7. Distribuzioni
Esercizi

[Revisione: ottobre 2004]

http://www.ciram.unibo.it/~barozzi/MI2/PDF/MI2-Cap.7-Ese.pdf

7.1. Il concetto di distribuzione

7.1-1. Consideriamo la funzione

$$f(x) := (e^{-1/x})_+ = \begin{cases} e^{-1/x}, & \text{per } x > 0\ , \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Si dimostri che essa è di classe $C^{(\infty)}(\mathbb{R})$, verificando innanzitutto che $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$, e successivamente che una relazione analoga vale per ciascuna delle derivate.

Suggerimento ▷ Si dimostri, procedendo per induzione, che per $x > 0$ ciascuna delle derivate della funzione f si può scrivere come prodotto $p_n(1/x)\, f(x)$, dove p_n è un polinomio opportuno nella variabile $1/x$.

Soluzione. Osserviamo innanzitutto che se p è un qualsivoglia polinomio si ha

$$\lim_{x\to 0^+} p(1/x) f(x) = \lim_{t\to +\infty} \frac{p(t)}{e^t} = 0, \qquad (t := 1/x)$$

come si riconosce applicando la regola di L'Hôpital tante volte quant'è il grado di p.

Ciò posto, chiaramente la proposizione sussiste per $n = 0$ ponendo $p_0 = 1$. Se per un assegnato n si ha $D^n f(x) = p_n(1/x)\, f(x)$, con p_n polinomio opportuno, allora

$$D^{n+1} f(x) = -p_n'(1/x)\, \frac{1}{x^2}\, f(x) - p_n(1/x)\, \frac{1}{x^2}\, f(x) = p_{n+1}(1/x)\, f(x)$$

avendo posto

$$p_{n+1}(1/x) := -p_n'(1/x)\, \frac{1}{x^2} - p_n(1/x)\, \frac{1}{x^2}.$$

Abbiamo utilizzato la relazione $f'(x) = -(1/x^2)\, f(x)$.

7.1-2. In base al risultato del precedente esercizio, verificare che la funzione

$$\phi(x) := \begin{cases} e^{1/(x^2-1)}, & \text{per } |x| < 1, \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

già ripetutamente considerata, appartiene allo spazio $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Si scelga $c := \int_{\mathbb{R}} \phi(x)\, dx$ e si consideri la funzione

$$v(x) := \frac{1}{c} \int_{-\infty}^{x} \phi(t)\, dt.$$

Si verifichi che v è una funzione crescente, di classe $C^{(\infty)}(\mathbb{R})$, nulla per $x \le -1$, uguale a 1 per $x \ge 1$. Si esamini la funzione $v_\varepsilon(x) := v(x/\varepsilon)$, con $\varepsilon > 0$.

Soluzione. La funzione ϕ è di classe $C^{(\infty)}(\mathbb{R})$ in quanto composta mediante funzioni della stessa classe. Quanto alla v, essa è crescente in quanto primitiva della funzione non negativa ϕ. La funzione $v_\varepsilon(x) := v(x/\varepsilon)$ è qualitativamente simile alla v, ma è strettamente crescente

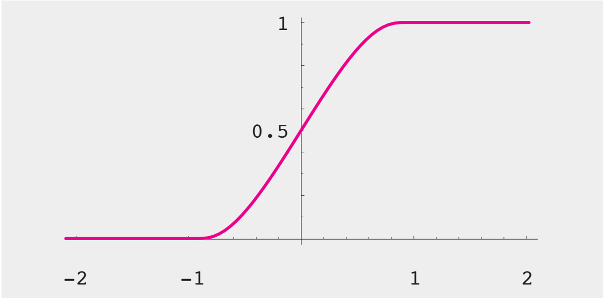

Figura 7.E-1. La funzione $v(x)$ è crescente, nulla per $x \leq -1$, uguale a 1 per $x \geq 1$.

nell'intervallo $[-\varepsilon, \varepsilon]$, mentre vale 0 per $x \leq -\varepsilon$ e vale 1 per $x \geq \varepsilon$. Il suo grafico si ottiene da quella di v comprimendo quest'ultimo di un fattore $1/\varepsilon$ nel senso dell'asse delle ascisse.

7.1-3. Dato l'intervallo $[a, b]$, con $a < b$, si verifichi che la funzione (i simboli sono quelli del precedente esercizio)

$$v(x) := v_\varepsilon(x - a) \cdot v_\varepsilon(b - x)$$

ha come supporto l'intervallo $[a - \varepsilon, b + \varepsilon]$ e vale 1 nell'intervallo $[a + \varepsilon, b - \varepsilon]$ (si suppone che sia $2\varepsilon < b - a$).

Soluzione. Basta osservare che il grafico di $v_\varepsilon(x-a)$ si ottiene da quello di $v_\varepsilon(x)$ traslandolo della quantità a, mentre il grafico di $v_\varepsilon(b - x)$ si ottiene da quello di $v_\varepsilon(x)$ traslandolo della quantità b e poi simmetrizzandolo rispetto alla parallela all'asse delle ordinate passante per il punto di ascissa b.

