

8. Applicazioni

8.1. Problemi ai limiti per equazioni differenziali omogenee

Molti problemi matematici della fisica e dell'ingegneria sono riconducibili alla soluzione di equazioni differenziali lineari del secondo ordine del tipo

$$p_0(x) y''(x) + p_1(x) y'(x) + p_2(x) y(x) = \lambda w(x) y(x), \quad (1)$$

su un assegnato intervallo $a \leq x \leq b$, con condizioni del tipo

$$k_1 y(a) + k_2 y'(a) = 0, \quad h_1 y(b) + h_2 y'(b) = 0 \quad (2)$$

oppure del tipo

$$y(a) = y(b), \quad y'(a) = y'(b). \quad (3)$$

Nelle uguaglianze precedenti p_0, p_1, p_2 e w sono funzioni reali continue, assegnate sull'intervallo $[a, b]$, λ è un parametro, k_1 e k_2 sono due costanti reali non entrambe nulle; lo stesso vale per h_1 e h_2 . Supporremo $p_0(x) \neq 0$ e $w(x) > 0$ per $x \in (a, b)$.

Il problema considerato viene detto *problema di valori ai limiti* per l'equazione (1), o anche *problema di Sturm-Liouville*, dai nomi del matematico svizzero J. Sturm (1803-1855) e del francese J. Liouville, che già abbiamo citato nel capitolo 4.

problema di
Sturm-Liouville

Chiaramente, per ogni λ il problema posto ha la soluzione identicamente nulla $y(x) = 0$; un valore di λ (se esiste) in corrispondenza del quale lo stesso problema ammette una soluzione non nulla viene detto un *autovalore* del problema stesso, e la soluzione viene detta un'*autofunzione* corrispondente all'autovalore individuato.

autovalore
autofunzione

Poiché stiamo considerando un'equazione lineare omogenea e condizioni ai limiti omogenee, è chiaro che l'autofunzione è definita a meno di una costante moltiplicativa, cioè se $y(x)$ è un'autofunzione corrispondente a λ , lo stesso vale per $c y(x)$ per ogni $c \neq 0$.

Indicheremo il primo membro della (1) col simbolo $L[y]$, cioè porremo

$$L[y] := p_0(x) y''(x) + p_1(x) y'(x) + p_2(x) y(x). \quad (4)$$

Possiamo considerare L come un operatore da $C^{(2)}[a, b]$ a $C[a, b]$:

$$y \in C^{(2)}[a, b] \xrightarrow{L} L[y] \in C[a, b].$$

Lo spazio $C^{(2)}[a, b]$ è un sottospazio di $L^2[a, b]$; se y e z sono due funzioni due volte derivabili, ci si chiede se è possibile esprimere il prodotto scalare

$$(L[y] | z) = \int_a^b (p_0 y'' + p_1 y' + p_2 y) z \, dx$$

in modo che nella funzione integranda compaia soltanto la funzione y e non le sue derivate. Evidentemente ciò può farsi mediante alcune integrazioni per parti, sempre che i coefficienti p_0 e p_1 siano abbastanza regolari. In effetti se p_0 è di classe $C^{(2)}$ e p_1 di classe $C^{(1)}$ abbiamo

$$\int_a^b p_1 y' z \, dx = [p_1 y z]_a^b - \int_a^b y (p_1' z + p_1 z') \, dx,$$

$$\begin{aligned} \int_a^b p_0 y'' z \, dx &= [p_0 y' z]_a^b - \int_a^b y' (p_0' z + p_0 z') \, dx = \\ &= [p_0 y' z - p_0' y z - p_0 y z']_a^b + \int_a^b y (p_0'' z + 2p_0' z' + p_0 z'') \, dx. \end{aligned}$$

In definitiva

$$\begin{aligned} (L[y] | z) &= [p_0 y' z - p_0' y z - p_0 y z' + p_1 y z]_a^b + \\ &+ \int_a^b y (p_0 z'' + (2p_0' - p_1) z' + (p_0'' - p_1' + p_2) z) \, dx = \\ &= [p_0 y' z - p_0' y z - p_0 y z' + p_1 y z]_a^b + (y | L^*[z]), \end{aligned}$$

avendo posto

$$L^*[z] := p_0 z'' + (2p_0' - p_1) z' + (p_0'' - p_1' + p_2) z.$$

identità di Lagrange

Abbiamo ottenuto l'identità di Lagrange

$$(L[y] | z) = [p_0 y' z - p_0' y z - p_0 y z' + p_1 y z]_a^b + (y | L^*[z]). \quad (5)$$

operatore aggiunto

L'operatore L^* viene detto *aggiunto formale* dell'operatore L , e diremo che L è *formalmente auto-aggiunto* se $L^* = L$. La condizione affinché L sia formalmente autoaggiunto è semplicemente

