7. Distribuzioni Commenti

[Revisione: 26 febbraio 2004]

http://www.ciram.unibo.it/~barozzi/MI2/PDF/MI2-Cap.7-Commenti.pdf

La nozione di distribuzione

Un procedimento frequente in Matematica consiste nell'ampliare un insieme (munito di una certa struttura) mediante la costruzione di un secondo insieme che lo contenga e possieda una struttura più ricca.

Così si immerge l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali in quello $\mathbb{Z}$ degli interi, per rendere possibile l'inversione dell'operazione di addizione (sottrazione), si immerge $\mathbb{Z}$ nell'insieme $\mathbb{Q}$ dei razionali per rendere possibile l'inversione dell'operazione di moltiplicazione (divisione).

Un ulteriore passo è la costruzione dell'insieme $\mathbb{R}$ dei reali, nel quale è possibile l'operazione di estrazione di radice di un qualsivoglia numero positivo; $\mathbb{R}$ ha una struttura di *campo ordinato e completo*: ogni insieme limitato superiormente (inferiormente) ammette estremo inferiore (risp. inferiore). Rinunciando all'ordinamento, si può finalmente costruire il campo complesso $\mathbb{C}$ che è *algebricamente chiuso*: ogni polinomio a coefficienti in $\mathbb{C}$ ammette almeno uno zero in $\mathbb{C}$ stesso (v. Proposizione 4.6-4).

A livello di spazi funzionali, abbiamo visto come l'insieme delle funzioni Riemann-integrabili possa essere ampliato in quello delle funzioni Lebesgue-integrabili (funzioni *sommabili*), ottenendo così uno spazio normato completo (spazio di Banach).

Quando si considerano equazioni differenziali ordinarie, ad esempio a coefficienti costanti, si cercano soluzioni *regolari*, cioè soluzioni che abbiano continue tutte le derivate che compaiono nell'equazione data. Una funzione che ammetta un punto di discontinuità non è derivabile nello stesso punto, e dunque non è accettabile come soluzione di un'equazione differenziale, almeno nel senso classico del termine.

Numerose questioni nell'ambito delle applicazioni suggeriscono di "immergere" le funzioni, o almeno un insieme abbastanza ricco di funzioni, in un àmbito più vasto nel quale sia ben definita l'operazione di derivazione.

Per conseguire tale scopo, occorre pensare non tanto alla funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, intesa come una corrispondenza che ad ogni $x \in \mathbb{R}$ associa in numero complesso, quanto piuttosto all'*azione* che la f può compiere su un insieme di funzioni, che chiameremo *funzioni test*, dove tale azione consiste nell'integrazione del prodotto della funzione f per la funzione test. Per assicurarci la massima generalità possibile, sceglieremo funzioni test continue e a supporto compatto, cioè nulle fuori di un intervallo compatto, in modo tale che, se v è una di tali funzioni test, l'integrale

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\, v(x)\, dx$$

converga per un'ampia scelta di funzioni f.

Ad esempio, si ha convergenza per tutte le funzioni *localmente sommabili*, cioè le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ per cui è sommabile la restrizione ad *ogni* intervallo compatto $[a, b]$ della retta reale. In effetti se il supporto di v è contenuto in $[a, b]$, l'ultimo integrale scritto può essere considerato come un integrale sullo stesso intervallo, ed è chiaro che la funzione fv, in quanto prodotto di una funzione sommabile per una funzione limitata, è sommabile su $[a, b]$:

$$\Big| \int_{\mathbb{R}} f(x)\, v(x)\, dx \Big| = \Big| \int_a^b f(x)\, v(x)\, dx \Big| \le \int_a^b |f(x)\, v(x)|\, dx \le \|v\|_\infty \int_a^b |f(x)|\, dx < \infty.$$

La classe delle funzioni localmente sommabili è molto ampia: essa contiene, ovviamente, tutte le funzioni sommabili su $\mathbb{R}$, ma anche tutte le funzioni continue, o anche soltanto continue a tratti su $\mathbb{R}$, senza alcuna restrizione sul comportamente all'infinito.

Il più semplice esempio di funzione localmente sommabile, ma non sommabile su $\mathbb{R}$, è dato da una funzione costante $f(x) = c \neq 0$. La funzione $f(x) = 1/x$ non è localmente sommabile, non essendo sommabile la sua restrizione ad un qualsivoglia intervallo contenente l'origine. Cionostante è possibile associare ad essa una distribuzione (il cosiddetto *valore principale* di $1/x$) essenzialmente sfruttando la disparità della stessa funzione (v. Esempio 7.1-9).