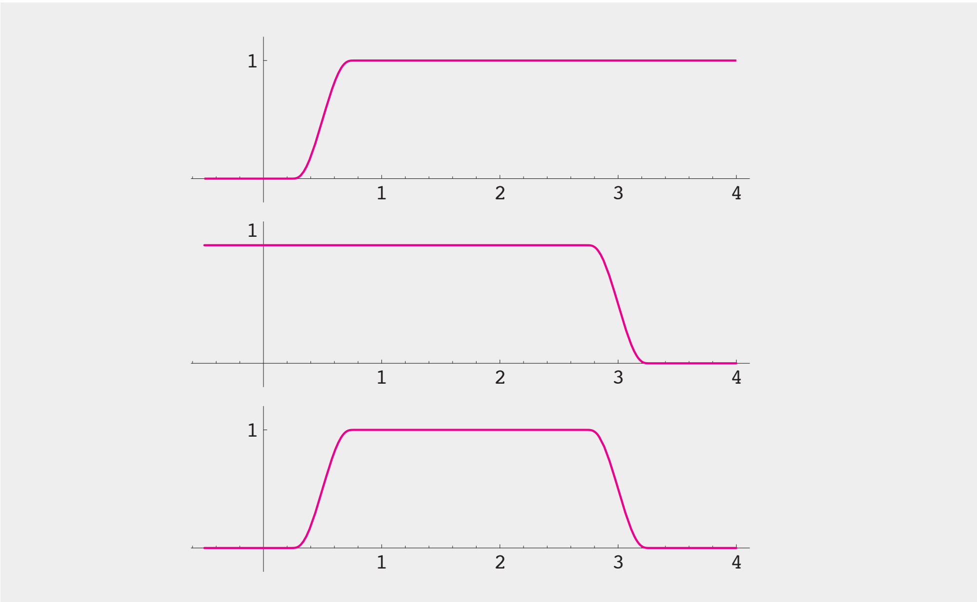

Figura 7.E-2. Dall'altro al basso: grafici delle funzioni $v_\varepsilon(x - a)$, $v_\varepsilon(b - x)$ e del loro prodotto $v_\varepsilon(x - a) \cdot v_\varepsilon(b - x)$, per $a = 0.5$, $b = 3$, $\varepsilon = 0.3$.

7.1-4. Si consideri la funzione $f(x) := (1 - |x - 1|)^+$ e se ne tracci il grafico. In base a quanto visto nell'esempio 7.1-7, si verifichi che la successione $f_k(x) := kf(kx)$ tende a $\delta(x)$ per $k \to \infty$, mentre la stessa successione tende puntualmente a 0 per ogni x reale. Si riveda l'esempio 2.1-3 con $h_n = n$.

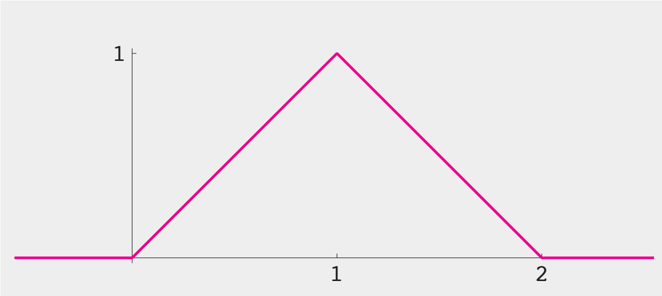

Figura 7.E-3.
Grafico della funzione $f(x) := (1 - |x - 1|)^+$.

SOLUZIONE. Per ogni $x \le 0$, si ha $f_k(x) = 0$ per ogni k, mentre, per ogni fissato $x > 0$, si ha $f_k(x) = 0$ per ogni $k \ge 2/x$, in quanto la funzione f_k ha come supporto l'intervallo $[0, 2/k]$. Per quanto riguarda la convergenza alla distribuzione δ, si tratta semplicemente di un caso particolare di quanto dimostrato nell'esempio 7.1-7, scrivendo k al posto di λ.

Esercizi proposti

7.1-P1. Se $u(x)$ è la funzione gradino unitario, $u(x) - \chi_{[0,+\infty)}(x)$, verificare che la successione $f_n(x) := u(x - n)$ tende a 0 in $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$.

SOLUZIONE. Scelto ad arbitrio l'intervallo $[a, b]$, risulta $f_n(x) = 0$ su $[a, b]$ per tutti gli $n > b$.

7.1-P2. Sia $f_n(x) := \chi_{[0,n]}(x)$; verificare che f_n tende a $u(x)$ in $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$.

SOLUZIONE. Scelto ad arbitrio l'intervallo $[a, b]$, risulta $f_n(x) = u(x)$ su $[a, b]$ per tutti gli $n > b$.

7.1-P3. Posto

$$f_n(x) := \begin{cases} 0, & \text{per } x \le 0 \\ nx, & \text{per } 0 \le x \le 1/n, \\ 1, & \text{per } x \ge 1/n, \end{cases}$$

verificare che f_n tende a $u(x)$ in $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$.