$$p_0' = p_1; \quad (6)$$

infatti essa implica che $2p_0' - p_1 = p_1$ e $p_0'' - p_1' + p_2 = p_2$, dunque $L^* = L$. Se vale la (6), anche l'identità di Lagrange si semplifica e si scrive

$$(L[y] | z) = [p_0 (y' z - y z')]_a^b + (y | L[z]), \quad (7)$$

mentre L si può scrivere nella forma

$$L[y] = (p_0 y')' + p_2 y.$$

Per cogliere il senso delle definizioni poste, si consideri il caso di una trasformazione lineare dello spazio vettoriale \mathbb{C}^n in sé. Sappiamo dall'Algebra Lineare che una tale trasformazione è rappresentabile nella forma $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{x}$, dove $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ è un qualsivoglia vettore di \mathbb{C}^n e $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ è un'opportuna matrice $n \times n$. Se \mathbf{z} è un secondo vettore di \mathbb{C}^n si ha

$$\mathbf{A}\mathbf{x} \cdot \mathbf{z} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{A}^* \mathbf{z},$$

dove $\mathbf{A}^* = [a_{ji}^*]$ è l'*aggiunta* della matrice \mathbf{A} , cioè la matrice ottenuta da \mathbf{A} scambiando le righe con le colonne e prendendo i coniugati. Il prodotto scalare indicato col simbolo \cdot è il prodotto cosiddetto *canonico* (\uparrow esempio 1.3-1). Se $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}$ la matrice è *auto-aggiunta* o *hermitiana*; in tal caso essa gode di notevoli proprietà: i suoi autovalori sono reali e i corrispondenti autovettori sono tra loro ortogonali.

Ci si chiede sotto quali ipotesi la (7) si riduca all'uguaglianza

$$(L[y] | z) = (y | L[z]), \quad (7')$$

nel qual caso diremo che l'operatore L è *auto-aggiunto*. Evidentemente occorrerà considerare L non come definito su tutto lo spazio $C^{(2)}[a, b]$, ma su un sottospazio di quest'ultimo, ottenuto aggiungendo opportune condizioni di annullamento in a e in b che consentano di eliminare la parte integrata nella (7).

Consideriamo innanzi tutto condizioni di tipo (2), cioè condizioni assegnate *separatamente* in a e in b . Sia dunque l'operatore L definito sul dominio costituito dalle funzioni di classe $C^{(2)}[a, b]$ che verificano le condizioni ai limiti (2):

$$D_L^{(a,b)} := \{y \in C^{(2)}[a, b] \mid (k_1 y(a) + k_2 y'(a) = 0) \wedge (h_1 y(b) + h_2 y'(b) = 0)\}.$$

Dalla (7) segue che la condizione affinché L sia auto-aggiunto si scrive

$$p_0(b)[y'(b)z(b) - y(b)z'(b)] - p_0(a)[y'(a)z(a) - y(a)z'(a)] = 0. \quad (8)$$

Ora, se y e z appartengono entrambe al dominio $D_L^{(a,b)}$ esse soddisfano alle (2), quindi

$$\begin{cases} k_1 y(a) + k_2 y'(a) = 0 \\ k_1 z(a) + k_2 z'(a) = 0. \end{cases}$$

Dunque la coppia non nulla (k_1, k_2) è soluzione del sistema omogeneo di matrice

$$\begin{bmatrix} y(a) & y'(a) \\ z(a) & z'(a) \end{bmatrix};$$

il relativo determinante è pertanto nullo:

$$\begin{vmatrix} y(a) & y'(a) \\ z(a) & z'(a) \end{vmatrix} = y(a)z'(a) - y'(a)z(a) = 0.$$

Analogamente dalle condizioni imposte nel punto b , cioè

$$\begin{cases} h_1 y(b) + h_2 y'(b) = 0 \\ h_1 z(b) + h_2 z'(b) = 0 \end{cases}$$

segue $y(b)z'(b) - y'(b)z(b) = 0$. La (8) è dunque soddisfatta.

Si osservi che se fosse $p_0(a) = 0$, essendo $p_0(x) \neq 0$ per $x \in (a, b)$, basterebbe la condizione imposta nel punto b , cioè la seconda delle (2), per soddisfare la (8). Analogamente, se fosse $p_0(x) \neq 0$ per $x \in [a, b)$ e $p_0(b) = 0$, basterebbe la prima delle condizioni (2) per soddisfare la (8).

Se infine fosse $p_0(a) = p_0(b) = 0$, essendo $p_0(x) \neq 0$ per $x \in (a, b)$, la (8) sarebbe soddisfatta per tutte le coppie di funzioni $y, z \in C^{(2)}[a, b]$.

