-h/2, x+h/2] = \begin{cases} \emptyset, & \text{se } x < -h, \\ [-h/2, x+h/2], & \text{se } -h \le x \le 0, \\ [x-h/2, h/2], & \text{se } 0 \le x \le h, \\ \emptyset, & \text{se } h < x. \end{cases}$$

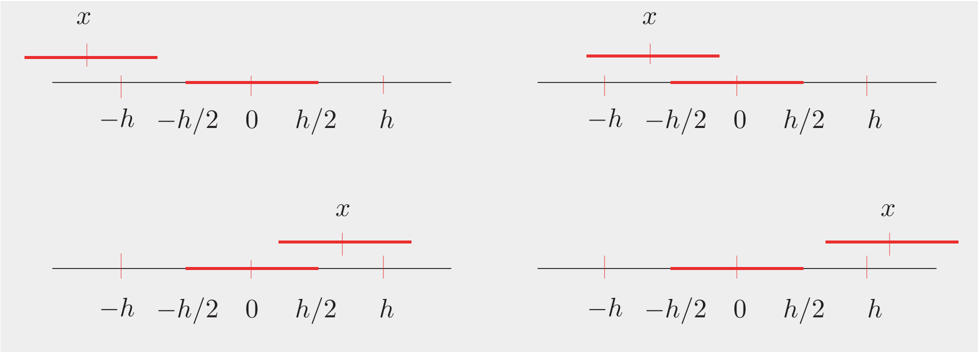

Figura 6.E-1. Mutue posizioni dei supporti delle funzioni $\xi \mapsto p_h(\xi)$ e $\xi \mapsto p_h(x-\xi)$.

Di conseguenza, poiché il prodotto $p_h(\xi)\, p_h(x-\xi)$ vale $1/h^2$ nei punti dell'intersezione appena calcolata, mentre vale 0 nei restanti punti, si ha

$$(p_h * p_h)(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < -h, \\ \dfrac{h+x}{h^2}, & \text{se } -h \le x \le 0, \\ \dfrac{h-x}{h^2}, & \text{se } 0 \le x \le h, \\ 0, & \text{se } h < x. \end{cases}$$

Questo è precisamente il risultato annunciato; salvo le notazioni. Si osservi che la convoluzione appena calcolata si scrive anche, utilizzando i simboli dell'esempio 6.2-5, $g_h(x)/h^2$.

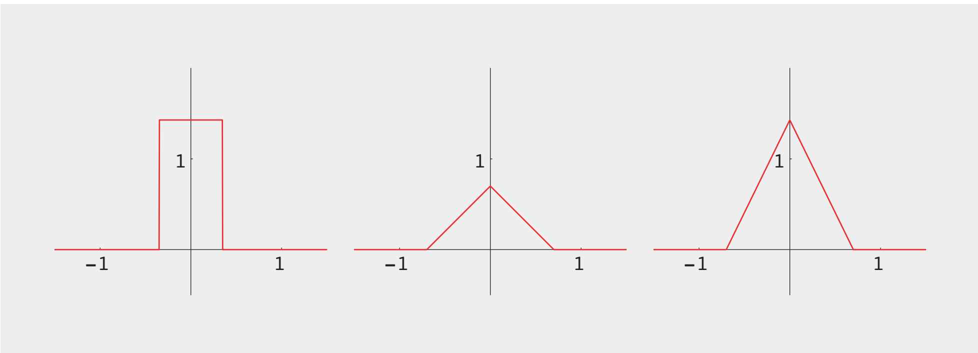

Figura 6.E-2. Da sinistra a destra: grafici degli impulsi $x \mapsto p_h(x)$, $x \mapsto g_h(x)$ e $x \mapsto g_h(x)/h^2 = (p_h * p_h)(x)$, con $h = 0.7$.

D'altra parte p_h ha come F-trasformata (v. esempio 6.1-1)

$$\frac{2}{h}\,\frac{\sin(h\omega/2)}{\omega}$$

dunque $p_h * p_h$ ha come F-trasformata

$$\frac{4}{h^2}\left(\frac{\sin(h\omega/2)}{\omega}\right)^2$$

che sappiamo essere la F-trasformata di $g_h(x)/h^2$.