SOLUZIONE. Le funzioni f_n e u coincidono fuori dell'intervallo $[0, 1/n]$. Su un qualunque intervallo $[a, b]$ che contanga, in tutto o in parte, l'intervallo $[0, 1/n]$ si ha

$$\int_a^b |f_n(x) - u(x)|\,dx \le \int_0^{1/n} |f_n(x) - u(x)|\,dx = \int_0^{1/n} (1 - nx)\,dx = \frac{1}{2n}.$$

7.1-P4. Dalla relazione $e^{ikx} \to 0$ (in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$) per $k \to \infty$, stabilita nell'esempio 7.1-5, dedurre che $\sin^2(kx) \to 1/2$ utilizzando le formule di Eulero.

SOLUZIONE. Si ha

$$\sin^2(kx) = \left(\frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i}\right)^2 = -\frac{e^{i2kx} + e^{-i2kx}}{4} + \frac{1}{2} \to \frac{1}{2}.$$

7.1-P5. verificare che la successione $k \mapsto \sin(kx)$ (che tende a 0 nel senso delle distribuzioni) non tende a 0 in $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$.

SOLUZIONE. Si ha, per esempio

$$\int_0^{\pi} |\sin(kx)|\,dx = \sum_{k=0}^{k=n-1} \int_{k\pi/n}^{(k+1)\pi/n} |\sin(kx)|\,dx = n\,\frac{2}{n} = 2.$$

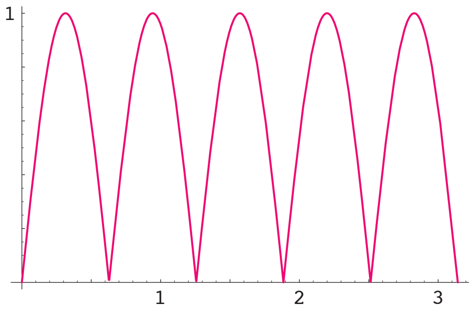

Figura 7.E-4.
Grafico della funzione $x \mapsto |\sin(5x)|$ sull'intervallo $[0, \pi]$.

7.2. Operazioni sulle distribuzioni

7.2-1. Si consideri la distribuzione $f(x) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x-k)$; per ogni funzione test v si ha $\langle f(x), v(x)\rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v(k)$, dove la somma indicata contiene al più un numero finito di termini diversi da 0, quelli corrispondenti agli interi k che appartengono al supporto di v. Si verifichi che f è periodica di periodo 1: $f(x) = f(x+1)$.

SOLUZIONE. Si ha $\langle f(x+1), v(x)\rangle = \langle f(x), v(x-1)\rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v(k-1)$; ma l'ultima somma, scrivendo h al posto di $k-1$ e poi ancora k al posto di h, si scrive ancora $\sum_{k=-\infty}^{\infty} v(k)$. In conclusione: tanto $\langle f(x), v(x)\rangle$ quanto $\langle f(x+1), v(x)\rangle$ forniscono la somma dei valori che la funzione test v assume nei punti di ascissa intera appartenenti al proprio supporto.

7.2-2. Verificare che la distribuzione v.p.$(1/x)$ (↑ esempio 7.1-8) è dispari.

SOLUZIONE. Si ha
$$\left\langle \text{v.p.}\frac{1}{-x}, v(x)\right\rangle = \left\langle \text{v.p.}\frac{1}{x}, v(-x)\right\rangle = \int_{-r}^{r} \frac{v(-x)-v(0)}{x}\,dx$$
dove r è abbastanza grande perché l'intervallo $[-r, r]$ contenga il supporto di v. Ponendo $t = -x$, e successivamente indicando ancora con x la variabile di integrazione l'ultima quantità si scrive
$$\int_{r}^{-r} \frac{v(t)-v(0)}{t}\,dt = -\int_{-r}^{r} \frac{v(x)-v(0)}{x}\,dx = -\left\langle \text{v.p.}\frac{1}{x}, v(x)\right\rangle.$$

7.2-3. Verificare che se f è una distribuzione pari, essa si annulla in corrispondenza di ogni funzione test v dispari, e viceversa.

SOLUZIONE. Sia f pari, dunque $f(x) = f(-x)$. Allora per ogni funzione test v si ha
$$\langle f(x), v(x)\rangle = \langle f(-x), v(x)\rangle = \langle f(x), v(-x)\rangle;$$
ma se v è dispari, $v(-x) = -v(x)$, dunque l'ultima quantità è uguale a $-\langle f(x), v(x)\rangle$. In conclusione:
$$\langle f(x), v(x)\rangle = -\langle f(x), v(x)\rangle \quad\Longrightarrow\quad \langle f(x), v(x)\rangle = 0.$$

7.2-4. Verificare che se f è una distribuzione pari, f' è dispari e viceversa.

SOLUZIONE. Utilizzeremo:

(a) la composizione di una distribuzione f con la funzione $x \mapsto -x$ (simmetria rispetto all'origine);
(b) la derivata di una distribuzione.

Si ha
$$\begin{aligned}\langle f'(-x), v(x)\rangle &\overset{a}{=} \langle f'(x), v(-x)\rangle = \\ &\overset{b}{=} -\langle f(x), \big(v(-x)\big)'\rangle = \langle f(x), v'(-x)\rangle = \\ &\overset{a}{=} \langle f(-x), v'(x)\rangle = \langle f(x), v'(x)\rangle = \quad (f \text{ è pari}) \\ &\overset{b}{=} -\langle f'(x), v(x)\rangle.\end{aligned}$$

Dunque $f'(-x) = -f'(x)$.

