8. Applicazioni
Esercizi

[Aggiornamento: febbraio 2005]

http://newton.ciram.unibo.it/~barozzi/MI2/PDF/MI2-Cap.8-Ese.pdf

8.1. Problemi ai limiti per equazioni differenziali omogenee

8.1-1. Dimostrare che l'equazione differenziale $p_0(x)\, y''(x)+p_1(x)\, y'(x)+p_2(x)\, y(x) = = 0$ può essere posta nella forma autoaggiunta (1) moltiplicandola per un'opportuna funzione $\neq 0$.

Suggerimento. Sia $f(x)$ la funzione che funge da moltiplicatore; allora dev'essere $\big(f(x)\, p_0(x)\big)' = f(x)p_1(x) \ldots$. Si ottiene un'equazione differenziale lineare del primo ordine la cui soluzione è $f(x) = \exp\big(\int_{x_0}^{x} [p_1(t)/p_0(t)]\, dt\big)/p_0(x)$.

Soluzione. Non è restrittivo suppporre $p_0(x) > 0$. L'uguaglianza $(fp_0)' = fp_1$ si scrive anche

$$f' = \frac{p_1 - p_o'}{p_0}\, f$$

equazione differenziale la cui soluzione è

$$\begin{aligned} f(x) &= c \exp\left(\int_{x_0}^{x} \frac{p_1(t) - p_0'(t)}{p_0(t)}\, dt\right) = \\ &= c \exp\left(\int_{x_0}^{x} \frac{p_1(t)}{p_0(t)}\, dt - \log\frac{p_0(x)}{p_0(x_0)}\right) = \\ &= \frac{c\, p_0(x_0)}{p_0(x)} \exp\left(\int_{x_0}^{x} \frac{p_1(t)}{p_0(t)}\, dt\right) \end{aligned}$$

dq cui segue la soluzione indicata nel suggerimento scegliendo opportunamente la costante c.

8.1-2. Trovare autovalori ed autofunzioni del problema di valori ai limiti

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y(\pi) = 0.$$

Soluzione. Per $\lambda > 0$, poniamo $\lambda = \omega^2 \iff \omega = \sqrt{\lambda}$; l'equazione in esame ammette la soluzione generale $y(x) = c_1 \cos(\omega\, x) + c_2 \sin(\omega\, x)$; dunque $y'(x) = -c_1\omega\, \sin(\omega\, x) + c_2\omega\, \cos(\pi) = 0$. La condizione $y'(0) = 0$ diventa $c_2 = 0$; la condizione $y(\pi) = 0$ si scrive dunque

$$\cos(\omega\,\pi) = 0 \iff \omega\,\pi = \frac{\pi}{2} + k\pi = \frac{2k+1}{2}\,\pi, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Abbiamo dunque gli autovalori $\lambda_k = (2k+1)^2/4$, $k \in \mathbb{N}$.

Per $\lambda = 0$ l'equazione in esame ammette la soluzione generale $y(x) = c_1 + c_2 x$, con derivata $y'(x) = c_2$. La condizione $y'(0) = 0$ implica $c_2 = 0$; la condizione $y(\pi) =0$ implica $c_1 = 0$. Dunque 0 non è un autovalore.

Per $\lambda < 0$, poniamo $\lambda = -\omega^2 \iff \omega = \sqrt{|\lambda|}$; l'equazione in esame ammette la soluzione generale

$$y(x) = c_1 e^{\omega\, x} + c_2 e^{-\omega\, x};$$

le condizioni ai limiti conducono al sistema

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 e^{\omega\,\pi} - c_2 e^{-\omega\,\pi} = 0 \end{cases}$$

che ammette soltanto la soluzione nulla. Dunque non esistono autovalori negativi.

8.1-3. Trovare autovalori ed autofunzioni del problema di valori ai limiti

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y'(\pi) = 0.$$

SOLUZIONE. Per $\lambda > 0$, poniamo $\lambda = \omega^2 \iff \omega = \sqrt{\lambda}$; l'equazione in esame ammette la soluzione generale $y(x) = c_1 \cos(\omega\, x) + c_2 \sin(\omega\, x)$; dunque $y'(x) = -c_1\omega\, \sin(\omega\, x) + c_2\omega\, \cos(\pi) = 0$. La condizione $y'(0) = 0$ diverta $c_2 = 0$; la condizione $y'(\pi) = 0$ si scrive

$$\sin(\omega\,\pi) = 0 \quad\iff\quad \omega = k \quad\iff\quad \lambda = k^2,\ k \in \mathbb{N}^*.$$

Si hanno dunque gli autovalori $\lambda_k = k^2$, $k \in \mathbb{N}^*$, con le corrispondenti autofunzioni $y_k(x) = \cos(kx)$.

Per $\lambda = 0$ l'equazione in esame ammette la soluzione generale $y(x) = c_1 + c_2 x$, con derivata $y'(x) = c_2$. Abbiamo dunque la condizione $c_2 = 0$, e l'autofunzione $y_0(x) = 1$.

Per $\lambda < 0$, poniamo $\lambda = -\omega^2 \iff \omega = \sqrt{|\lambda|}$; l'equazione in esame ammette la soluzione generale

$$y(x) = c_1 e^{\omega\, x} + c_2 e^{-\omega\, x};$$

le condizioni ai limiti conducono al sistema

$$\begin{cases} c_1 - c_2 = 0 \\ c_1 e^{\omega\,\pi} - c_2 e^{-\omega\,\pi} = 0 \end{cases}$$

che ammette soltanto la soluzione nulla. Dunque non esistono autovalori negativi.