Indicheremo l'insieme delle funzioni localmente sommabili col simbolo $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$.

Per meglio capire perché sia ragionevole considerare non tanto la funzione f in quanto tale, ma la trasformazione

$$v \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x)\, v(x)\, dx$$

che essa induce, può essere utile considerare la situazione, in qualche modo analoga, relativa alle matrici. Una matrice $\boldsymbol{A}$ di dimensioni $m \times n$ è una collezione di $m \cdot n$ numeri reali o complessi, che possiamo organizzare in forma di tabella nel modo consueto:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

In realtà $\boldsymbol{A}$ è una funzione definita sull'insieme $\{1, 2, \dots, m\} \times \{1, 2, \dots, n\}$, dove l'elemento associato alla coppia (i, j) viene indicata a_{ij}. Una tabella del tipo appena scritto non è tanto interessante di per sé, quanto piuttosto per la *trasformazione lineare* che essa induce: si tratta della trasformazione di $\mathbb{C}^n$ in $\mathbb{C}^m$ definita da

$$x \mapsto \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{mj} x_j \end{bmatrix}$$

dove $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$. Possiamo indicare questa trasformazione col simbolo $T_{\boldsymbol{A}}$:

$$T_{\boldsymbol{A}} : \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}.$$

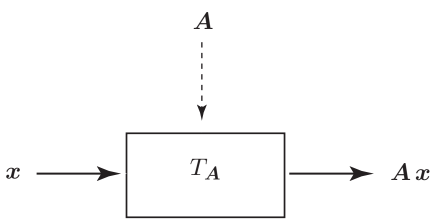

Figura 1.
Ad ogni matrice $m \times n$ è associata una trasformazione lineare di $\mathbb{C}^n$ in $\mathbb{C}^m$.

Si osservi che, se $m = 1$, il risultato è semplicemente un numero complesso, cioè $T_{\boldsymbol{A}}$ trasforma $\mathbb{C}^n$ in $\mathbb{C}$.

La situazione è analoga per le funzioni. Data una funzione localmente sommabile f, consideriamo la trasformazione T_f dello spazio delle funzioni test in $\mathbb{C}$ data da

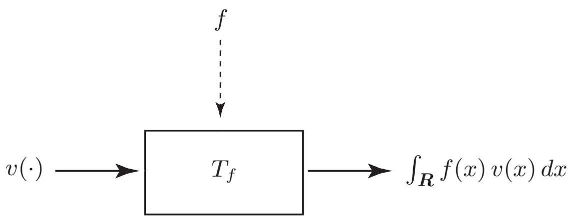

Figura 2.
Ad ogni funzione localmente sommabile si può associare un funzionale lineare su $C_0^{(\infty)}(\mathbb{R})$.

$$T_f : v(\cdot) \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x)\, v(x)\, dx.$$

Per ragioni che risulteranno chiare via via che si svilupperà la teoria (sostanzialmente per poter introdurre la nozione di derivata di un qualsivoglia ordine per una trasformazione del tipo appena introdotto) conviene limitarsi a considerare fuzioni test che siano non solo continue, ma infinitamente derivabili, cioè di classe $C^{(\infty)}(\mathbb{R})$. Non è immediato che esistano funzioni di questo tipo (diverse dalla funzione identicamente nulla). L'insieme delle funzioni test viene indicato $C_0^{(\infty)}(\mathbb{R})$, o anche $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Una trasformazione come la T_f viene abitualmente chiamata un *funzionale* sullo spazio $C_0^{(\infty)}(\mathbb{R})$. Dunque un funzionale è una trasformazione che accetta in ingresso funzioni test e restituisce in uscita numeri complessi.