7.2-5. Se f è una distribuzione e ψ una funzione di classe $C^{(\infty)}$, verificare la formula $(\psi\, f)' = \psi'\, f + \psi\, f'$.

SOLUZIONE. Per ogni funzione test v si ha:

$$\langle(\psi\, f)', v\rangle = -\langle\psi\, f, v'\rangle = -\langle f, \psi\, v'\rangle;$$

analogamente

$$\langle\psi'\, f, v\rangle = \langle f, \psi'\, v\rangle,$$

$$\begin{aligned}\langle\psi\, f', v\rangle &= \langle f', \psi\, v\rangle = -\langle f, (\psi\, v)'\rangle = \\ &= -\langle f, \psi'\, v\rangle - \langle f, \psi\, v'\rangle,\end{aligned}$$

da cui il risultato sommando membro a membro.

7.2-6. Consideriamo la famiglia di funzioni localmente sommabili

$$f_a(x) := \frac{x}{a^2 + x^2}, \qquad a \neq 0.$$

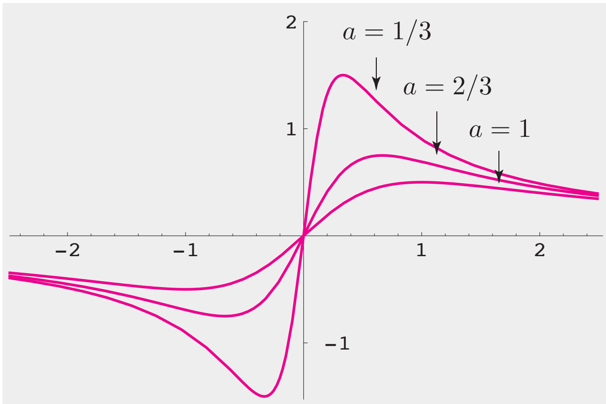

Figura 7.E-5. La famiglia di funzioni $f_a(x) := x/(a^2 + x^2)$ tende alla distribuzione v.p. $(1/x)$ per $a \to 0$.

Dimostrare che

$$\lim_{a\to 0} f_a(x) = \text{v.p. } \frac{1}{x}.$$

SUGGERIMENTO ▷ Si proceda, in modo analogo a quanto visto nell'esempio 7.2.-2, osservando che, per ogni funzione test v con supporto contenuto nell'intervallo $[-r, r]$, si può scrivere

$$\begin{aligned}\langle f_a(x), v(x)\rangle &= \int_{-r}^{r} \frac{x}{a^2 + x^2}\, v(x)\, dx = \int_{-r}^{r} \frac{x}{a^2 + x^2}\big(v(x) - v(0)\big)\, dx = \\ &= \int_{-r}^{r} \frac{x^2}{a^2 + x^2}\, \frac{v(x) - v(0)}{x}\, dx.\end{aligned}$$

Nell'ultimo integrale scritto si passi al limite sotto il segno di integrale applicando il teorema della convergenza dominata di Lebesgue (↑ Prop 2.3-1).

SOLUZIONE. Proseguendo nel ragionamento suggerito, basta osservare che la famiglia di funzioni

$$x \mapsto \frac{x^2}{a^2 + x^2}\, \frac{v(x) - v(0)}{x}$$

ammette la maggiorante $x \mapsto \big|[v(x) - v(0)]/x\big|$, che è sommabile, in quanto continua, sull'intervallo $[-r, r]$.

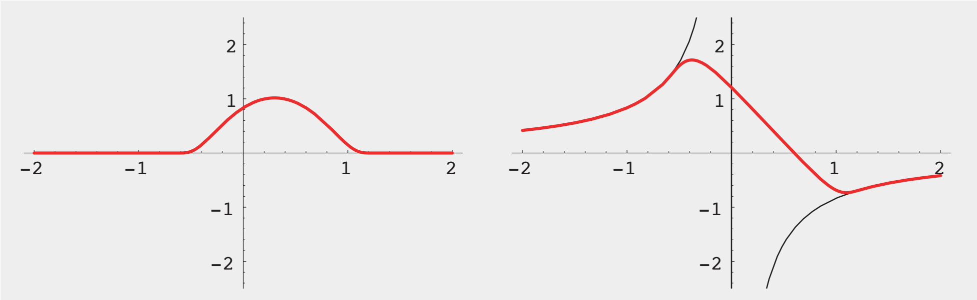

Figura 7.E-6. A sinistra viene mostrato il grafico di una funzione test v, a destra il grafico della funzione $x \mapsto (v(x) - v(0)/x$, sovrapposto a quello della funzione dispari $x \mapsto -v(0)/x$.

Esercizi proposti

7.2-P1. Utilizzare l'esercizio 7.2-5 per calcolare la distribuzione $x\delta'(x)$.