Esercizi proposti

8.1-P.1. Verificare che la successione $\sin kx$, $k \in \mathbb{N}^*$, è ortogonale nello spazio $L^2[0, \pi]$.
SUGGERIMENTO▷ Utilizzare l'identità $\sin\alpha \sin\beta = (-1/2)[\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)]$. Alternativamente, sfruttare le formule di Eulero tenendo conto del fatto che, per n intero, si ha

$$\int_0^\pi e^{inx}\, dx = \begin{cases} \pi, & \text{se } n = 0 \\ 0, & \text{se } n = 2k,\ k \in \mathbb{N}^*, \\ 2i/n, & \text{se } n = 2k + 1,\ k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

SOLUZIONE. Si tratta di calcolare, per $h, k \in \mathbb{N}^*$, l'integrale

$$\int_0^\pi \sin(hx)\, \sin(kx)\, dx = -\frac{1}{2}\int_0^\pi [\cos((h + k)x) - \cos((h - k)x)]\, dx.$$

Se $h \neq k$, una primitiva della funzione integranda è

$$\frac{\sin((h + k)x)}{h + k} - \frac{\sin((h - k)x)}{h - k},$$

da cui cui segue subito l'annullamento dell'integrale in questione. Se poi $h = k$ si ottiene

$$\int_0^\pi \sin^2(hx)\, dx = -\frac{1}{2}\int_0^\pi [\cos(2hx) - 1]\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

Le analoghe relazioni di ortogonalità

$$\int_0^\pi \cos(hx)\,\cos(kx)\, dx = \begin{cases} 0, & \text{se } h \neq k, \\ \pi, & \text{se } h = k = 0, \\ \pi/2, & \text{se } h = k > 0 \end{cases}$$

sono state verificate nell'esercizio 4.3-5.

8.2 Polinomi ortogonali

8.2-1. Mediante ripetuta integrazione per parti mostrare che, per ogni coppia di numeri naturali n e m, si ha

$$\int_a^b \frac{(b-x)^m}{m!}\,\frac{(x-a)^n}{n!}\, dx = \frac{(b-a)^{m+n+1}}{(m+n+1)!};$$

in particolare ($a = -1$, $b = 1$, $m = n$):

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^n\, dx = 2\,\frac{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2n}{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n+1)} = 2\,\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}.$$

SUGGERIMENTO ▷ Una primitiva di $(x-a)^n/n!$ è $(x-a)^{n+1}/(n+1)!$; la derivata di $(b-x)^m/m!$ è $-(b-x)^{m-1}/(m-1)!$.

8.2-2. Per stabilire la formula (5′) si tratta di calcolare

$$\int_{-1}^1 P_n^2(x)\, dx = \frac{1}{[(2n)!!]^2}\int_{-1}^1 D^n(x^2-1)^n\, D^n(x^2-1)^n\, dx.$$

Con un'integrazione per parti mostrare che

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^1 D^n(x^2-1)^n\, D^n(x^2-1)^n\, dx = \\ &= \Big[D^{n-1}(x^2-1)^n\, D^n(x^2-1)^n\Big]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 D^{n-1}(x^2-1)^n\, D^{n+1}(x^2-1)^n\, dx = \\ &- \int_{-1}^1 D^{n-1}(x^2-1)^n\, D^{n+1}(x^2-1)^n\, dx. \end{aligned}$$

Così proseguendo si trovi, dopo n integrazioni per parti,

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^1 D^n(x^2-1)^n\, D^n(x^2-1)^n\, dx = \\ &= (-1)^n \int_{-1}^1 D^{n-n}(x^2-1)^n\, D^{n+n}(x^2-1)^n\, dx = \\ &= (-1)^n (2n)! \int_{-1}^1 (x^2-1)^n\, dx = (2n)! \int_{-1}^1 (1-x^2)^n\, dx = \\ &= 2\,\frac{(2n)!\,(2n)!!}{(2n+1)!!}, \end{aligned}$$

dove si è utilizzato il risultato del precedente esercizio.

SUGGERIMENTO ▷ Poiché $(x^2-1)^n = (x-1)^n\,(x+1)^n$ ha uno zero di ordine n tanto in 1 quanto in -1, le derivate di tale polinomio di ordine inferiore a n si annullano in tali punti. Si sfrutti il fatto che la derivata di ordine $2n$ di $(x^2-1)^n$ coincide con la derivata del termine direttivo x^{2n}.

8.2-3. Combinare i risultati dei due precedenti esercizi per ottenere nuovamente la formula (4) relativa alla norma di P_n.

8.2-4. Si consideri nuovamente la rappresentazione integrale

$$P_n(x) := \frac{1}{2^n \cdot 2\pi i} \oint_{\gamma(x)} \frac{(s^2-1)^n}{(s-x)^{n+1}}\, ds$$

che abbiamo utilizzato per dimostrare la Proposizione 8.2-3. Si verifichi che scegliendo come circuito $\gamma(x)$ la circonferenza di centro x e raggio $\sqrt{1-x^2}$ (v. figura 8.2-6), essa si scrive

$$P_n(x) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(x + i\sqrt{1-x^2}\, \sin\varphi\right)^n d\varphi.$$

SUGGERIMENTO▷ Dalla parametrizzazione $s := x + \sqrt{1-x^2}\, e^{i\varphi}$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, della circonferenza $\gamma(x)$, segue $ds = i\sqrt{1-x^2}\, e^{i\varphi}\, d\varphi$, $s - x = \sqrt{1-x^2}\, e^{i\varphi}$, e

$$\begin{aligned} s^2 - 1 &= x^2 + (1-x^2)\, e^{i2\varphi} + 2x\sqrt{1-x^2}\, e^{i\varphi} - 1 = \\ &= (1-x^2)\, e^{i2\varphi} + 2x\sqrt{1-x^2}\, e^{i\varphi} - (1-x^2) = \\ &= \sqrt{1-x^2}\, e^{i\varphi}\big[2x + \sqrt{1-x^2}\,(e^{i\varphi} - (e^{-i\varphi})\big] = \\ &= 2\sqrt{1-x^2}\, e^{i\varphi}\big[x + i\sqrt{1-x^2}\, \sin\varphi\big]. \end{aligned}$$

SOLUZIONE. Basta proseguire i calcoli iniziati nel suggerimento, tenendo conto del fatto che $s - x = \sqrt{1-x^2}\, e^{i\varphi}$.