Abbiamo appena visto ad ogni funzione localmente sommabile f possiamo associare il funzionale T_f. Si tratta evidentemente di un funzionale *lineare*, nel senso che, per ogni coppia di funzioni test v_1, v_2 e per ogni coppia di costanti c_1, c_2, si ha

$$T_f(c_1v_1 + c_2v_2) = T_f(c_1v_1) + T_f(c_2v_2).$$

Nel caso delle matrici, considerato poco sopra, la trasformazione $T_{\boldsymbol{A}} : \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}$ non è soltanto lineare, ma anche *continua*, nel senso che, quali che siano le norme considerate sugli spazi $\mathbb{C}^n$ e $\mathbb{C}^m$, se $\boldsymbol{x}_k$ è una successione di elementi di $\mathbb{C}^n$ che tende al vettore nullo, lo stesso accade per la successione $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}_k$ in $\mathbb{C}^m$:

$$\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{0} \ \ (\text{in } \mathbb{C}^n) \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{k\to\infty} \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{0} \ (\text{in } \ \mathbb{C}^m).$$

(Ricordiamo che negli spazi vettoriali di di dimensione finita tutte le norme sono equivalenti; v. Proposizione 1.2-1.)

Per dare senso all'analoga questione nel caso del funzionale $T_f : x \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x)\, v(x)\, dx$, da $C_0^{(\infty)}(\mathbb{R})$ a $\mathbb{C}$, occorre introdurre una nozione di convergenza nello spazio delle funzioni test. Questo è fatto nella Definizione 7.1-2 del testo, che non staremo a ripetere.

Occorre osservare, che al solo scopo di garantire l'implicazione

$$v_k \to 0 \quad \Longrightarrow \quad T_f(v_k) \to 0,$$

basta la condizione sui supporti delle v_k, unita alla convergenza uniforme a 0 della successione (v_k), senza ulteriori condizioni sulle derivate delle funzioni v_k (v. Esempio 7.1-2).

Ci si chiede se la corrispondenza che ad f associa T_f sia *iniettiva*, cioè se a funzioni diverse corrispondano funzionali diversi. La risposta è affermativa e costituisce la Proposizione 7.1-1. Ciò significa che f può essere ricostruita a partire dalla conoscenza degli integrali $\int_R f(x)v(x)\, dx$, con $v \in C_0^{(\infty)}(\mathbb{R})$.

La situazione non è diversa da quella che si presenta per le serie di Fourier: se f è una funzione "abbastanza regolare", periodica di periodo T, la conoscenza dei coefficienti di Fourier, in definitiva la conoscenza degli integrali $\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\, e^{in\omega x}\, dx$, $n \in \mathbb{Z}$, $\omega = 2\pi/T$, permette di ricostruire la funzione f.

A questo punto l'analogia con le matrici, che abbiamo ricordato poco sopra, non regge più. Infatti esiste un *isomorfismo* tra lo spazio vettoriale delle matrici $m \times n$ quello delle trasformazioni lineari di $\mathbb{C}^n$ in $\mathbb{C}^m$, nel senso che *tutte* le trasformazioni lineari in questione sono rappresentabili nella forma matrice $m \times n$ applicata ad un vettore di dimensione n.

Al contrario, non tutti i funzionali lineari continui da $C_0^{(\infty)}(\mathbb{R})$ a $\mathbb{C}$ sono rappresentabili sotto forma di integrale di una funzione localmente sommabile moltiplicata per la funzione test; questo vale solo per alcuni funzionali, mentre non vale per altri. L'eccezione più notevole è la cosiddetta *delta* di Dirac, cioè la corrispondenza che a v associa $v(0)$.

Si parla talvolta, impropriamente, di *funzione impulsiva*, cioè di un'ipotetica funzione $\delta(x)$ che dovrebbe realizzare l'uguaglianza

$$\int_R \delta(x)\, v(x)\, dx = v(0)$$

per ogni funzione test v. Sfortunatamente una tale funzione non esiste! Si veda l'Esempio 7.1-3.

successioni di funzioni che generano la delta

Tuttavia la dicitura "funzione impulsiva" contiene un grano di verità nel senso che ciò che non è realizzabile mediante una singola funzione può essere ottenuto mediante una successione di funzioni il cui sottografico sia progressivamente concentrato nell'origine.

Sia f una funzione sommabile con integrale unitario $\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx = 1$; ad esempio possiamo scegliere un impulso di ampiezza e durata unitari:

$$f(x) = \chi_{[a-1/2, a+1/2]}(x)$$

con a reale ad arbitrio. Poniamo poi

$$f_k(x) := k\, f(kx), \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Geometricamente: comprimiamo il grafico di f del fattore k nel senso delle ascisse e dilatiamolo dello stesso fattore nel senso delle ordinate.