Soluzione. Sappiamo che $x\delta(x) = 0$, dunque

$$0 = \big(x\delta(x)\big)' = \delta(x) + x\delta'(x) \quad\implies\quad x\delta'(x) = -\delta(x).$$

D'altra parte un calcolo diretto fornisce, per ogni funzione test v,

$$\begin{aligned}\langle x\delta'(x), v(x)\rangle &= \langle \delta'(x), x\, v(x)\rangle = -\langle \delta(x), \big(x\, v(x)\big)'\rangle = \\ &= -\langle \delta(x), v(x)\rangle - \langle \delta(x), x\, v'(x)\rangle = -\langle \delta(x), v(x)\rangle.\end{aligned}$$

7.2-P2. Per la funzione $f(x) := x_+^n/n!$, verificare che $f^{(k)}(x) = x_+^{n-k}/(n-k)!$ per ogni $k \le n$, mentre $f^{(n+1)}(x) = \delta(x)$.

Soluzione. La funzione f ha derivate continue fino all'ordine $n-1$, essendo $f^{(n-1)}(x) = x_+$, funzione che, a sua volta, ha come derivata q.o. la funzione $x \mapsto x_+^0$, e quest'ultima coincide q.o. col gradino unitario $u(x)$.

7.2-P3. Consideriamo la famiglia di funzioni

$$\delta_h(x) := \frac{1}{h}\,\chi_{([-h/2,h/2])}(x),$$

che sappiamo tendere alla δ di Dirac per $h \to 0$. In precedenza (v. esercizio 6.2-5 e seguenti) abbiamo usato anche il simbolo $p_h(x)$ per la stessa funzione. Si verifichi che, se f è una funzione polinomiale di primo grado, $f(x) = ax + b$, allora

$$(\delta_h * f)(x) = f(x), \qquad \forall h > 0.$$

Analogamente, se $f(x) = ax^2 + bx + c$ è una funzione polinomiale di secondo grado,

$$(\delta_h * f)(x) = f(x) + a\,\frac{h^2}{12}, \qquad \forall h > 0.$$

Soluzione. Per ogni funzione f sommabile si ha

$$(\delta_h * f)(x) = \frac{1}{h}\int_{x-h/2}^{x+h/2} f(t)\,dt,$$

cioè $(\delta_h * f)(x)$ è la media integrale di f sull'intervallo $[x-h/2, x+h/2]$. Se f è un polinomio di primo grado, si trova subito

$$\int_{x-h/2}^{x+h/2} (at+b)\,dt = a\left[\frac{t^2}{2}\right]_{x-h/2}^{x+h/2} + b = axh + bh = f(x)\cdot h.$$

Geometricamente: il sottografico di f, relativamente all'intervallo $[x-h/2, x+h/2]$, è un trapezio di area $f(x)\cdot h$.

Se poi $f(x)$ è un polinomio di secondo grado, scriviamo $f(x) = aq(x) + p_1(x)$ dove $q(x) = x^2$ e $p_1(x)$ è il polinomio di primo grado $bx + c$: Avremo che

$$(\delta_h * f)(x) = a(\delta_h * q)(x) + (\delta_h * p_1)(x) = a(\delta_h * q)(x) + p_1(x),$$

per quanto già sappiamo sulla convoluzione di δ_h con un polinomio di primo grado. In definitiva si tratta di verificare che

$$(\delta_h * q)(x) = x^2 + \frac{h^2}{12}.$$

Infatti

$$\frac{1}{h}\int_{x-h/2}^{x+h/2} t^2\,dt = \frac{1}{3h}\Big[t^3\Big]_{x-h/2}^{x+h/2} = x^2 + \frac{h^2}{12}.$$

7.2-P4. Con gli stessi simboli dei precedenti esercizi, si dimostri che

$$(\delta_h * \sin)(x) = \frac{\sin(h/2)}{h/2}\,\sin x, \qquad (\delta_h * \cos)(x) = \frac{\sin(h/2)}{h/2}\,\cos x.$$

SOLUZIONE. Si ha

$$\int_{x-h/2}^{x+h/2} \sin t\,dt = -\big[\cos t\big]_{x-h/2}^{x+h/2} = \cos(x-h/2) - \cos(x+h/2) = 2\sin x\,\sin(h/2),$$

in quanto le formule di addizione forniscono

$$\cos(x \pm h/2) = \cos x\cos(h/2) \mp \sin x\,\sin(h/2).$$

Geometricamente: il grafico della funzione $(\delta_h * \sin)(x)$ è il grafico della funzione seno, ridotto in ampiezza del fattore $\sin(h/2)/(h/2)$; si osservi che tale fattore tende crescendo a 1 per $h \to 0$. Calcolo analogo per la funzione coseno.

7.2-P5. Con gli stessi simboli del precedente esercizio, verificare che se $f(x) = |x|$, allora

$$(\delta_h * f)(x) = \begin{cases} |x|, & \text{per } |x| > h/2, \\ \dfrac{x^2}{h} + \dfrac{h}{4}, & \text{per } |x| \le h/2. \end{cases}$$

Verificare che $(\delta_h * f)(x)$ è una funzione di classe $C^{(1)}(\mathbb{R})$.