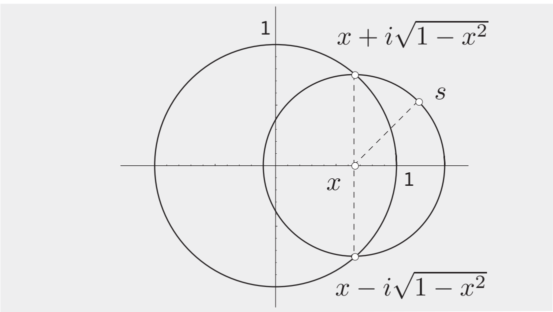

Figura 8.2-6.
Per ogni $x \in [-1,1]$ il punto $x + i\sqrt{1-x^2}\, \sin\varphi$ appartiene al segmento di estremi $x + i\sqrt{1-x^2}$, $x + i\sqrt{1-x^2}$, contenuto nel disco di centro l'origine e raggio 1.

8.2-5. Dedurre dalla rappresentazione integrale ottenuta nel precedente esercizio la disuguaglianza $|P_n(x)| \le 1$ per ogni naturale n e per ogni $x \in [-1,1]$. Si riveda, in proposito, la figura 8.1-1.

SUGGERIMENTO ▷ Verificare che $|x + i\sqrt{1-x^2}\, \sin\varphi| \le 1$ per $x \in [-1,1]$, calcolando il quadrato del valore assoluto in esame.

SOLUZIONE. Si ha

$$|x + i\sqrt{1-x^2}\, \sin\varphi|^2 = x^2 + (1-x^2)\sin^2\varphi \le x^2 + 1 - x^2 = 1.$$

8.2-6. Dedurre dalla formula ricorsiva (18) che i coefficienti dei polinomi di Čebyšev sono interi. Discorso analogo per i polinomi di Hermite, a partire dalla formula (25).

8.2-7. Dimostrare che il polinomio di Čebyšev $T_n(x)$, per $n \ge 1$, si annulla nei punti

$$x_k = \cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1,$$

SOLUZIONE. Si ha $T_n(x_k) = \cos(n \arccos(x_k)) = \cos[(2k+1)\,\pi/2] = 0$.

8.3. Problemi ai limiti per equazioni differenziali non omogenee La funzione di Green

8.3-1. Siano y_1 e y_2 due soluzioni dell'equazione differenziale lineare omogenea $-(py')' + qy = 0$, che si può anche scrivere $py'' = -p'y' + qy$. Dimostrare che per il relativo wronskiano

$$w(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

si ha $p(x)\,w(x) =$ costante, in quanto $\big(p(x)\,w(x)\big)' = 0$.

Suggerimento ▷ Si tratta di dimostrare che $pw' = -p'w$. Ora

$$w'(x) = \begin{vmatrix} y_1'(x) & y_2'(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) \end{vmatrix}.$$

Si moltiplichino entrambi i membri per p, scrivendo py_1'' e py_2'' nella seconda riga dell'ultimo determinante, e si sfruttino le uguaglianze $py_k'' = -p'y_k' + qy_k$, $k = 1, 2$.

Soluzione. Proseguendo secondo quanto suggerito si trova

$$pw' = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ py_1'' & py_2'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ -p'y_1' + qy_1 & -p'y_2' + qy_2 \end{vmatrix} = -p' \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = -p'w.$$

Si tenga presente che un determinante con due righe uguali è nullo.

8.3-2. Dedurre dal precedente esercizio che, se p ha segno costante sull'intervallo di definizione $[a, b]$, ad esempio $p(x) > 0$, allora o il wronskiano w è identicamente nullo, oppure è anch'esso di segno costante. La prima alternativa si verifica se e solo se y_1 e y_2 sono linearmente dipendenti.

8.3-3. Si consideri il problema ai limiti dell'esempio 8.3-1, cioè $-y'' = f$, $y(0) = y(1) = 0$. Si scriva esplicitamente la formula risolutiva (8) e si verifichi che, in corrispondenza dei termini noti f indicati nella tabella seguente, si hanno le soluzioni indicate a fianco di ciascuno.

$f(x)$	$y(x)$	$f(x)$	$y(x)$
1	$(x - x^2)/2$	x	$(x - x^3)/6$
x^2	$(x - x^4)/12$	x^3	$(x - x^5)/20$

Potete fare una congettura sulla soluzione corrispondente al termine noto $f(x) = x^n$?

Soluzione. Scegliendo come soluzioni dell'equazione omogenea $y_1(x) = x$ e $y_2(x) = 1 - x$, il cui wronskiano vale -1, si ottiene la formula risolutiva

$$y(x) = (1 - x) \int_0^x \xi\, f(\xi)\, d\xi + x \int_x^1 (1 - \xi)\, f(\xi)\, d\xi.$$

Per $f(x) = x^n$ essa fornisce la soluzione

$$\frac{x - x^{n+2}}{(n+1)(n+2)}.$$

8.3-4. Relativamente allo stesso problema ai limiti del precedente esercizio, calcolare le soluzioni corrispondenti ai termini noti $f(x) = \sin(\pi x)$, $f(x) = \cos(\pi x)$, $f(x) = e^x$. In ciascun caso verificare la soluzione ottenuta.