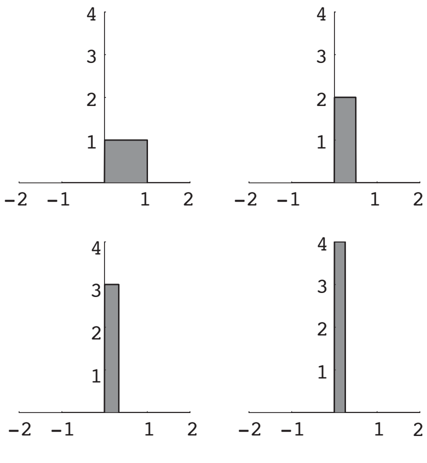

Figura 3.
A partire da un impulso di ampiezza e durata unitari, si genera una successione che converge alla delta di Dirac

Si ha allora

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_k(x)\, v(x)\, dx = v(0)$$

per ogni funzione test v (v. Esempio 7.1-7).

Riassumendo: una distribuzione è, per definizione, un funzionale lineare continuo da $C_0^{(\infty)}(\mathbb{R})$ a $\mathbb{C}$. Useremo notazioni funzionali per le distribuzioni, ad esempio parleremo della distribuzione f, e indicheremo il valore che f assume in corrispondenza della fuzione test v col simbolo

$$\langle f, v \rangle.$$

Scriveremo anche $\langle f(x), v(x) \rangle$, ma ciò *non significa* che f sia una funzione di x, ma soltanto che x è il *nome* che viene dato alla variabile indipendente della funzione test v.

Dunque il simbolo $f(x)$ *non* è il valore della distribuzione f nel punto x, valore che semplicemente *non esiste*, in generale.

Se f è una funzione localmente sommabile, scriveremo semplicemente f al posto di T_f, cioè faremo una (deliberata) confusione tra la funzione f e il funzionale (= distribuzione) che essa genera. Dunque la distribuzione $\sin x$ è la corrispondenza $v \mapsto \int_{\mathbb{R}} \sin x\, v(x)\, dx$, la distribuzione 1 è la corrispondenza $v \mapsto \int_{\mathbb{R}} 1 \cdot v(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} v(x)\, dx$, e così via.

Indicheremo lo spazio delle distribuzioni col simbolo $\mathcal{D}'$. Nello spazio delle distribuzioni definiamo una nozione di convergenza, detta *convergenza debole*, analoga alla convergenza puntuale per le funzioni (v. Definizione 7.1-4). Diremo che la successione di distribuzioni (f_k) converge alla distribuzione f se convergenza debole

$$\forall v \in C_0^{(\infty)}(\mathbb{R}), \qquad \lim_{k\to\infty} \langle f_k(x), v(x)\rangle = \langle f(x), v(x)\rangle.$$

La definizione si estende in modo ovvio al caso di famiglie f_λ di distribuzioni dipendenti da un parametro λ che varia in modo continuo. Ad esempio, la Tabella 7.1-1 mostra alcune famiglie di funzioni f_λ, con $\lambda > 0$, che tendono alla distribuzione δ per $\lambda \to \infty$.

Raccogliamo in forma di tabella alcune successioni di funzioni che convergono a limiti opportuni, nel senso delle distribuzioni.

successione	limite	
$\sin(kx)$	0	Esempio 7.1-5
$\cos(kx)$	0	Esempio 7.1-5
$\sin^2(kx)$	$1/2$	Esempio 7.1-6
$\dfrac{\sin(kx)}{x}$	$\pi\delta(x)$	Esempio 7.1-8
$\dfrac{\cos(kx)}{x}$	0	Esempio 7.2-2
$\dfrac{e^{ikx}}{x}$	$i\pi\delta(x)$	Esempio 7.2-2

Si osservi che la successione $k \mapsto \sin(kx)$ è *irregolare*, cioè priva di limite, per quasi ogni $x \in \mathbb{R}$, e precisamente per tutti gli x che non sono multipli interi di π (v. Esercizio 4.1-4). Abbiamo osservato (pag. 273 del testo) che la convergenza a 0 (nel senso delle distribuzioni) delle successioni $k \mapsto \sin(kx)$ e $k \mapsto \cos(kx)$ ci consente una rilettura del lemma di Riemann-Lebesgue (v. Prop. 3.2-1).