6.2-6. Con i simboli del precedente esercizio, verificare che

$$(p_h * H)(x) = \begin{cases} 0, & \text{per } x < -h/2 \\ x/h + 1/2, & \text{per } -h/2 \le x \le h/2 \\ 1, & \text{per } x \ge h/2; \end{cases}$$

$$(t_h * H)(x) = \begin{cases} 0, & \text{per } x < -h \\ (x+h)^2/(2h^2), & \text{per } -h \le x \le 0 \\ (-x^2 + 2hx + h^2)/(2h^2), & \text{per } 0 \le x \le h \\ 1, & \text{per } x \ge h. \end{cases}$$

$$(t_h * p_h)(x) = \begin{cases} 0, & \text{per } |x| > 3h/2 \\ (3h+2x)^2/(8h^2), & \text{per } -3h/2 \le x \le -h/2 \\ 3/4 - x^2, & \text{per } -h/2 \le x \le h/2 \\ (3h-2x)^2/(8h^2), & \text{per } h/2 \le x \le 3h/2. \end{cases}$$

$H(x)$ è la funzione di Heaviside. Si osservi che $t_h * p_h = t_h * t_h * t_h$. Verificare che $(t_h * H)(x)$ e $(t_h * p_h)(x)$ sono funzioni di classe $C^{(1)}(\mathbb{R})$.

SOLUZIONE. Si osservi che, per ogni funzioni sommabile f, si ha

$$(f * H)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(\xi) H(x-\xi)\, d\xi = \int_{-\infty}^{x} f(\xi)\, d\xi.$$

Pertanto

$$(p_h * H)(x) = \int_{-\infty}^{x} p_h(\xi)\, d\xi = \begin{cases} 0, & \text{per } x < -h/2 \\ \left(x + \dfrac{h}{2}\right)\dfrac{1}{h} = \dfrac{x}{h} + \dfrac{1}{2}, & \text{per } -h/2 \le x \le h/2 \\ 1, & \text{per } x \ge h/2. \end{cases}$$

Analogamente

$$(t_h * H)(x) = \int_{-\infty}^{x} t_h(\xi)\, d\xi = \begin{cases} 0, & \text{per } x < -h \\ (x+h)^2/(2h^2), & \text{per } -h \le x \le 0 \\ (-x^2 + 2hx + h^2)/(2h^2), & \text{per } 0 \le x \le h \\ 1, & \text{per } x \ge h. \end{cases}$$

Si tenga conto che, per $-h \le x \le 0$, si ha

$$\int_{-\infty}^{x} t_h(\xi)\, d\xi = \frac{1}{h^2}\int_{-h}^{x} (\xi + h)\, d\xi,$$

mentre per $0 \le x \le h$ si ha

$$\int_{-\infty}^{x} t_h(\xi)\, d\xi = \frac{1}{2} + \frac{1}{h^2}\int_{0}^{x} (h - \xi)\, d\xi.$$

Se le funzioni e p_h e t_h vengono considerate come densità di due varibili aleatorie continue, le funzioni $p_h * H$ e $t_h * H$ sono le rispettive funzioni di ripartizione (o funzioni di distribuzione; in inglese: *cumulative distribution functions*).

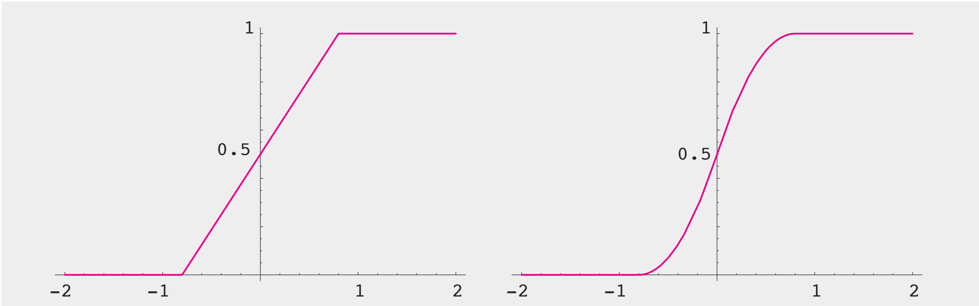

Figura 6.E-3. Grafico della funzione $(p_h * H)(x)$ (a sinistra), della funzione $(t_h * H)(x)$ (a destra); in figura $h = 0.8$. I grafici non sono monometrici.