Soluzione. Si trovano, nell'ordine, le soluzioni $\sin(\pi x)/\pi^2$, $(\cos(\pi x) + 2x - 1)/\pi^2$, $1 + (e - 1)\,x - e^x$.

8.3-5. Verificare che tutte le soluzioni calcolate nei due precedenti esercizi si presentano come somma di una soluzione dell'equazione omogenea e di una soluzione dell'equazione non omogenea.

8.3-6. Si consideri il problema ai limiti $-y'' = f$, $y(0) + y'(0) = 0$, $y(1) + y'(1) = 0$. Dopo aver aver verificato che il corrispondente problema per l'equazione omogenea ammette soltanto la soluzione nulla, si costruisca la funzione di Green, si scriva la formula risolutiva (8) e si verifichi che, in corrispondenza dei termini noti f indicati nella tabella seguente, si hanno le soluzioni indicate a fianco di ciascuno.

$f(x)$	$y(x)$	$f(x)$	$y(x)$
1	$(-x^2+3x-3)/2$	x	$(-x^3+4x-4)/6$
x^2	$(-x^4+5x-5)/12$	x^3	$(-x^5+6x-6)/20$

Potete fare una congettura sulla soluzione corrispondente al termine noto $f(x)=x^n$?

SOLUZIONE. La soluzione generale dell'equazione omogenea $y''=0$ si scrive $y(x)=c_1+c_2x$, quindi le condizioni ai limiti diventano $c_1+c_2=0$, $c_1+2c_2=0$, sistema che ammette soltanto la soluzione nulla. Per soddisfare separatamente le condizioni ai limiti possiamo scegliere $y_1(x)=1-x$ (cioè $c_1=1$, $c_2=-1$) e $y_2(x)=2-x$ (cioè $c_1=2$, $c_2=-1$). Poiché il wronskiano vale 1, la formula risolutiva si scrive

$$y(x)=(x-2)\int_0^x(1-\xi)\,f(\xi)\,d\xi+(x-1)\int_x^1(2-\xi)\,f(\xi)\,d\xi.$$

Relativamente al termine noto $f(x)=x^n$ essa fornisce la soluzione

$$y(x)=\frac{-x^{n+2}+(n+3)x-(n+3)}{(n+1)(n+2)}.$$

8.4. L'equazione del calore

8.4-1. Verificare che le soluzioni dell'equazione del calore che sono indipendenti dal tempo sono tutte (e soltanto) quello del tipo $u(x,t)=ax+b$.

SOLUZIONE. Se u è indipendente da t, $u(x,t)=u(x)$, l'equazione del calore diventa $u_{xx}=0$.

8.4-2. Verificare che i polinomi del tipo $u(x,t)=ax^2+bx+c+2at$ (in particolare i polinomi di grado ≤ 1 nella sola x) sono soluzioni dell'equazione del calore $u_t=u_{xx}$.

SOLUZIONE. si trova $u_t=u_{xx}=2a$.

8.4-3. Sotto quale condizione sui coefficienti α e β le due funzioni $e^{\alpha t}\cos(\beta x)$ e $e^{\alpha t}\sin(\beta x)$ sono soluzioni dell'equazione del calore $u_t=u_{xx}$?

SOLUZIONE. Sotto la condizione $\alpha=-\beta^2$.

8.4-4. Verificare che la funzione

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{t}}\exp\Big(-\frac{x^2}{4t}\Big)$$

soddisfa l'equazione del calore $u_t=u_{xx}$ per $t>0$.

SOLUZIONE. Si trova

$$u_t(x,y)=\Big[-\frac{1}{2}\,t^{-3/2}+\frac{1}{4}\,t^{-5/2}\,x^2\Big]\exp\Big(-\frac{x^2}{4t}\Big);$$

$$u_x(x,y)=-\frac{1}{2}\,t^{-3/2}\,x\exp\Big(-\frac{x^2}{4t}\Big),$$

$$u_{xx}(x,y)=\Big[-\frac{1}{2}\,t^{-3/2}+\frac{1}{4}\,t^{-5/2}\,x^2\Big]\exp\Big(-\frac{x^2}{4t}\Big).$$

8.4-5. Verificare che la funzione

$$u(x,y,t) = \frac{1}{t}\,\exp\Big(-\frac{x^2+y^2}{4t}\Big)$$

soddisfa l'equazione del calore $u_t = u_{xx} + u_{yy}$ per $t > 0$.

SOLUZIONE. Si trova

$$u_t(x,y) = \Big[-t^{-2} + \frac{1}{4}\,t^{-3}\,(x^2+y^2)\Big]\,\exp\Big(-\frac{x^2+y^2}{4t}\Big);$$

$$u_x(x,y) = -\frac{1}{2}t^{-2}\,x\,\exp\Big(-\frac{x^2+y^2}{4t}\Big),$$

$$u_{xx}(x,y) = \Big[-\frac{1}{2}\,t^{-2} + \frac{1}{4}\,t^{-3}\,x^2\Big]\,\exp\Big(-\frac{x^2+y^2}{4t}\Big),$$

e analogamente

$$u_{yy}(x,y) = \Big[-\frac{1}{2}\,t^{-2} + \frac{1}{4}\,t^{-3}\,y^2\Big]\,\exp\Big(-\frac{x^2+y^2}{4t}\Big).$$

8.4-6. Applicare il metodo di separazione delle variabili alla soluzione del problema

$$u_t = u_{xx}, \quad x \in [0,L],\ t > 0, \quad u(x,0) = u_0(x), \quad u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0,$$

corrispondente al caso di una sbarra conduttrice i cui estremi sono isolati.