Fino a questo punto abbiamo considerato condizioni ai limiti imposte separatamente in a e in b ; consideriamo condizioni di tipo *periodico* (3), cioè

$$y(a) = y(b), \quad y'(a) = y'(b).$$

La (8) diventa

$$[p_0(b) - p_0(a)][y'(a)z(a) - y(a)z'(a)] = 0; \quad (8)$$

essa è soddisfatta se $p_0(a) = p_0(b)$.

La discussione precedente può essere sintetizzata mediante la

Proposizione 8.1-1. Sia $L[y] = (p_0 y')' + p_2 y$ un operatore formalmente auto-aggiunto. Esso è auto-aggiunto sul dominio

$$D_L^{(a,b)} := \{y \in C^{(2)}[a, b] \mid (k_1 y(a) + k_2 y'(a) = 0) \wedge (h_1 y(b) + h_2 y'(b) = 0)\}.$$

Se $p_0(x) \neq 0$ per $x \in (a, b)$ e $p_0(a) = 0$, esso è auto-aggiunto sul dominio

$$D_L^{(b)} := \{y \in C^{(2)}[a, b] \mid h_1 y(b) + h_2 y'(b) = 0\};$$

se $p_0(x) \neq 0$ per $x \in [a, b)$ e $p_0(b) = 0$, esso è auto-aggiunto sul dominio

$$D_L^{(a)} := \{y \in C^{(2)}[a, b] \mid k_1 y(a) + k_2 y'(a) = 0\};$$

se poi $p_0(x) \neq 0$ per $x \in (a, b)$ e $p_0(a) = p_0(b) = 0$, esso è auto-aggiunto sul dominio $C^{(2)}[a, b]$.

Se infine $p_0(a) = p_0(b)$, allora esso è auto-aggiunto sul dominio

$$D_L^{(p)} := \{y \in C^{(2)}[a, b] \mid (y(a) = y(b)) \wedge (y'(a) = y'(b))\}.$$

Riprendiamo in considerazione il problema inizialmente posto, nell'ipotesi che L sia formalmente auto-aggiunto; lo riscriviamo nella forma

$$-(p(x)y'(x))' + q(x)y(x) = \lambda w(x)y(x), \quad (1')$$

cioè scriviamo $-p$ al posto di p_0 , q al posto di p_2 . Supporremo $p \in C^{(2)}[a, b]$, $q, w \in C[a, b]$. Mostriamo un esempio.

Esempio 8.1-1. Un semplice problema di Sturm-Liouville, che incontreremo più volte nel seguito, è espresso dalle uguaglianze

$$y'' + \lambda y = 0 \iff -y'' = \lambda y, \quad y(0) = 0, \quad y(L) = 0,$$

dove $L > 0$. Con riferimento alle formule (1') e (2) abbiamo $p(x) = 1$, $q(x) = 0$, $w(x) = 1$, $a = 0$, $b = L$, $k_1 = h_1 = 1$, $k_2 = h_2 = 0$.

Se λ è negativo, diciamo $\lambda = -\omega^2$, con $\omega > 0$, la soluzione generale dell'equazione considerata si scrive

$$y(x) = c_1 e^{\omega x} + c_2 e^{-\omega x}.$$

Le condizioni ai limiti ci conducono a scrivere il sistema

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 e^{\omega L} + c_2 e^{-\omega L} = 0, \end{cases}$$

da cui segue $c_1 = c_2 = 0$ e pertanto y è identicamente nulla. Dunque il problema posto non ammette autovalori negativi. Lo stesso vale per $\lambda = 0$; in tal caso la soluzione generale si scrive $y(x) = c_1 + c_2 x$ e le condizioni ai limiti conducono ancora alle uguaglianze $c_1 = c_2 = 0$.

Se λ è positivo, sia $\lambda = \omega^2$, con $\omega > 0$, la soluzione generale dell'equazione considerata si scrive

$$y(x) = c_1 \cos(\omega x) + c_2 \sin(\omega x).$$

Dalla condizione $y(0) = 0$ deduciamo $c_1 \cdot 1 = 0$, quindi $c_1 = 0$, mentre dalla condizione $y(L) = 0$, cioè $c_2 \sin(\omega L) = 0$, deduciamo

$$\sin(\omega L) = 0 \iff \omega L = k\pi \iff \omega = \frac{k\pi}{L}, \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

Per $k = 1, 2, 3, \dots$, abbiamo le autofunzioni

$$y_k(x) := \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right),$$

corrispondenti agli autovalori $\lambda_k = (k\pi/L)^2$. In particolare, se $L = \pi$, abbiamo la successione di autofunzioni $\sin kx$, corrispondenti agli autovalori $\lambda_k = k^2$, $k \in \mathbb{N}^*$. $\triangleleft \square$