Il calcolo per la convoluzione $t_h * p_h$ è analogo, tenendo conto del fatto che $\xi \mapsto t_h(\xi)$ ha come supporto l'intervallo $[-h, h]$, mentre $\xi \mapsto p_h(\xi)$ ha come supporto l'intervallo $[-h/2, h/2]$.

6.2-7. Siano f e g due funzioni con i supporti contenuti, rispettivamente, negli intervalli $[a, b]$ e $[c, d]$, vale a dire f è nulla fuori di $[a, b]$, g è nulla fuori di $[c, d]$; verificare che $f * g$ ha il supporto contenuto nell'intervallo $[a + c, b + d]$:

$$(\operatorname{supp} f \subseteq [a, b]) \wedge (\operatorname{supp} g \subseteq [c, d]) \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{supp}(f * h) \subseteq [a + c, b + d].$$

Suggerimento ▷ Per ogni fissato x, il supporto della funzione $\xi \mapsto g(x-\xi)$ è contenuto nell'intervallo $[x - d, x - c]$.

Soluzione. La funzione integranda della convoluzione, $\xi \mapsto f(\xi)g(x - \xi)$, è identicamente nulla per quei valori di x per i quali gli intervalli $[a, b]$ e $[x - d, x - c]$ sono disgiunti, dunque per

$$x - c < a \iff x < a + x, \qquad x - d > b \iff x > b + d.$$

6.2-8. Siano f e g due impulsi unitari, nel senso che si tratta di due funzioni aventi come supporto un intervallo limitato e integrale uguale a 1: $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} g(x)\,dx = 1$. Verificare che $f * g$ è ancora un impulso unitario.

Suggerimento ▷ Utilizzare la trasformata di Fourier per verificare che l'integrale di $f * g$ vale 1.

Soluzione. In base al precedente esercizio $f * g$ è ancora una funzione a supporto compatto. Posto $h = f * g$, si ha poi $\int_{\mathbb{R}} h(x)\,dx = \widehat{h}(0) = \widehat{f}(0)\,\widehat{g}(0) = 1$.

6.2-9. Verificare che la convoluzione tra due funzioni reali pari è ancora reale pari.

Soluzione. Con gli stessi simboli del precedente esercizio, si ha che $\widehat{h}(\omega)$ è una funzione reale pari in quanto prodotto delle funzioni reali pari $\widehat{f}(\omega)$ e $\widehat{g}(\omega)$. Ne segue che anche h è reale pari in virtù della formula di dualità (v. formula (4′) a pag. 244):

$$\widehat{\widehat{h}}(\omega) = 2\pi h(-\omega).$$

Peraltro è immediato che la convoluzione tra due funzioni reali sia reale, mentre non è altrettanto immediato che la convoluzione tra due funzioni pari sia ancora pari. Occorre un calcolo: se f e g sono pari, allora da $(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(\xi)g(x - \xi)\,d\xi$ segue

$$\begin{aligned}(f * g)(-x) &= \int_{\mathbb{R}} f(\xi)\,g(-x - \xi)\,d\xi = \qquad (f \text{ e } g \text{ sono pari})\\ &= \int_{\mathbb{R}} f(-\xi)\,g(x + \xi)\,d\xi = \qquad (t = -\xi)\\ &= -\int_{\infty}^{-\infty} f(t)\,g(x - t)\,dt = \int_{\mathbb{R}} f(t)\,g(x - t)\,dt = (f * g)(x).\end{aligned}$$