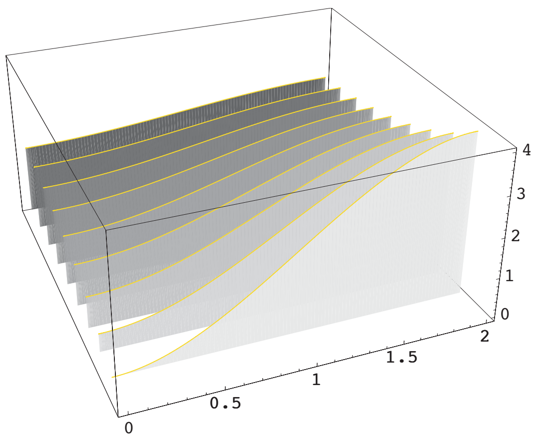

Figura 8.4-5.
Soluzione approssimata del problema posto nell'esercizio 8.4-6, con i dati $L = 2,\ u_0(x) = 4x - x^3$.

Verificare che si ottiene la soluzione sotto la forma

$$u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n>0} a_n\,\cos\Big(\frac{n\pi}{L}\,x\Big)\,\exp\Big[-\Big(\frac{n\pi}{L}\Big)^2\,t\Big],$$

dove $a_n = (2/L)\int_0^L u_0(t)\,\cos(n\pi/L\,t)\,dt$. Quanto vale il limite $\lim_{t\to\infty} u(x,t)$?

SOLUZIONE. Procediamo in modo analogo a quanto fatto nel testo a pagine 320 – 321. Posto $u(x,y) = X(x)T(t)$, sostituendo nell'equazione $u_{xx} = u_t$ si perviene alle due equazioni differenziali

$$X'' = X, \quad T' = kT.$$

Le condizioni ai limiti per la prima equazione, cioè $X'(0) = X'(L) = 0$, possono essere soddisfatte solo per $k \le 0$, dunque $k = -\omega^2$, con $\omega \ge 0$. Poiché la soluzione generale dell'equazione $X'' + \omega^2 X = 0$ si scrive

$$X(x) = c_1\cos(\omega x) + c_2\sin(\omega x),$$

da cui

$$X'(x) = -c_1\omega\sin(\omega x) + c_2\omega\cos(\omega x),$$

ponendo $X'(0) = 0$ si ottiene $c_2 = 0$, dunque $X(x) = c_1 \cos(\omega x)$. La condizione $X'(L) = 0$, cioé $\sin(\omega L) = 0$, implica che i valori accettabili per ω sono

$$\omega_n = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 0, 1, 2, \dots .$$

Possiamo dunque scrivere una soluzione dell'equazione del calore che verifica le condizioni $u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0$ nella forma

$$u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n \cos\Big(\frac{n\pi}{L}\, x\Big) \exp\Big[-\Big(\frac{n\pi}{L}\Big)^2 t\Big].$$

Per soddisfare la condizione iniziale $u(x,0) = u_0(x)$ possiamo prolungare per parità la funzione u_0 sull'intervallo $[-L, L]$:

$$\forall x \in [0, L]:\ u_0(-x) := u_0(x),$$

dopodiché la condizione iniziale si scrive

$$u(x,0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n \cos\Big(\frac{n\pi}{L}\, x\Big) = u_0(x);$$

essa viene soddisfatta scegliendo come a_n i coefficienti di Fourier di u_0.

Per $t \to +\infty$ la funzione $u(x,t)$ tende ad $a_0/2$.

8.6. Il metodo delle serie di potenze

8.6-1. I polinomi di Čebyšev sono autofunzioni dell'equazione differenziale

$$(1 - x^2)\, y'' - xy' + \lambda y = 0,$$

e più precisamente T_n corrisponde all'autovalore $\lambda_n = n^2$. Procedendo come nell'esempio 8.6-5, si utilizzi il metodo delle serie di potenze per dedurre la formula

$$a_{k+2} = -\frac{n^2 - k^2}{(k+1)(k+2)}\, a_k$$

per il calcolo dei coefficienti di T_n. Sapendo che il termine direttivo di T_n vale 2^{n-1}, ponendo $k = n - 2h$ si ottenga il seguente schema

$$\begin{aligned} a_n &:= 2^{n-1}, \\ a_{n-2h} &:= -\frac{(n-2h+1)(n-2h+2)}{4h\,(n-h)}\, a_{n-2(h-1)}, \quad h = 1, 2, \dots, \lfloor n/2 \rfloor. \end{aligned}$$

8.6-2. I polinomi di Laguerre sono autofunzioni dell'equazione differenziale

$$x\, y'' + (1 - x)\, y' + \lambda y = 0,$$

e più precisamente L_n corrisponde all'autovalore $\lambda_n = n$. Utilizzando il metodo delle serie potenze si deduca la formula

$$a_{k+1} = -\frac{n-k}{(k+1)^2}\, a_k,$$

che, unita alla condizione iniziale $a_0 = 1$, consente il calcolo ricorsivo dei coefficienti di L_n.

8.6-3. I polinomi di Hermite sono autofunzioni dell'equazione differenziale

$$y'' - 2x\, y' + \lambda y = 0,$$

e più precisamente H_n corrisponde all'autovalore $\lambda_n = 2n$. Procedendo come nei precedenti esercizi, si ottenga la formula

$$a_{k+2} = -\frac{2(n-k)}{(k+1)(k+2)}\, a_k.$$

Si ponga poi $k = n - 2h$, e si scriva uno schema ricorsivo che consenta il calcolo dei coefficienti del polinomio H_n a partire dal coefficiente direttivo $d_n = 2^n$.