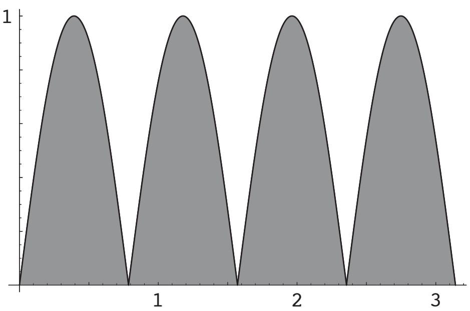

Figura 4.
La funzione $x \mapsto |\sin(kx)|$ è periodica di periodo π/k. In figura il caso $k = 4$.

Osserviamo peraltro le stesse successioni non tendono a 0 in $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, nel senso che non si ha

$$\lim_{k\to\infty} \int_a^b |\sin(kx)|\, dx = 0$$

per ogni intervallo $[a,b]$ della retta reale. Ad esempio, sfruttando il fatto che $x \mapsto |\sin(kx)|$ è una funzione periodica di periodo π/k, si trova facilmente

$$\int_0^{\pi} |\sin(kx)|\, dx = k \int_0^{\pi/k} |\sin(kx)|\, dx = k\,\frac{2}{k} = 2,$$

per ogni $k > 0$.

I rapporti $\cos(kx)/x$ e e^{ikx}/x vanno interpretati come prodotti di $\cos(kx)$, e rispettivamente e^{ikx}, per la distribuzione v.p.$(1/x)$.

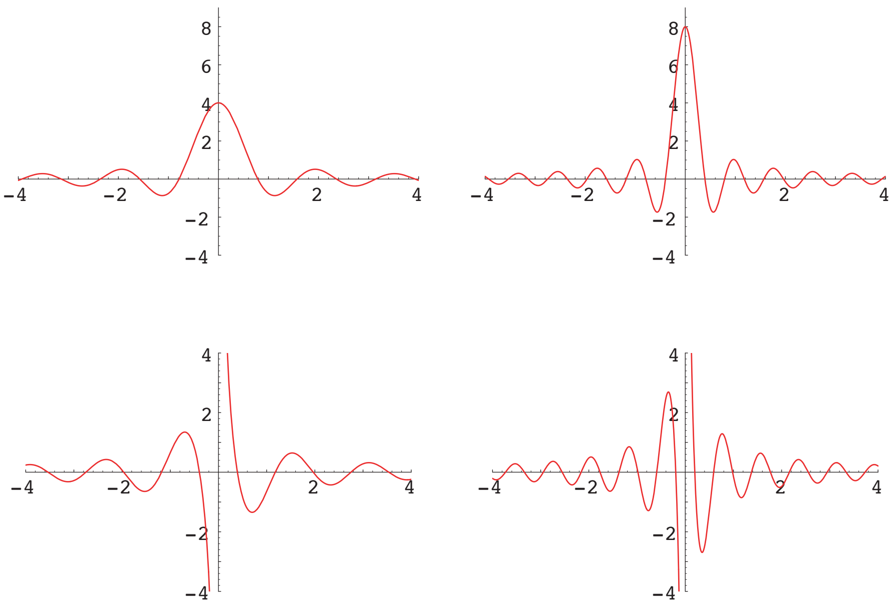

Figura 5. Sopra: grafici delle funzioni $(\sin 4x)/x$ e $(\sin 8x)/x$; sotto: grafici delle funzioni $(\cos 4x)/x$ e $(\cos 8x)/x$.

derivata Abbiamo detto all'inizio che uno degli scopi della teoria delle distribuzioni è la costruzione di un ambiente che contenga un'ampia classe di funzioni (in base all'identificazione: funzione localmente sommabile f = distribuzione f) e al tempo stesso consenta la definizione di un'operazione che sia lecito chiamare *derivazione*.

Tale operazione assocerà ad ogni distribuzione un'altra distribuzione che chiameremo *derivata* della precedente. Naturalmente vogliamo fare ciò in modo tale che, se f è una distribuzione definita mediante una funzione regolare (ad esempio di classe $C^{(1)}(\mathbb{R})$), la distribuzione derivata sia quella definita mediante la funzione f'.

In altre parole, vogliamo che l'operazione di derivazione che stiamo per definire in $\mathcal{D}'$, ristretta alle distribuzioni definite mediante funzioni derivabili, restituisca la stessa operazione che già conosciamo in tale àmbito più ristretto.

Ciò è analogo a quanto abbiamo fatto quando abbiamo definito le operazioni tra numeri. Ogni volta che l'insieme numerico viene ampliato (passando ta $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Z}$, da $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Q}$, da $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$ e infine di $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$), ci si preoccupa che le operazioni definite nel nuovo insieme "vadano d'accordo" che quelle che già avevamo definito nel vecchio insieme.