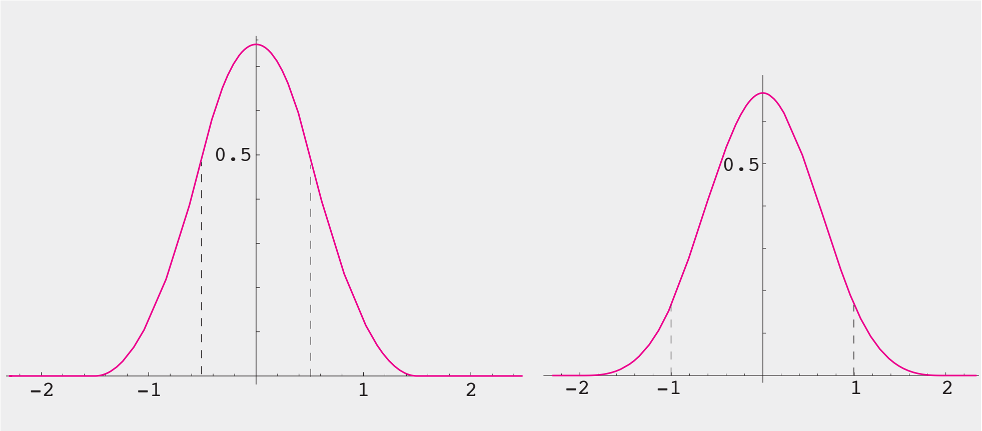

Figura 6.E-4. A sinistra il grafico della funzione $(p_1 * t_1)(x)$ (↑ esercizio 6.2-6), a destra il grafico della funzione $(t_1 * t_1)(x)$ (↑ esercizio 6.2-10). La prima funzione è di classe $C^{(1)}(\mathbb{R})$, la seconda è di classe $C^{(2)}(\mathbb{R})$. I grafici non sono monometrici.

6.2-10. Coi simboli dei precedenti esercizi, verificare che $(t_1 * t_1)(x)$ è la funzione pari che, per $x \geq 0$, vale

$$(t_1 * t_1)(x) = \begin{cases} x^3/2 - x^2 + 2/3, & \text{per } 0 \leq x \leq 1 \\ -x^3/6 + x^2 - 2x + 4/3, & \text{per } 1 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{per } 2 \leq x. \end{cases}$$

Si osservi che $t_1 * t_1 = p_1 * p_1 * p_1 * p_1$. Verificare che $(t_1 * t_1)(x)$ è una funzione di classe $C^{(2)}(\mathbb{R})$; si tratta di una cosiddetta funzione *spline* cubica.

SOLUZIONE. In base al precedente esercizio ci basta calcolare $(t_1 * t_1)(x)$ per $x \geq 0$. La figura seguente mostra le mutue posizioni della funzioni $\xi \mapsto t_1(\xi)$ e $\xi \mapsto t_1(x - \xi)$ a seconda che sia $0 \leq x \leq 1$, $1 \leq x \leq 2$ ed infine $2 \leq x$.

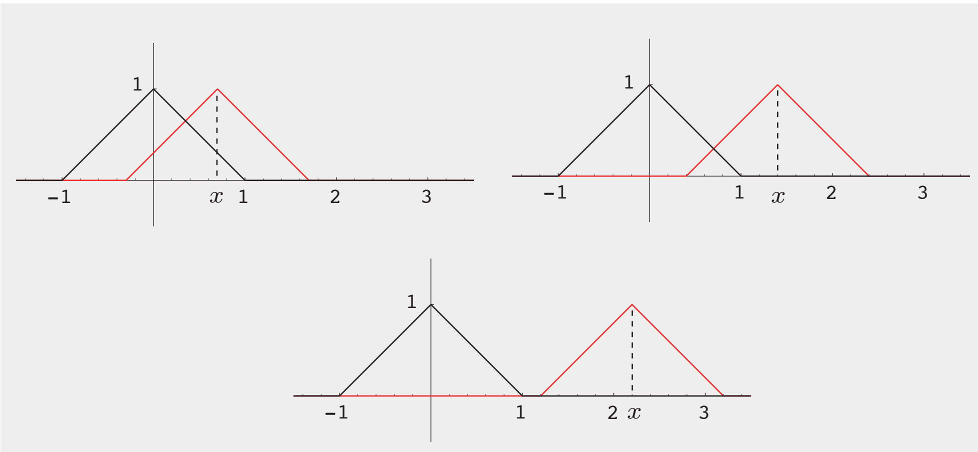

Figura 6.E-5. Mutue posizioni delle funzioni $\xi \mapsto t_1(\xi)$ e $\xi \mapsto t_1(x - \xi)$.