Esercizi proposti

8.6-P.1. Si chiama equazione *ipergeometrica* (v. Appendice 8-E) l'equazione differenziale

$$x(1-x)\,y'' + [c - (a+b+1)\,x]\,y' - ab\,y = 0,$$

dove a, b e c sono parametri reali. Dimostrare che il metodo delle serie di potenze conduce alla formula ricorsiva

$$a_{k+1} = \frac{(a+k)(b+k)}{(1+k)(c+k)}\,a_k,$$

e pertanto, se si pone $a_0 = 1$, alla serie *ipergeometrica*

$$1 + \sum_{k\geq 1} \frac{a(a+1)\ldots(a+k-1)\,b(b+1)\ldots(b+k-1)}{k!\,c(c+1)\ldots(c+k-1)}\,x^k.$$

Se si introduce il simbolo $(x)^k := x(x+1)(x+2)\ldots(x+k-1)$, $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}^*$, con la convenzione $(x)^0 := 1$, allora si può scrivere la serie ipergeometrica nella forma

$$F(a,b,c;x) = \sum_{k\geq 0} \frac{(a)^k\,(b)^k}{k!\,(c)^k}\,x^k.$$

Si dimostri che il raggio di convergenza della serie scritta è 1. Si osservi che $k! = (1)^k$.

Soluzione. Posto $y(x) = \sum_{k\geq 0} a_k x^k$, sostituendo nell'equazione ipergeometrica si trova

$$x(1-x)\sum_{k\geq 2} k(k-1)\,a_k x^{k-2} + [c-(a+b+1)\,x]\sum_{k\geq 1} k\,a_k x^{k-1} - ab\sum_{k\geq 0} a_k x^k = 0$$

uguaglianza che può essere riscritta successivamente

$$-\sum_{k\geq 2} k(k-1)\,a_k x^k + \sum_{k\geq 2} k(k-1)\,a_k x^{k-1} + \\ + c\sum_{k\geq 1} k a_k x^{k-1} + (a+b+1)\sum_{k\geq 1} k a_k x^k - ab\sum_{k\geq 0} a_k x^k = 0,$$

$$-\sum_{k\geq 0} k(k-1)\,a_k x^k + \sum_{k\geq 0} k(k+1)\,a_{k+1} x^k + \\ +c\sum_{k\geq 1}(k+1)\,a_{k+1}x^k + (a+b+1)\sum_{k\geq 0} k\,a_k x^k - ab\sum_{k\geq 0} a_k x^k = 0.$$

Uguagliando a 0 il coefficiente di x^k si trova

$$a_{k+1}(k+1)(c+k) = a_k[k(k-1) + k(a+b+1) + ab]$$

da cui segue la formula ricorsiva indicata.

Per calcolare il raggio di convergenza della serie ipergeometrica possiamo calcolare il limite

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{a_{k+1}}$$

a patto che esso esista. Si rivedano le pagine 136 e 137 del testo. Ma il limite del rapporto indicato esiste e vale 1 in quanto esso si scrive

$$\frac{(1+k)(c+k)}{(a+k)(b+k)}.$$

8.6-P.2. Verificare le identità:

$$F(1,1,1;x) = 1 + x + \ldots + x^n + \ldots = \frac{1}{1-x}, \qquad F(-n,1,1;x) = (1-x)^n.$$

Soluzione. Per $a = b = c = 1$ il coefficiente di x^k vale

$$\frac{(1)^k(1)^k}{(1)^k(1)^k} = 1.$$

Per $a = -n$, con n naturale e $b = c = 1$, il coefficiente di x^k vale

$$\begin{aligned}\frac{(-n)^k}{k!} &= \frac{-n(-n+1)\ldots(-n+k-1)}{k!} = \\ &= (-1)^k \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!} = (-1)^k \binom{n}{k}.\end{aligned}$$

8.6-P.3. Calcolare la serie di Taylor della funzione $f(x) = \arctan x$:

$$f(x) = \arctan x = \sum_{k\geq 0} a_k\, x^k$$

sapendo che $a_0 = 0$ e si ha

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad (1+x^2)\, f'(x) = 1.$$

Soluzione. Si ha innanzitutto $a_0 = f(0) = 0$. Si ha poi $f'(x) = \sum_{k\geq 1} k\, a_k\, x^{k-1}$. Sostituendo nell'ultima equazione scritta si ha, in un primo tempo,

$$\sum_{k\geq 1} k\, a_k\, x^{k-1} + \sum_{k\geq 1} k\, a_k\, x^{k+1} = 1,$$

uguaglianza che si può riscrivere

$$\sum_{k\geq 0} (k+1)\, a_{k+1}\, x^k + \sum_{k\geq 2} (k-1)\ a_{k-1}\, x^k = 1.$$

Abbiamo dunque, per $k = 0$, $a_1 = 1$, per $k = 1$, $a_2 = 0$ e, per $k \geq 2$, la formula ricorsiva

$$a_{k+1} = -\frac{k-1}{k+1}\, a_{k-1}.$$

Dunque tutti i coefficienti a_k di indice pari sono nulli (in accordo col fatto che la funzion arcotangente è dispari), mentre si ha

$$a_3 = -\frac{1}{3}\, a_1 = -\frac{1}{3}, \qquad a_5 = -\frac{3}{5}\, a_3 = \frac{1}{5}, \ \ldots\ ;$$

in generale $a_{2k+1} = (-1)^k/(2k+1)$, cioè

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots\ .$$

8.6-P.4. Calcolare la serie di Taylor della funzione $f(x) = \ln(1+x)$:

$$f(x) = \ln(1+x) = \sum_{k\geq 0} a_k\, x^k$$

sapendo che $a_0 = 0$ e si ha

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \qquad \Longleftrightarrow \qquad (1+x)\, f'(x) = 1.$$