La situazione mostrata nel semplice esempio precedente, cioè l'esistenza di una successione di autovalori, si ripete in molti casi di interesse applicativo; più oltre daremo qualche risultato generale al riguardo (\downarrow Prop. 8.1-3).

ortogonalità
delle autofunzioni

Ci interessa osservare che la successione $(\sin kx)_{k \in \mathbb{N}^*}$ è ortogonale nello spazio $L^2[0, \pi]$, come facilmente si verifica. Vale in proposito un risultato generale:

Proposizione 8.1-2. Sia $L[y] = -(p(x)y'(x))' + q(x)y(x) = \lambda w(x)y(x)$, con $a \leq x \leq b$, dove L è auto-aggiunto sul dominio $D_L \subseteq C^{(2)}[a, b]$. Se $y_1, y_2 \in D_L$ sono autofunzioni corrispondenti agli autovalori distinti λ_1, λ_2 , cioè

$$L[y_k] = \lambda_k w y_k, \quad k = 1, 2, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2,$$

y_1 e y_2 sono ortogonali rispetto al peso $w(x)$, cioè

$$\int_a^b w(x) y_1(x) y_2(x) dx = 0. \quad (9)$$

DIMOSTRAZIONE. Moltiplichiamo scalarmente i due membri delle uguaglianze $L[y_1] = \lambda_1 w y_1$, $L[y_2] = \lambda_2 w y_2$ rispettivamente per y_2 e y_1 :

$$(L[y_1] | y_2) = \lambda_1(w y_1 | y_2) = \lambda_1 \int_a^b w(x) y_1(x) y_2(x) dx,$$

$$(L[y_2] | y_1) = \lambda_2(w y_2 | y_1) = \lambda_2 \int_a^b w(x) y_1(x) y_2(x) dx.$$

Ma $(L[y_1] | y_2) = (y_1 | L[y_2])$, in quanto L è auto-aggiunto su D_L , e ancora $(y_1 | L[y_2]) = (L[y_2] | y_1)$ in quanto stiamo considerando funzioni a valori reali.

Dunque i primi membri delle uguaglianze precedenti sono tra loro uguali, quindi sottraendole membro a membro si ottiene

$$0 = (\lambda_1 - \lambda_2) \int_a^b w(x) y_1(x) y_2(x) dx \implies \int_a^b w(x) y_1(x) y_2(x) dx = 0,$$

dove l'ultima implicazione segue dal fatto che $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$. ◁ □

Esempio 8.1-2. Il sistema trigonometrico alla base delle serie di Fourier

$$1, \quad \cos x, \quad \sin x, \quad \cos 2x, \quad \sin 2x, \quad \dots$$

è costituito dalle autofunzioni del problema

$$y'' + \lambda y = 0,$$

con le condizioni di tipo periodico $y(-\pi) = y(\pi)$, $y'(-\pi) = y'(\pi)$. L'autofunzione 1 corrisponde all'autovalore 0, le autofunzioni $\cos kx$, $\sin kx$ corrispondono all'autovalore k^2 , $k \in \mathbb{N}^*$. Diremo che k^2 è un autovalore di molteplicità 2.

Al contrario, il problema di Sturm-Liouville

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = y(\pi) = 0$$

ammette soltanto le autofunzioni $\sin kx$, corrispondenti agli autovalori semplici k^2 , $k \in \mathbb{N}^*$. ◁ □

Osserviamo che le autofunzioni associate ad un determinato autovalore λ , unitamente alla funzione identicamente nulla, costituiscono un sottospazio dello spazio costituito da *tutte* le soluzioni dell'equazione (1); tale sottospazio viene detto *autospatio* relativo all'autovalore λ . Poiché lo spazio costituito dalla totalità delle soluzioni dell'equazione (1), senz'alcuna condizione ai limiti, ha dimensione 2, ne segue che l'autospatio di un qualsivoglia autovalore ha dimensione non superiore a 2, dunque 1 oppure 2.

Vedremo, almeno in un caso particolare, che se le condizioni ai limiti sono del tipo (2), gli autovalori sono *semplici*, cioè i corrispondenti autospatzi hanno dimensione 1.

Esempio 8.1-3. Nell'esempio 1.4-5 abbiamo considerato i polinomi di Legendre, ortogonalizzando la successione dei monomi $1, x, x^2, \dots$ nello spazio $L^2[-1, 1]$ munito del consueto prodotto scalare. Il procedimento di Gram-Schmidt ci ha condotto a polinomi *monici*, cioè aventi uguale a 1 il coefficiente del termine di grado massimo (= *coefficiente direttivo*): polinomi di Legendre

$$z_0(x) = 1, \quad z_1(x) = x, \quad z_2(x) = x^2 - \frac{1}{3}, \quad z_3(x) = x^3 - \frac{3}{5}x,$$

$$z_4(x) = x^4 - \frac{6}{7}x^2 + \frac{3}{35}, \quad z_5(x) = x^5 - \frac{10}{9}x^3 + \frac{5}{21}x, \quad \dots$$