Se f è una funzione di classe $C^{(1)}(\mathbb{R})$, le distribuzioni f e f' sono date rispettivamente da

$$v \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x)\, v(x)\, dx, \qquad v \mapsto \int_{\mathbb{R}} f'(x)\, v(x)\, dx;$$

un'integrazione per parti mostra che si ha

$$\int_{\mathbb{R}} f'(x)\, v(x)\, dx = -\int_{\mathbb{R}} f(x)\, v'(x)\, dx.$$

Se dunque vogliamo che f' sia anche la derivata di f nel senso delle distribuzioni, la scelta è obbligata: per ogni distribuzione f (sia essa generata da una funzione o meno) dobbiamo definire la distribuzione f' nel modo seguente

$$\langle f', v\rangle := -\langle f, v'\rangle.$$

È quanto abbiamo fatto mediante la formula (5) di pag. 278. Si osservi che a secondo membro c'è effettivamente un distribuzione (cioè un funzionale lineare continuo su $\mathcal{D}$), per il modo con cui è stata definita la convergenza in $\mathcal{D}$. Se (v_k) è una successione che tende a 0 nel senso della convergenza introdotta nello spazio $\mathcal{D}$, lo stesso accade per la successione delle derivate prime (v'_k). Si comprende meglio, a questo punto, perché la convergenza nello spazio $\mathcal{D}$ sia introdotta nel modo visto a suo tempo.

A questo punto ogni distribuzione è derivabile, la derivata di una distribuzione essendo ancora una distribuzione, e non necessariamente una funzione, anche se la distribuzione data è indotta da una funzione. L'esempio più semplice al riguardo è costituito dal gradino unitario (alias funzione di Heaviside) $x \mapsto u(x)$, per cui risulta $u'(x) = \delta(x)$.

Si osservi che l'operazione di derivazione in àmbito distribuzioni è un'operazione di "tipo globale" e non locale, a differenza di quanto accade per le funzioni. In àmbito funzionale ha senso chiedersi se una funzione è derivabile in un certo punto, mentre la stessa domanda non ha alcun senso nell'àmbito delle distribuzioni.

Abbiamo già visto che se f è continua con derivata continua, allora la derivata di f nel senso delle distribuzioni coincide con la derivata classica. In particolare la derivata di una costante è 0; ciò equivale ad affermare che per ogni funzione test v si ha $\int_{\mathbb{R}} f'(x)\, v(x)\, dx = 0$. È vero anche il viceversa, ma la dimostrazione non è affatto banale e non ha niente a che vedere con l'analoga dimostrazione per le funzioni di una variabile reale (v. Prop. 7.2-1).

Per le derivate delle distribuzioni valgono regole analoghe a quelle che valgono per le funzioni, in particolare la derivata di una somma è uguale alla somma delle derivate. Non ha alcun senso il prodotto di due distribuzioni; tuttavia è definito il prodotto di una funzione $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, infinitamente derivabile, per una distribuzione f: si ha ancora $(\alpha\, f)' = \alpha'\, f + \alpha\, f'$ (v. esercizio 7.2-5).

Delicata (e importantissima) è la relazione tra la derivata in senso classico e la derivata nel senso delle distribuzioni per una funzione f che sia *continua a tratti*, intendendo con ciò che la restrizione di f ad un qualunque intervallo compatto $[a, b]$ presenta, al più, un numero finito di punti di discontinuità di prima specie (discontinuità di salto). L'insieme dei punti di discontinuità è pertanto un insieme *discreto* (= privo di punti di accumulazione) in $\mathbb{R}$.

Il legame è chiarito nell'Esempio 7.2-6. Limitandosi al caso di un punto di discontinuità, sia x_0, se indichiamo con $f'(x)$ la derivata nel senso delle distribuzioni e con $Df(x)$ la derivata in senso classico (che esiste q.o. in $\mathbb{R}$) si ha

$$f'(x) = Df(x) + s \cdot \delta(x - x_0)$$

dove s è il salto in x_0: $s = f(x_0^+) - f(x_0^-)$. Si osservi che per il gradino unitario si ha $Du(x) = 0$ per ogni $x \neq 0$, dunque $Du(x) = 0$ q.o. in $\mathbb{R}$. Si osservi ancora che il valore attribuito alla funzione in esame per $x = 0$ è del tutto ininfluente sulla derivata.