Soluzione. Si ha innanzitutto $a_0 = f(0) = 0$. Si ha poi $f'(x) = \sum_{k\geq 1} k\, a_k\, x^{k-1} = \sum_{k\geq 0} (k+1)\, a_{k+1}\, x^k$. Sostituendo nell'ultima equazione scritta si ha dunque

$$\sum_{k\geq 0} [(k+1)\, a_{k+1} + k\, a_k]\, x^k = 1,$$

da cui segue, per $k = 0$, $a_1 = 1$, e, per $k > 0$, la formula ricorsiva

$$a_{k+1} = -\frac{k}{k+1}\, a_k.$$

Dunque

$$a_2 = -\frac{1}{2}, \quad a_3 = -\frac{2}{3}\cdot\Big(-\frac{1}{2}\Big) = \frac{1}{3}, \quad a_4 = -\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3} = -\frac{1}{4}, \ldots ;$$

in generale $a_k = (-1)^{k+1}/k$, cioè

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots\ .$$

8.6-P.5. Calcolare la serie di Taylor della funzione $f(x) = \ln[(1+x)/(1-x)]$:

$$f(x) = \ln\frac{1+x}{1-x} = \sum_{k\ge 0} a_k\, x^k$$

sapendo che $a_0 = 0$ e si ha

$$f'(x) = \frac{2}{(1-x)^2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad (1-x^2)\, f'(x) = 2.$$

Soluzione. Posto $f(x) = \sum_{k\ge1} a_k x^k$, si trova

$$(1-x^2)\sum_{k\ge1} k a_k x^{k-1} = 2,$$

uguaglianza che si riscrive successivamente

$$\sum_{k\ge1} k a_k x^{k-1} - \sum_{k\ge1} k a_k x^{k+1} = 2,$$

$$\sum_{k\ge0} (k+1)\, a_{k+1} x^k - \sum_{k\ge2} (k-1)\, a_{k-1} x^k = 2.$$

Uguagliando a primo e a secondo membro i termini di grado 0 e 1 si ottiene

$$a_1 = 2, \qquad 2a_2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad a_2 = 0;$$

per ogni $k \ge 2$, uguagliando i termini di grado k si ottiene

$$k+1)\, a_{k+1} = (k-1)\, a_{k-1} \quad \Longrightarrow \quad a_{k+1} = \frac{k-1}{k+1}\, a_{k-1}.$$

Ne segue che tutti i coefficienti di indice pari sono nulli, mentre si ha

$$a_3 = \frac{1}{3}\, a_1 = \frac{2}{3}, \quad a_5 = \frac{3}{5}\, a_3 = \frac{2}{5},$$

e, in generale, $a_{2k+1} = 2/(2k+1)$. In conclusione

$$f(x) = \ln\frac{1+x}{1-x} = 2\sum_{k\ge0} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}.$$

8.6-P.6. Con riferimento ai precedenti esercizi, verificare che

$$\ln(1+x) = x\, F(1,1,2;-x), \quad \ln\frac{1+x}{1-x} = 2x\, F(1/2,\, 1,\, 3/2;\, x^2).$$

$$\arctan x = x\, F(1/2,1,3/2;-x^2), \quad \arcsin x = x\, F(1/2,1/2,3/2;x^2).$$

Soluzione. Occupiamoci della prima uguaglianza. Si ha

$$x\, F(1,1,2;-x) = x\sum_{k\ge0} \frac{(1)^k\,(1)^k}{(1)^k\,(2)^k}(-1)^k\, x^k = \sum_{k\ge0}\frac{k!}{(k+1)!}(-1)^k\, x^{k+1} =$$

$$= \sum_{k\ge0} (-1)^k\, \frac{x^{k+1}}{k+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots\ .$$

8.6-P.7. Risolvere per serie il problema di valori iniziali $(1+x^2)y' = 2xy$, $y(0) = 1$, verificando che la soluzione è un polinomio.

SOLUZIONE. Posto $y(x) = \sum_{k\geq 0} a_k\, x^k$, si trova $y'(x) = \sum_{k\geq 1} ka_k\, x^{k-1}$, quindi sostituendo nell'equazione considerata

$$\sum_{k\geq 1} ka_k\, x^{k-1} + \sum_{k\geq 1} ka_k\, x^{k+1} = 2\sum_{k\geq 0} a_k\, x^{k+1},$$

uguaglianza che si può scrivere in forma equivalente

$$\begin{aligned}&\sum_{k\geq 0}(k+1)a_{k+1}\, x^k + \sum_{k\geq 2}(k-1)a_{k-1}\, x^k - 2\sum_{k\geq 1} a_{k-1}\, x^k = \\ &= a_1 + (2a_2 - 2a_0)\, x + \sum_{k\geq 2}[(k+1)a_{k+1} - (k-3)\, a_{k-1}]\, x^k = 0. \qquad (*)\end{aligned}$$

Si ha innanzitutto $a_0 = y(0) = 1$; uguagliando a 0 i coefficienti dei termini di grado 0 e 1 nella serie a primo membro di (*) si ha $a_1 = 0$, $2a_2 - 2a_0 = 0 \implies a_2 = 1$, mentre uguagliando a 0 il coefficiente di x^k, per $k \geq 2$, si ha la formula ricorsiva

$$a_{k+1} = -\frac{k-3}{k+1}\, a_{k-1}.$$

Da essa segue che tutti i coefficienti di indice dispari sono nulli, e poiché (ponendo $k = 3$) si ha $a_4 = 0$, sono nulli anche tutti i coefficienti di ordine pari a partire da a_4 stesso. Ne segue che la soluzione è $y(x) = 1+x^2$, la cui correttezza è subito verificata.

8.6-P.8. Generalizzare il precedente esercizio risolvendo per serie il problema di valori iniziali $(1+x^2)y' = 2\,p\,x\,y$, $y(0) = 1$, con p reale, verificando che $a_0 = 1$, i coefficienti a_k sono nulli per k dispari e, per ogni $k > 0$,

$$a_{2k} = \frac{p(p-1)\ldots(p-k+1)}{k!} = \binom{p}{k},$$

quindi, ricordando la serie binomiale, $y(x) = (1+x^2)^p$.