Vedremo nel paragrafo seguente che tali polinomi sono dati dall'espressione sintetica

$$z_n(x) = \frac{n!}{(2n)!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n].$$

I polinomi z_n possono quindi essere scritti $z_n(x) = c_n p_n(x)$, con

$$c_n := \frac{n!}{(2n)!}, \quad p_n(x) := \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n].$$

Dunque i polinomi p_n sono mutuamente ortogonali in $L^2[-1, 1]$ e tali sono anche i polinomi $C_n p_n(x)$ per ogni scelta delle costanti $C_n \neq 0$. Abitualmente tali costanti vengono scelte in modo che i polinomi ottenuti valgano tutti 1 per $x = 1$:

$$P_n(x) := \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n].$$

Si osservi che P_n è una funzione pari oppure dispari a seconda che n sia pari oppure dispari; ne segue che $P_n(-1) = (-1)^n$. L'ortogonalità tra il polinomi P_n :

$$n \neq m \implies \int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = 0, \quad (10)$$

si può dedurre, in base alla Proposizione 8.1-2, dal fatto che gli stessi polinomi sono autofunzioni dell'equazione di Legendre

$$((1-x^2)y'(x))' + \lambda y(x) = 0 \iff (1-x^2)y''(x) - 2xy'(x) + \lambda y(x) = 0,$$

e precisamente P_n è un'autofunzione corrispondente all'autovalore $\lambda_n = n(n+1)$, cioè

$$(1-x^2)P_n''(x) - 2xP_n'(x) + n(n+1)P_n(x) = 0.$$

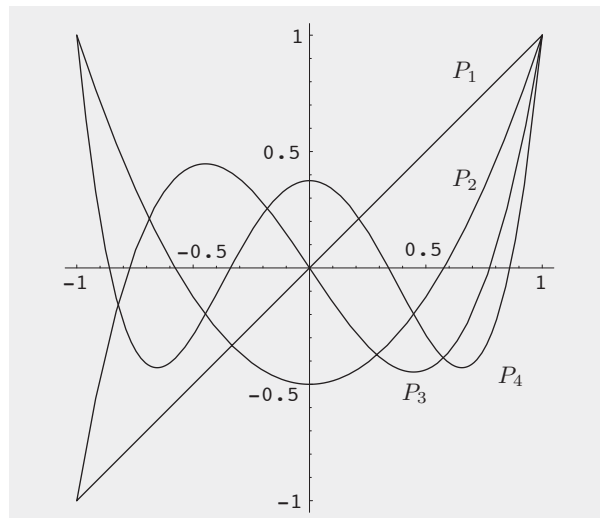


Figura 8.1-1.
Grafici dei polinomi
di Legendre $P_n(x)$,
 $n = 1, 2, 3, 4$.

Verificheremo le affermazioni precedenti nel paragrafo 8.2, dedicato allo studio di alcune famiglie di polinomi ortogonali. Con i simboli della Proposizione appena citata, si ha $p(x) = 1 - x^2$: poiché p si annulla in entrambi gli estremi dell'intervallo $[-1, 1]$, la relazione di ortogonalità non richiede condizioni al limiti. Mostriamo che la relazione (10) è completata, per $m = n$, dall'uguaglianza

$$\|P_n\|^2 = \int_{-1}^1 P_n^2(x) dx = \frac{2}{2n+1}. \quad (10')$$

polinomi
di Čebyšev

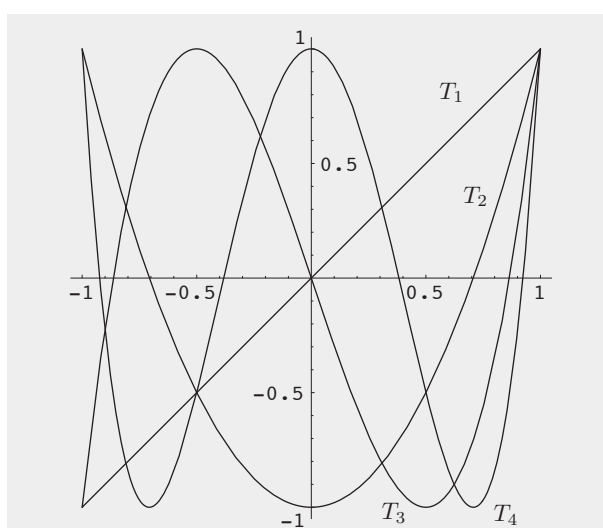
Esempio 8.1-4. Negli esercizi dal 4.3-2 al 4.3-5 abbiamo introdotto i polinomi di Čebyšev $T_n(x) := \cos(n \arccos(x))$ e abbiamo verificato la relazione di ortogonalità sull'intervallo $[-1, 1]$, rispetto alla funzione peso $x \mapsto 1/\sqrt{1-x^2}$:

$$\int_{-1}^1 \frac{T_n(x) T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^\pi \cos nt \cos mt dt = \begin{cases} 0, & \text{se } n \neq m, \\ \pi/2, & \text{se } n = m > 0, \\ \pi, & \text{se } n = m = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Non è difficile verificare (lo faremo nel paragrafo seguente) che i polinomi di Čebyšev sono autofunzioni dell'equazione differenziale