La definizione di derivata (prima) si estende in modo ovvio alle derivate di ordine superiore (v. formula (5′), pag. 279). Un esempio notevole è costituito dalla famiglia di funzioni

$$f_n(x) := \left(\frac{x^n}{n!}\right)_+ = \begin{cases} \dfrac{x^n}{n!}, & \text{per } x > 0 \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Per $n = 0$, si ritrova il gradino unitario. La funzione f_n è di classe $C^{(n-1)}(\mathbb{R})$, e la sua derivata $(n-1)$-esima vale x_+, cioè 0 per $x < 0$ e x per $x \geq 0$. Ne segue che la derivata

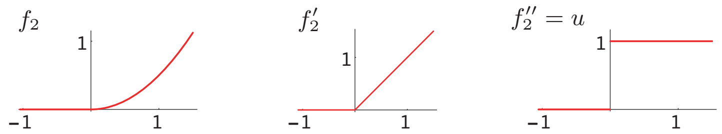

Figura 6. La funzione f_2 e le sue derivate prima e seconda.

n-esima esiste per ogni $x \neq 0$ e coincide col gradino unitario e di conseguenza la derivata successiva, di ordine $n+1$, è la $\delta(x)$:

$$f_n^{(n+1)}(x) = \delta(x).$$

Ad esempio, per la funzione $f_1(x) = x_+$ si ha $f_1''(x) = \delta(x)$.

Quanto vale per una singola derivata, vale per un operatore differenziale lineare a coefficienti costanti, o, più in generale, a coefficienti di classe $C^{(\infty)}$. Supponiamo, per semplicità di avere a che fare con un operatore differenziale del secondo ordine del tipo

$$L[y] = y'' + q(x)\,y'(x) + r(x)\,y(x),$$

dove p ed r sono funzioni di classe $C^{(\infty)}(\mathbb{R})$. Se y è una funzione di classe $C^{(1)}$ la cui derivata prima ha una discontinuità di prima specie nell'origine, ed è dotata di derivata seconda continua per $x \neq 0$, possiamo considerare $L[y]$ nel senso delle distribuzioni: avremo

$$L[y] = D^2y(x) + q(x)\,y'(x) + r(x)\,y(x) + s_1 \cdot \delta(x),$$

dove s_1 è il salto della derivata prima nell'origine

$$s_1 = f'(0^+) - f'(0^-).$$

Si osservi che abbiamo scritto $D^2y(x)$ per specificare che si tratta della derivata in senso classico, derivata che esiste per ipotesi per ogni $x \neq 0$; un'analoga distinzione non si rende necessaria per la derivata prima.

soluzione fondamentale

Se $y(x)$ è soluzione (in senso classico) dell'equazione omogenea $L[y] = 0$ sia per $x < 0$ che per $x > 0$, mentre la derivata prima ha un salto nell'origine pari ad 1, avremo

$$L[y] = \delta(x).$$

Diremo che y è una *soluzione fondamentale* dell'equazione $L[y] = f$.

Quanto detto per un'equazione del secondo ordine si estende ad equazioni lineari di ordine qualunque. Riprendendo quanto abbiamo visto nel paragrafo 5.5 (v. pag. 228 e ss.) consideriamo un'equazione di ordine n a coefficienti costanti del tipo

$$L[y] = y^{(n)}(x) + b_{n-1}\,y^{(n-1)}(x) + \ldots + b_0\,y(x),$$

e consideriamo il problema di valori iniziali

$$L[y] = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \; \ldots, \; y^{(n-2)}(0) = 0, \quad y^{(n-1)}(0) = 1.$$

Se applichiamo la trasformata di Laplace, siamo condotti all'inversione della funzione

$$Y(s) = \frac{1}{P(s)}$$

dove $P(s) = s^n + b_{n-1}\,s^{n-1} + \ldots + b_n$ è il polinomio caratteristico dell'operatore L. La fomula d'inversione ci fornisce un segnale

$$y_0(x) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)](x)$$

che è nullo per $x < 0$ e risolve il problema dato per $x \geq 0$. Tale segnale è di classe $C^{(n-2)}(\mathbb{R})$. Infatti $y_0(x)$ è infinitamente derivabile per $x \neq 0$, e ciascuna delle sue derivate fino all'ordine $n-2$ è continua nell'origine (in quanto in tale punto si annullano sia la derivata a destra che la derivata a sinistra). Al contrario, la derivata di ordine $n-1$ ha un salto uguale a 1 nell'origine, dunque se consideriamo la *distribuzione* $L[y_0]$ si ha