SOLUZIONE. Per $|x| > h/2$ la restrizione di f all'intervallo $[x-h/2, x+h/2]$ è un polinomio di primo grado, dunque il risultato segue dal precedente esercizio. Se poi $|x| \le h/2$, si ha

$$\int_{x-h/2}^{x+h/2} |t|\,dt = -\int_{x-h/2}^{0} t\,dt + \int_{0}^{x+h/2} t\,dt = -\left[\frac{t^2}{2}\right]_{x-h/2}^{0} + \left[\frac{t^2}{2}\right]_{0}^{x+h/2} =$$
$$= \frac{1}{2}\left[\left(x+\frac{h}{2}\right)^2 + \left(x+\frac{h}{2}\right)^2\right] = x^2 + \frac{h^2}{4}.$$

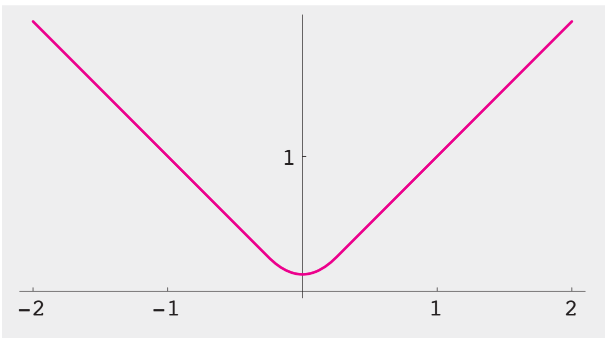

Figura 7.E-7. Grafico della convoluzione $(\delta_h * f)(x)$ per $h = 0.5$.

Per quanto riguarda la derivata della convoluzione calcolata, basta osservare che, per $|x| < h/2$, tale derivata vale $2x/h$; essa tende a 1 per $x \to 1^-$, e tende a -1 per $x \to -1^+$.

7.3. Distribuzioni temperate

Esercizi proposti

7.3-P1. Dimostrare che se una successione di funzioni $v_k(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ converge a 0 nel senso della Definizione 7.1-2, cioè nel senso proprio dello spazio $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, essa converge a 0 anche nel senso dello spazio $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

SOLUZIONE. Nelle ipotesi ammesse tutti i supporti delle funzioni v_k sono contenuti in un opportuno intervallo $[-r, r]$, dunque per ogni coppia di numeri naturali p e q si ha

$$\max_{x\in\mathbb{R}} |x^p D^q v_k(x)| = \max_{|x|\le r} |x^p D^q v_k(x)| \le r^p \|v_k\|_\infty \to 0.$$

7.3-P2. Dimostrare che se una successione di funzioni $v_k(x)$ converge a 0 in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, lo stesso vale per la successione $p(x)v_k(x)$, quale che sia il polinomio p.

SOLUZIONE. Basta dimostrare l'affermazione nel caso in cui p è un monomio, diciamo x^n con n naturale. Si tratta di dimostrare che, per ogni $p, q \in \mathbb{N}$, la successione di funzioni $k \mapsto x^p D^q[x^n v_k(x)]$ tende uniformemente a 0 in $\mathbb{R}$. Ora si ha

$$x^p D^q[x^n v_k(x)] = x^p \sum_{h=0}^{q} \binom{q}{h} D^h x^n\, D^{q-h} v_k(x) = \sum_{h=0}^{\min(q,n)} c(n,q,h)\, x^{p+n-h}\, D^{q-h} v_k(x),$$

dove $c(n,q,h)$ indica un coefficiente dipendente da n, q e h. Infatti $D^h x^n$ vale 0 se $h > n$, è un monomio di grado $n-h$ in caso contrario. Dunque

$$\|x^p D^q[x^n v_k(x)]\|_\infty \le \sum_{h=0}^{\min(q,n)} |c(n,q,h)|\, \|x^{p+n-h}\, D^{q-h} v_k(x)\|_\infty \to 0.$$

7.3-P3. Dimostrare direttamente, in base alla definizione di F-trasformata di una distribuzione temperata, che la trasformata di $\delta(x - x_0)$ è $e^{-ix_0\xi}$.

SOLUZIONE. Si ha $\langle \mathcal{F}[\delta(x-x_0)](\xi), v(\xi)\rangle = \langle \delta(x-x_0), \widehat{v}(x)\rangle = \widehat{v}(x_0)$; poiché abbiamo indicato con la lettera x l'argomento della trasformata della funzione test v, abbiamo per tale trasformata un'espressione del tipo $\int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi}\, v(\xi)\, d\xi$. Dunque $\langle \delta(x-x_0), \widehat{v}(x)\rangle = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix_0\xi}\, v(\xi)\, d\xi$, quindi la trasformata richiesta coincide con $e^{-ix_0\xi}$.
Si osservi che $\xi \mapsto e^{-ix_0\xi}$ è una funzione limitata, e come tale è (più esattamente: induce) una distribuzione temperata.

7.3-P4. Nota la trasformata di Fourier della funzione $\cos 2x$, calcolare la trasformata delle funzioni $\sin^2 x$ e $\cos^2 x$ sfruttando le formule

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}.$$

Alternativamente, nota la trasformata della funzione e^{ikx}, con k reale, ottenere le stesse trasformate utilizzando le formule di Eulero.