Tabella 8.1-1. ALCUNI POLINOMI DI LEGENDRE

grado n	$P_n(x)$
0	1
1	x
2	$3x^2/2 - 1/2$
3	$5x^3/2 - 3x/2$
4	$35x^4/8 - 15x^2/4 + 3/8$
5	$63x^5/8 - 35x^3/4 + 15x/8$
6	$231x^6/16 - 315x^4/16 + 105x^2/16 - 5/16$

**Figura 8.1-2.**

Grafici dei polinomi di Čebyšev $T_n(x)$, $n = 1, 2, 3, 4$.

$$(1 - x^2)y''(x) - xy'(x) + \lambda y(x) = 0,$$

e precisamente T_n corrisponde all'autovalore $\lambda = n^2$. Dividendo l'equazione precedente per $\sqrt{1 - x^2}$ si ottiene l'equazione equivalente

$$\sqrt{1 - x^2}y''(x) - \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}y'(x) + \frac{\lambda}{\sqrt{1 - x^2}}y(x) = 0,$$

o ancora

$$(\sqrt{1 - x^2}y'(x))' + \frac{\lambda}{\sqrt{1 - x^2}}y(x) = 0.$$

Siamo dunque nelle ipotesi della Proposizione 8.1-1; con i simboli della formula (1') si ha $a = -1$, $b = 1$, $p(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $q(x) = 0$, $w(x) = 1/\sqrt{1 - x^2}$.

Si osservi che p si annulla nei due estremi dell'intervallo $[-1, 1]$, mentre w è una funzione continua nell'intervallo aperto $(-1, 1)$ che è sommabile sull'intervallo $[-1, 1]$, in quanto $w(x) \sim (1 - x)^{-1/2}$ per $x \rightarrow 1^-$, $w(x) \sim (x + 1)^{-1/2}$ per $x \rightarrow -1^+$. $\triangleleft \square$

In chiusura del paragrafo diamo qualche risultato generale relativo ai problemi di Sturm-Liouville. Come in precedenza, scriviamo il problema nella forma

$$L[y] = -(p(x)y'(x))' + q(x)y(x) = \lambda w(x)y(x), \quad (12)$$

e limitiamoci a considerare condizioni ai limiti del tipo

proprietà delle
autofunzioni

$$y(a) = y(b) = 0. \quad (13)$$

In base alla Proposizione precedente sappiamo che L è auto-aggiunto sul dominio D_L costituito dalle funzioni di classe $C^{(2)}[a, b]$ che verificano le condizioni ai limiti (13).

Si può dimostrare la seguente

Proposizione 8.1-3. Se $p(x) > 0$, $w(x) > 0$ per $x \in (a, b)$ e $q(x) \geq 0$, gli autovalori del problema posto sono reali, positivi e semplici. Essi costituiscono una successione $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$ e le corrispondenti autofunzioni y_n costituiscono un sistema ortogonale rispetto alla funzione peso w , che è *massimale* (o come anche si dice *totale* o *completo*; ↑ Prop. 3.4-2).

Alcune tra le affermazioni appena formulate sono di semplice dimostrazione. Ad esempio, indicando, come di consueto, col simbolo $(\cdot | \cdot)$ il prodotto scalare in $L^2[a, b]$, se λ_0 è un autovalore e y_0 la corrispondente autofunzione, abbiamo $L[y_0] = \lambda_0 w y_0$, da cui

$$(L[y_0] | y_0) = \lambda_0 (w y_0 | y_0) = \lambda_0 \int_a^b w(x) y_0^2(x) dx,$$

dove l'ultimo integrale è > 0 . D'altra parte si ha anche

$$\begin{aligned} (L[y_0] | y_0) &= - \int_a^b (p(x) y_0'(x))' y_0(x) dx + \int_a^b q(x) y_0^2(x) dx = \\ &= \int_a^b p(x) (y_0'(x))^2 dx + \int_a^b q(x) y_0^2(x) dx, \end{aligned}$$

in quanto $[(p(x) y_0'(x)) y_0(x)]_a^b = 0$. L'ultima somma è > 0 ; ne segue che $\lambda_0 > 0$, in quanto esprimibile come rapporto tra due quantità positive.