Se $0 \leq x \leq 1$, allora

$$\begin{aligned}(t_1 * t_1)(x) &= \int_{x-1}^{0} (1+\xi)(1-x+\xi)\,d\xi + \int_0^x (1-\xi)(1-x+\xi)\,d\xi + \\ &= \int_x^1 (1-\xi)(1+x-\xi)\,d\xi,\end{aligned}$$

mentre se $1 \le x \le 2$, allora

$$(t_1 * t_1)(x) = \int_{x-1}^{1} (1-\xi)(1-x+\xi)\, d\xi,$$

da cui segue il risultto con un calcolo elementare. Basta poi derivare due volte le espressioni ottenute negli intervalli $0 \le x \le 1$, $1 \le x \le 2$ e $2 \le x$, per verificare che tanto le derivate prime quanto le derivate seconde si raccordano con continuità nei punti di ascissa intera.

6.2-11. Verificare, mediante un calcolo diretto, che la convoluzione della funzione

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2}$$

(densità di una variabile aleatoria normale standard) con se stessa è (↑ esempio 6.2-7)

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\, e^{-x^2/4}.$$

Suggerimento ▷ La convoluzione in questione si scrive

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2/2}\, e^{-(x-t)^2/2}\, dt = \frac{e^{-x^2/2}}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-(t^2-xt)}\, dt;$$

utilizzare il "completamento del quadrato", cioè l'identità $t^2 - xt = (t-x/2)^2 - x^2/4$.
Soluzione. Proseguendo in base al suggerimento si trova

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2/2}\, e^{-(x-t)^2/2}\, dt = \frac{e^{-x^2/2} e^{x^2/4}}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-\xi^2}\, d\xi = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\, e^{-x^2/4}\, dt,$$

avendo operato il cambiamento di variabile $\xi = t - x/2$.

Esercizi proposti

6.2-P1. Calcolare la trasformata di Fourier della funzione reale e pari $x \mapsto f(x)$ che vale $\cos x$ per $|x| \le \pi/2$ e vale 0 nei restanti punti dell'asse reale.
Soluzione. Trattandosi di un segnale reale pari, la F-trasformata si riduce ad una coseno-trasformata

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(\omega x)\, \cos x\, dx = 2 \int_{0}^{\pi/2} \cos(\omega x)\, \cos x\, dx.$$

L'ultimo integrale può essere calcolato con due integrazioni per parti, oppure trasformando l'espressione $\cos(\omega x)\, \cos x$ mediante le cosiddette formule di Werner. Seguendo la prima strada si ha

$$\begin{aligned} I = \int_0^{\pi/2} \cos(\omega x)\, \cos x\, dx &= \big[\sin x\, \cos(\omega x)\big]_0^{\pi/2} + \omega \int_0^{\pi/2} \sin x\, \sin(\omega x)\, dx = \\ &= \cos(\pi\omega/2) + \omega \Big[\big[-\cos x\, \sin(\omega x)\big]_0^{\pi/2} + \omega \int_0^{\pi/2} \cos x\, \cos(\omega x)\, dx\Big] = \\ &= \cos(\pi\omega/2) + \omega^2 I. \end{aligned}$$

Si trova dunque

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{2\cos(\pi\omega/2)}{1-\omega^2},$$

che è ancora una funzione reale pari. Si osservi che la trasformata ottenuta ha singolarità eliminabili nei punti $\omega = \pm 1$, in quanto tali valori sono zeri semplici tanto del numeratore quanto del denominatore.

Alternativamente si può osservare che $f(x) = \chi_{[-\pi/2,\pi/2]} \cos x$, e quindi, essendo nota la F-trasformata di $\chi_{[-\pi/2,\pi/2]}$, si può applicare la formula fornita nell'esempio 6.2-3. Si trova dunque l'espressione

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{1}{2}\left(\frac{2\sin[(\pi/2)(\omega-1)]}{\omega-1} + \frac{2\sin[(\pi/2)(\omega+1)]}{\omega+1}\right).$$

Applicando le formule di addizione alle funzioni a numeratore si ottiene poi

$$\widehat{f}(\omega) = \cos(\pi\omega/2)\left(\frac{-1}{\omega-1} + \frac{1}{\omega+1}\right) = \frac{2\cos(\pi\omega/2)}{1-\omega^2}.$$

6.2-P2. Calcolare la trasformata di Fourier della funzione reale e dispari $x \mapsto f(x)$ che vale $\sin x$ per $|x| \le \pi$ e vale 0 nei restanti punti dell'asse reale.