8.6-P.9. Risolvere per serie il problema di valori iniziali $y'' + xy' + y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, verificando che la soluzione è esprimibile mediante la funzione esponenziale: $y(x) = e^{\phi(x)}$, con ϕ funzione opportuna..

SOLUZIONE. Posto $y(x) = \sum_{n\geq 0} a_n\, x^n$, si trova $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, e, per $n \geq 0$, la formula ricorsiva

$$a_{n+2} = -\frac{a_n}{n+2}.$$

Dunque per i coefficienti di indice dispari si ha $a_{2n+1} = 0$ e per quelli di indice pari

$$a_{2n} = \frac{1}{(2n)!!} = \frac{1}{2^n\, n!}.$$

Ne segue che la soluzione si scrive

$$y(x) = \sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}\Big(\frac{-x^2}{2}\Big)^n;$$

confrontando con la serie esponenziale si riconosce che $y(x) = \exp(-x^2/2)$.

8.7. Le funzioni di Bessel

8.7-P.1. Risolvere per serie l'equazione differenziale $xy''+y'+y = 0, x \in \mathbb{R}$. Mostrare che la soluzione ottenuta con la condizione iniziale $y(0) = 1$ è esprimibile, per $x \geq 0$, mediante la funzione di Bessel J_0 nella forma $J_0(\phi(x))$, con ϕ funzione opportuna.

SOLUZIONE. Posto $y(x) = \sum_{k\geq 0} a_k\, x^k$,si trova

$$\sum_{k\geq 2} k(k-1)\, a_k x^{k-1} + \sum_{k\geq 1} k a_k\, x^{k-1} + \sum_{k\geq 0} a_k\, x^k = 0.$$

Nella prima somma l'indice può partire da 1, quindi le prime due somme si compattano nell'unica somma $\sum_{k\geq 1} k^2 a_k\, x^{k-1}$ che può riscriversi $\sum_{k\geq 0}(k+1)^2 a_{k+1}\, x^k$. In conclusione abbiamo l'uguaglianza

$$\sum_{k\geq 0} [(k+1)^2 a_{k+1} + a_k]\, x^k = 0,$$

da cui la formula ricorsiva

$$a_{k+1} = -\frac{a_k}{(k+1)^2}$$

Da $a_0 = 1$, segue dunque

$$a_1 = -1, \quad a_2 = \frac{1}{2^2}, \quad a_3 = -\frac{1}{(2\cdot 3)^2},$$

in generale $a_k = (-1)^k/(k!)^2$, quindi

$$y(x) = \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{(k!)^2}\, x^k.$$

Ora

$$J_0(\phi(x)) = \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{\phi(x)}{2}\right)^{2k},$$

espressione che coincide con la precedente a patto che sia $\phi(x)^2/4 = x$, cioè si scelga $\phi(x) = 2\sqrt{x}$.

Operatori differenziali nel piano e nello spazio

Esercizi proposti

1. Verificare che la funzione $u(x,y) = \log(x^2+y^2)$ è soluzione dell'equazione di Laplace $\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} = 0$, in tutti i punti del piano distinti dall'origine, cioè per $x^2+y^2 > 0$.

Soluzione. Infatti

$$u_x = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad u_y = \frac{y}{x^2+y^2},$$

$$u_{xx} = \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}, \quad u_{yy} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

2. Verificare che la funzione $u(x,y,z) = 1/\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, è soluzione dell'equazione di Laplace $\nabla^2 u = u_{xx}+u_{yy}+u_{zz} = 0$, in tutti i punti dello spazio distinti dall'origine, cioè per $x^2+y^2+z^2 > 0$.

Soluzione. Se P è il punto di coordinate (x,y,z), introduciamo la funzione $r(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$; essa è semplicemente la norma euclidea del vettore di posizione $\overline{OP}$:

$$r(x,y,z) = \left\|\overline{OP}\right\|_2.$$

Si ha facilmente:

$$r_x = \frac{x}{r}, \quad r_y = \frac{y}{r}, \quad r_z = \frac{z}{r}.$$

Allora per la funzione $u = 1/r$ si trova

$$u_x = -\frac{r_x}{r^2} = -\frac{x}{r^3}, \quad u_{xx} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3xr_x}{r^4} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3x^2}{r^5},$$

e analogamente

$$u_{yy} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3y^2}{r^5}, \quad u_{zz} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3z^2}{r^5}.$$

In definitiva:

$$\nabla^2 u = -\frac{3}{r^3} + \frac{3(x^2 + y^2 + z + 2)}{r^5} = -\frac{3}{r^3} + \frac{3r^2}{r^5} = 0.$$

3. Si consideri la famiglia di funzioni, da $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{C}$, $u(x, y, z) := e^{ax+by+cz}$, con a, b e c costanti complesse non tutte nulle. Si chiede quale relazione debbano soddisfare tali costanti affinché u sia soluzione dell'equazione $\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$.

Soluzione. Si trova subito $\nabla^2 u = (a^2+b^2+c^2)\, u$, quindi la condizione è $a^2+b^2+c^2 = 0$. Esistono infinite terne di valori che soddisfano tale condizione: ad esempio si possono scegliere a e b reali ad arbitrio, e ricavare $c = i\sqrt{a^2 + b^2}$. Le scelte $a = 3$, $b = 4$, $c = 5i$ sono ammissibili, fornendo la funzione $u(x, y, z) = e^{3x+4y+iz}$.

Scegliendo parte reale e parte immaginaria di u si ottengono le due funzioni armoniche reali $u_1(x, y, z) = e^{3x+4y} \cos(5z)$, $u_2(x, y, z) = e^{3x+4y} \sin(5z)$