Supponiamo, per assurdo, che all'autovalore λ_0 corrispondano due autofunzioni y_1 e y_2 linearmente indipendenti. Si tratta di due soluzioni della stessa equazione differenziale lineare omogenea; il loro wronskiano

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

si annulla nei punti a e b , in virtù delle condizioni ai limiti (13), contro l'ipotesi che y_1 e y_2 siano linearmente indipendenti (↓ esercizio 8.3-2).

Se indichiamo con $y_n(x)$ l'autofunzione relativa all'autovalore λ_n , $n \in \mathbb{N}^*$, sappiamo che la successione (y_n) è ortogonale rispetto al *prodotto scalare pesato*

$$(f | g)_w := \int_a^b w(x) f(x) g(x) dx.$$

Ad esso è associato lo spazio $L^2[a, b; w]$ delle funzioni per cui è sommabile su $[a, b]$ la funzione $w(x)f^2(x)$. Affermare che (y_n) è una famiglia ortogonale *massimale* significa che la sola funzione ortogonale a tutte le autofunzioni y_n è la funzione identicamente nulla.

Poiché siamo in uno spazio completo, la Proposizione 3.4-2 implica che ogni funzione $f \in L^2[a, b; w]$ può essere sviluppata in serie di autofunzioni

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} c_n y_n(x),$$

dove i coefficienti sono dati da (↑ formula (3), Prop. 1.4-1)

$$c_n := \frac{(f | y_n)_w}{(y_n | y_n)_w}.$$

La convergenza della serie scritta sussiste in ogni caso nel senso dello spazio $L^2[a, b; w]$; quanto alla convergenza puntuale, valgono risultati analoghi a quelli dimostrati per le serie di Fourier nel Capitolo 3.

Esempio 8.1-5. Abbiamo visto nell'esempio 8.1-2 che le funzioni $\sin x$, $\sin 2x$, $\sin 3x$, \dots , sono le autofunzioni del problema di Sturm-Liouville $-y'' = \lambda y$ con le condizioni ai limiti $y(0) = y(\pi) = 0$. Per mostrare che esse costituiscono una base in $L^2[0, \pi]$ possiamo sfruttare il fatto che la successione

$$1/2, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots$$

è una base in $L^2[-\pi, \pi]$ (\uparrow Prop. 3.4-3). Se $f \in L^2[0, \pi]$, prolunghiamola a tutto $[-\pi, \pi]$ ponendo

$$f(-x) := -f(x), \quad x \in [0, \pi].$$

Abbiamo così una funzione $f \in L^2[-\pi, \pi]$; essendo dispari, essa ammette lo sviluppo di Fourier

$$f(x) = \sum_{k \geq 1} b_k \sin kx.$$

Tale uguaglianza significa che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - s_n\|_{L^2[-\pi, \pi]} = 0,$$

dove $s_n(x) = \sum_{k=1}^n b_k \sin kx$. Ma poiché tanto f quanto i polinomi di Fourier s_n sono funzioni dispari, dunque f^2 e s_n^2 sono pari, si ha, per $n \rightarrow \infty$,

$$\|f - s_n\|_{L^2[0, \pi]}^2 = \frac{1}{2} \|f - s_n\|_{L^2[-\pi, \pi]}^2 \rightarrow 0. \quad \triangleleft \square$$

Esercizi

8.1-1. Dimostrare che l'equazione differenziale $p_0(x)y''(x) + p_1(x)y'(x) + p_2(x)y(x) = 0$, dove $x \in I$, con I intervallo $\subseteq \mathbb{R}$, può essere posta in forma autoaggiunta (1) moltiplicandola per un'opportuna funzione, a condizione che sia $p_0(x) \neq 0$.

SUGGERIMENTO. Sia $f(x)$ la funzione che funge da moltiplicatore; allora dev'essere $(f(x)p_0(x))' = f(x)p_1(x) \dots$. Si ottiene un'equazione differenziale lineare del primo ordine la cui soluzione è $f(x) = \exp(\int_{x_0}^x [p_1(t)/p_0(t)] dt)/p_0(x)$.