SOLUZIONE. L'esercizio può essere risolto con la stessa tecnica usata nel precedente. Si trova la trasformata (puramente immaginaria e dispari)

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{2\,i\,\sin(\pi\,\omega)}{\omega^2-1}.$$

6.2-P3. Mediante un calcolo diretto calcolare la F-trasformata della funzione $f(x) = \chi_{[0,a]}(x)$ (impulso di ampiezza unitaria e durata $a > 0$). Ottenere poi la trasformata delle funzioni $x \mapsto \chi_{[0,a]}(x)$ e $x \mapsto \chi_{[0,a]}(x) - \chi_{[-a,0]}(x)$ in base al fatto che queste sono rispettivamente la parte pari e la parte dispari della funzione $x \mapsto 2\chi_{[0,a]}(x)$.

SOLUZIONE. Per la funzione data si trova la trasformata

$$\widehat{f}(\omega) = \int_0^a e^{-i\omega x}\,dx = \left[-\frac{e^{-i\omega x}}{i\omega}\right] = \frac{1-e^{-ia\omega}}{i\omega} = \frac{\sin(a\omega)}{\omega} + i\,\frac{\cos(a\omega)-1}{\omega}.$$

Per la funzione $x \mapsto \chi_{[0,a]}(x)$ si trova dunque la trasformata

$$2\,\mathrm{Re}[\widehat{f}(\omega)] = \frac{2\sin(a\omega)}{\omega},$$

mentre per la funzione $x \mapsto \chi_{[0,a]}(x) - \chi_{[-a,0]}(x)$ si trova la trasformata

$$2i\,\mathrm{Im}[\widehat{f}(\omega)] = 2i\,\frac{\cos(a\omega)-1}{\omega} = i\,\frac{4\sin^2(a\omega/2)}{\omega}.$$

Abbiamo sfruttato l'identità $1 - \cos t = 2\sin^2(t/2)$. Si confronti con gli esempi 6.1-1 e 6.2-2.

6.2-P4. Sia f una funzione sommabile e $\widehat{f}(\omega) = X(\omega) + iY(\omega)$ la sua F-trasformata, con X e Y reali. Dmostrare che se X è pari e Y è dispari, allora $|\widehat{f}(\omega)|$ è pari e $\mathrm{Arg}[\widehat{f}(\omega)]$ è "sostanzialmente" dispari, nel senso che, tranne gli eventuali valori di ω per cui $\widehat{f}(\omega)$ è reale negativa $\big(\iff (X(\omega) < 0) \wedge (Y(\omega) = 0)\big)$, si ha

$$\mathrm{Arg}[\widehat{f}(-\omega)] = -\mathrm{Arg}[\widehat{f}(\omega)].$$

SOLUZIONE. Infatti

$$|\widehat{f}(-\omega)|^2 = X(-\omega)^2 + Y(-\omega)^2 = X(\omega)^2 + \big(-Y(\omega)\big)^2 = X(\omega)^2 + Y(\omega)^2.$$

Si osservi poi che, nelle ipotesi ammesse, $X(-\omega) + iY(-\omega)$ è il coniugato di $X(\omega) + iY(\omega)$, e dunque ha come argomento principale l'opposto dell'argomento principale di quest'ultimo, a meno che esso non sia reale negativo:

$$X(\omega) + iY(\omega) = X(\omega) - iY(\omega) = X(\omega) < 0,$$

quindi $\mathrm{Arg}[\widehat{f}(-\omega)] = \mathrm{Arg}[\widehat{f}(\omega)] = \pi$.

6.2-P5. Utilizzare la tecnica mostrata nell'esercizio 6.2-8 per dimstrare che la convoluzione tra due densità di probabilità (funzioni non negative con integrale unitario su $\mathbb{R}$) è ancora una densità di probabilità.

SOLUZIONE. A quanto mostrato nella soluzione dell'esercizio 6.2-8 basta aggiungere l'osservazione che la convoluzione tra due funzioni non negative è ancora una funzione non negativa.