SOLUZIONE. La trasformata di $\cos 2x$ vale

$$\pi[\delta(\xi+2) + \delta(\xi-2)];$$

troveremo dunque per la trasformata di $\sin^2 x$

$$\frac{1}{2}\,[2\pi\delta(\xi) - \pi\delta(\xi+2) - \pi\delta(\xi-2)] = \pi\,[\delta(\xi) - \frac{1}{2}\,\delta(\xi+2) - \frac{1}{2}\,\delta(\xi-2)].$$

Alternativamente, da

$$\sin^2 x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^2 = -\frac{e^{i2x} + e^{-i2x}}{4} + \frac{1}{2}$$

segue lo stesso risultato, in quanto la trasformata di $e^{\pm i2x}$ è $2\pi\,\delta(\xi \pm 2)$.

7.3-P5. Abbiamo dimostrato (v. pag. 285, esempio 7.3-6) che se una distribuzione temperata f è tale che $xf(x) = 0$, allora $f(x) = c\delta(x)$ con c costante. Dimostrare, analogamente, che se f è tale che $x^2 f(x) = 0$ allora $f(x) = c_0\delta(x) + c_1\delta'(x)$, con c_0 e c_1 costanti opportune.

In breve: la distribuzioni temperate per cui $x^2 f(x) = 0$ sono tutte (e soltanto) quelle del tipo $f(x) = c_0\delta(x)+c_1\delta'(x)$. Il risultato si estende per induzione al caso generale: $x^n f(x) = 0$ se e solo se f è una combinazione lineare della δ e delle sua derivate fino all'ordine $n-1$.

SOLUZIONE. Da $x(xf(x)) = 0$, segue $xf(x) = c\,\delta(x)$. F-trasformando si trova $i\,\widehat{f}\,'(\xi) = c$, cioè $\widehat{f}\,'(\xi) = -c\,i$, da cui $\widehat{f}(\xi) = -c\,i\,\xi + c_0 = c_1\,i\,\xi \cdot 1 + c_0 \cdot 1 = c_1\widehat{\delta'}(\xi) + c_0\widehat{\delta}(\xi)$, avendo posto $c_1 = -c$, da cui finalmente segue il risultato anti-trasformando.

7.3-P6. Calcolare la trasformata di $f(x) = \chi_{[-a,a]}(x)$ a partire dal fatto che $f'(x) = = 0 + \delta(x+a) - \delta(x-a) = \delta(x+a) - \delta(x-a)$.

SOLUZIONE. Trasformando l'ultima uguaglianza si ottiene

$$i\xi\,\widehat{f}(\xi) = e^{ia\xi} - e^{-ia\xi}.$$

Le distribuzioni che risolvono l'equazione scritta sono tutte (e soltanto) quelle del tipo

$$\xi \mapsto \frac{e^{ia\xi} - e^{-ia\xi}}{i\xi} + c\,\delta(\xi),$$

ma poiché $\widehat{f}(\xi)$, in quanto trasformata di una funzione sommabile, è continua, si ha necessariamente $c = 0$, dunque

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{2\sin(a\xi)}{\xi}.$$

7.3-P7. Calcolare la trasformata della funzione $f(x) = x\,\chi_{[-1,1]}(x)$, a partire dal fatto che la sua derivata è esprimibile mediante la funzione $\chi_{[-1,1]}(x)$ e la delta di Dirac.

SOLUZIONE. Si trova $f'(x) = \chi_{[-1,1]}(x) - \delta(x+1) - \delta(x-1)$, distribuzione che ha come trasformata

$$2\frac{\sin\xi}{\xi} - e^{i\xi} - e^{-i\xi} = 2\Big(\frac{\sin\xi}{\xi} - \cos\xi\Big).$$

Ragionando come nel precedente esercizio si trova

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{2}{i}\,\frac{\sin\xi - \xi\cos\xi}{\xi^2}.$$

Si osservi che la trasformata è puramente immaginaria e dispari, in quanto f è reale dispari. Tale trasformata si annulla nell'origine in quanto $\sin\xi - \xi\cos\xi = O(\xi^3)$, per $\xi \to 0$.
Suggeriamo di ricalcolare direttamente la trasformata in esame come $-2i\int_0^1 \sin(\xi x)\,x\,dx$.

7.3-P8. Calcolare la F-trasformata della funzione $f(x) := (1-|x|)^+$ (v. esempio 6.2-5) a partire dal fatto che $f''(x) = \delta(x+1) - 2\delta(x) + \delta(x-1)$.

SOLUZIONE. Si ha $Df(x) = \chi_{(-1,0)}(x) - \chi_{(0,1)}(x)$, da cui $f''(x) = 0 + \delta(x+1) - 2\delta(x) + \delta(x-1)$. Trasformando l'ultima uguaglianza si ottiene

$$-\xi^2\widehat{f}(\xi) = e^{i\xi} - 2 + e^{-i\xi} = -2(1-\cos\xi).$$

per quanto sappiamo dal precedente esercizio 7.3-P5, sono soluzione dell'equazione scritta tutte (e soltanto) le distribuzioni

$$\xi \mapsto 2\,\frac{1-\cos\xi}{\xi^2} + c_0\delta(\xi) + c_1\delta'(\xi);$$

ma poiché f è sommabile, la sua trasformata è una funzione continua, dunque

$$\widehat{f}(\xi) = 2\,\frac{1-\cos\xi}{\xi^2} = 4\,\frac{\sin^2(\xi/2)}{\xi^2} = \left(\frac{\sin(\xi/2)}{\xi/2}\right)^2.$$

7.3-P9. Calcolare la F-trasformata della funzione $f(x) := (1-x^2)^+$ a partire dal fatto che $f''(x) = -2\chi_{(-1,1)}(x) + 2\delta(x+1) + 2\delta(x-1)$. Ritrovare lo stesso risultato mediante un calcolo diretto.