$$L[y_0] = \delta(x).$$

Distribuzioni temperate

Lo spazio $\mathcal{S}$ (di L. Schwartz) è uno spazio ad hoc per la FT (trasformata di Fourier) nel senso che $s \in \mathcal{S}$ implica $\widehat{v} \in \mathcal{S}$ (v. Prop. 6.2-7). Lo spazio in questione contiene $\mathcal{D}$ come sottospazio proprio (controesempio di funzione che sta in $\mathcal{S}$ ma non in $\mathcal{D}$ può essere $v(x) = \exp(-x^2)$); inoltre la nozione di convergenza di $\mathcal{S}$ (v. Definizione 7.3-1) è tale che se $v_k \to 0$ in $\mathcal{D}$, allora a più forte ragione $v_k \to 0$ in $\mathcal{S}$.

Un controesempio al riguardo, cioè una successione di funzioni a supporto compatto che tende a 0 in $\mathcal{S}$ e non in $\mathcal{D}$ è fornita nell'Esempio 7.3-1 del testo. Questo dimostra che la convergenza in $\mathcal{S}$ è effettivamente più debole della convergenza in $\mathcal{D}$.

Inoltre la convergenza in $\mathcal{S}$ è definita in modo tale che se $v_k \to 0$ in $\mathcal{S}$, allora per ogni polinomio p, la successione pv_k tende ancora a 0 in $\mathcal{S}$.

Le *distribuzioni temperate* sono funzionali lineari continui su $\mathcal{S}$; per quanto appena detto, una distribuzione temperata è ovviamente una distribuzione, mentre non ogni distribuzione è temperata. Il controesempio più semplice si ottiene se ci si chiede quando una funzione localmente sommabile è in grado di generare una distribuzione temperata secondo il meccanismo illustrato dalla Figura 2; si riconosce che se f cresce troppo rapidamente all'infinito, ad esempio se $f(x) = e^x$, allora f non è una distribuzione temperata (v. Esempio 7.3-2).

La delta di Dirac è temperata: se e $v_k \to 0$ in $\mathcal{S}$, allora $v_k(0) \to 0$ (la convergenza uniforme implica la convergenza puntuale).

Inoltre, così come la condizione $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ (f localmente sommabile) è sufficiente affinché f sia (meglio: induca) una distribuzione, la condizione di essere a crescenza lenta, cioè $f = pf_1$ con p polinomio e f_1 sommabile su $\mathbb{R}$ (v. pag. 282), è sufficiente affinché f sia una distribuzione temperata.

Abbiamo visto che se f è sommabile su $\mathbb{R}$, essa è a crescenza lenta dunque è una distribuzione temperata. La sua FT, in senso classico appartiene a $L^\infty(\mathbb{R})$; per ogni $v \in S$ è allora sommabile il prodotto $\widehat{f}\, v$ (prodotto di una funzione limitata per una funzione sommabile, dunque ancora una funzione sommabile) e un'applicazione del teorema di Fubini mostra che

$$\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi)\, v(\xi)\, d\xi = \int_{\mathbb{R}} f(\xi)\, \widehat{v}(\xi)\, d\xi.$$

A questo punto la definizione di FT di una distribuzione temperata è obbligata, se non vogliamo che la FT di una funzione sommabile f, intesa nel senso classico, sia diversa dalla FT della stessa f in quanto distribuzione temperata. Per ogni distribuzione temperata f (sia essa definita a partire da una funzione oppure no) porremo (v. Definizione 7.3-3)

$$\langle \widehat{f}, v \rangle := \langle f, \widehat{v} \rangle.$$

In base a questa definizione si trova la notevole coppia di trasformate

$$\delta(x) \to 1, \qquad 1 \to 2\pi\, \delta(\omega),$$

se si utilizza le definizione di FT in termini di pulsazione ω, mentre si hanno le relazioni

$$\delta(t) \to 1, \qquad 1 \to \delta(f),$$

se si utilizza la definizione di FT in termini di frequenza f.

Le tabelle 7.3-1 e 7.3-1′ contengono una significativa collezione di FT calcolate secondo entrambe le definizioni.