SOLUZIONE. Si osservi che si ha $Df(x) = -2x\,\chi_{(-1,1)}(x)$, da cui

$$f''(x) = -2\chi_{(-1,1)}(x) + 2\delta(x+1) + 2\delta(x-1).$$

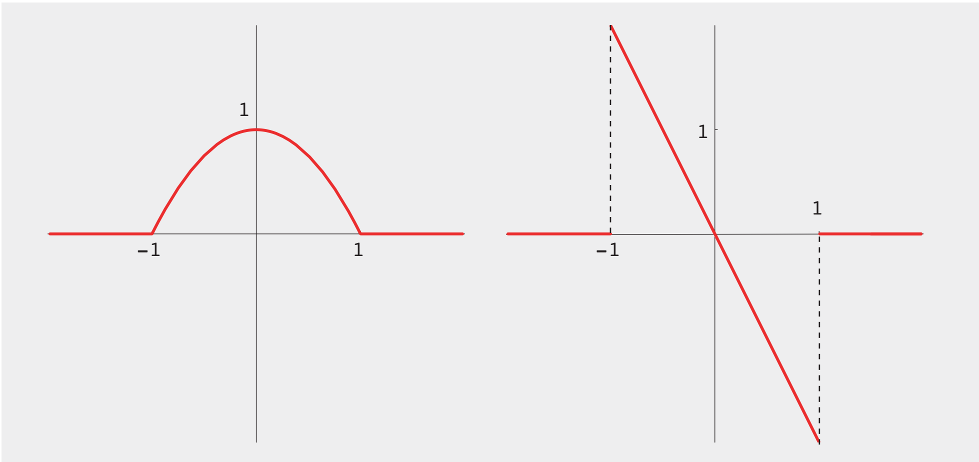

Figura 7.E-8. A sinistra il grafico della funzione $f(x) := (1-x^2)^+$, a destra il grafico della derivata prima.

Trasformando l'ultima uguaglianza si ottiene

$$-\xi^2\widehat{f}(\xi) = -4\,\frac{\sin\xi}{\xi} + 2e^{i\xi} + 2e^{-i\xi} = -4\,\frac{\sin\xi}{\xi} + 4\cos\xi.$$

Ragionando come nel precedente esercizio si trova

$$\widehat{f}(\xi) = 4\,\frac{\sin\xi - \xi\cos\xi}{\xi^3}.$$

Si osservi che, poiché $\sin t = t - t^3/6 + O(t^5)$ mentre $\cos t = 1 - t^2/2 + O(t^4)$, il numeratore ha uno zero del terzo ordine nell'origine, al pari del denominatore.

Poichè la funzione data è reale e pari, la sua trasformata si riduce all'integrale

$$2\int_0^1 (1-x^2)\,\cos(\xi x)\,dx,$$

che può essere calcolato con due integrazioni per parti.

7.3-P10. Si vuole calcolare la F-trasformata della funzione $f(x) := x\,\chi_{[0,1]}(x)$, che vale x per $x \in [0,1]$ e 0 altrimenti. Eseguire innanzitutto un calcolo in base alla definizione, poi ritrovare lo stesso risultato calcolando la derivata seconda di f (nel senso delle distribuzioni) e trasformando quest'ultima.

SOLUZIONE. Si trova, con un calcolo diretto,

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{e^{-i\xi}(1+i\xi) - 1}{\xi^2}$$

La derivata di f è esprimibile mediante $\chi_{[0,1]}$ e δ:

$$f'(x) = \chi_{[0,1]}(x) - \delta(x-1).$$

Un'ulteriore derivazione fornisce

$$f''(x) = \delta(x) - \delta(x-1) - \delta'(x-1),$$

da cui $\mathcal{F}[f''](\omega) = 1 - e^{-i\xi} - i\xi\, e^{-i\xi}$. Poiché f è sommabile si trova finalmente $\widehat{f}(\xi)$ dividendo per $-\xi^2$, ottenendo nuovamente il risultato iniziale.

Si osservi che da

$$e^{-i\xi} = 1 - i\xi - \xi^2/2 + O(\xi^3)$$

segue

$$e^{-i\xi}(1 + i\xi) = 1 + \xi^2/2 + O(\xi^3)$$

quindi $\lim_{\xi\to 0} f(\xi) = 1/2$.

7.3-P11. Calcolare la F-trasformata della funzione $\cos x$ deducendola da quella della funzione $\sin x$ in base alla regola sulla trasformata della derivata.

SUGGERIMENTO ▷ Sfruttare il fatto che $(\xi \pm 1)\,\delta(\xi \pm 1) = 0$.