8.1-2. Trovare autovalori ed autofunzioni del problema di valori ai limiti

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y(\pi) = 0.$$

8.1-3. Trovare autovalori ed autofunzioni del problema di valori ai limiti

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y'(\pi) = 0.$$

8.2 Polinomi ortogonali

1. POLINOMI DI LEGENDRE

Nell'esempio 8.1-3, e precedentemente nell'esempio 1.4-5, abbiamo considerato i polinomi di Legendre, ottenuti ortogonalizzando la successione dei monomi $1, x, x^2, \dots$ nello spazio $L^2[-1, 1]$ munito del consueto prodotto scalare. Il procedimento di Gram-Schmidt ci ha condotto a polinomi *monici*, cioè aventi uguale a 1 il coefficiente del termine di grado massimo (= *coefficiente direttivo*):

$$z_0(x) = 1, \quad z_1(x) = x, \quad z_2(x) = x^2 - \frac{1}{3}, \quad z_3(x) = x^3 - \frac{3}{5}x,$$

$$z_4(x) = x^4 - \frac{6}{7}x^2 + \frac{3}{35}, \quad z_5(x) = x^5 - \frac{10}{9}x^3 + \frac{5}{21}x, \quad \dots$$

Tali polinomi sono dati dall'espressione sintetica

$$z_n(x) = \frac{n!}{(2n)!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n]. \quad (1)$$

Suggeriamo al lettore di calcolare il secondo membro della (1) per $n = 0, 1, 2$ e di confrontare con i risultati precedenti.

Per riconoscere che z_n è un polinomio monico per ogni naturale n , basta osservare che il termine direttivo di $(x^2 - 1)^n$ è x^{2n} , dunque il termine direttivo della sua derivata n -esima è

$$2n(2n-1)\dots(n+1)x^n = \frac{(2n)!}{n!}x^n.$$

I polinomi z_n possono quindi essere scritti $z_n(x) = c_n p_n(x)$, con

$$c_n := \frac{n!}{(2n)!}, \quad p_n(x) := \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n].$$

Se dunque la (1) è corretta, nel senso che restituisce gli stessi polinomi precedentemente ottenuti col metodo di ortogonalizzazione, i polinomi p_n sono mutuamente ortogonali in $L^2[-1, 1]$ e tali sono anche i polinomi $C_n p_n(x)$ per ogni scelta delle costanti $C_n \neq 0$. Una scelta che si fa abitualmente per tali costanti è quella che fa sì che i polinomi ottenuti valgano tutti 1 per $x = 1$:

$$P_n(x) := \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n. \quad (2)$$

Si osservi che $2^n n! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n =: (2n)!!$ è il cosiddetto *semi-fattoriale* di $2n$, cioè il prodotto dei numeri naturali pari non superiori a $2n$; in modo analogo si definisce il semi-fattoriale di $2n + 1$:

$$(2n + 1)!! := 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n + 1).$$

formula di Rodrigues

La (2) è nota come *formula di Rodrigues*, dal nome del matematico francese O. Rodrigues (1794-1851). Per riconoscere che $P_n(1) = 1$, scriviamo

$$(x^2 - 1)^n = (x - 1)^n (x + 1)^n = (x - 1)^n [(x - 1) + 2]^n$$

e sviluppiamo con la formula del binomio l'ultima potenza; si ottiene:

$$(x^2 - 1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (x - 1)^{n+k} 2^{n-k} = 2^n (x - 1)^n + \dots,$$

dove i punti indicano termini di grado $> n$ nella variabile $(x - 1)$. Se ne deduce che $p_n(x) = D^n [(x^2 - 1)^n]$, calcolato nel punto $x = 1$, vale $2^n n!$ e dunque $P_n(1) = 1$.

Possiamo calcolare il coefficiente direttivo di P_n ; infatti

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} p_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{(2n)!}{n!} \frac{n!}{(2n)!} p_n(x) = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} z_n(x),$$

poiché z_n è un polinomio monico, se ne trae che il coefficiente direttivo di P_n vale

$$d_n = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}. \quad (3)$$

In ciò che segue ci proponiamo di

1. dimostrare la mutua ortogonalità dei polinomi P_n definiti dalla (2);
2. scrivere l'equazione differenziale di cui i P_n sono autofunzioni;
3. individuare la cosiddetta *funzione generatrice* dei polinomi P_n , cioè una funzione $F(x, z)$ tale che, per ogni $x \in [-1, 1]$, si abbia $F(x, z) = \sum_{n \geq 0} P_n(x) z^n$ per tutti gli z in un intorno dell'origine nel piano complesso;
4. ottenere una formula ricorsiva a tre termini, cioè una formula che, dati P_{n-1} e P_n , consenta il calcolo di P_{n+1} .

Per quanto riguarda il punto 3, si osservi che x e z sono due variabili, la prima reale compresa tra -1 e 1 , la seconda complessa, che sono tra loro indipendenti, vale a dire x non è la parte reale di z .

Cominciamo con un risultato di algebra lineare, che è di utilità generale:

Lemma. Siano p_k , $k = 0, 1, \dots, n$, polinomi di gradi esattamente $0, 1, \dots, n$; allora essi formano una base nello spazio \mathcal{P}_n dei polinomi di grado $\leq n$.

DIMOSTRAZIONE. Sia $d_k \neq 0$ il coefficiente direttivo di p_k . Se $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ è un qualsivoglia polinomio di \mathcal{P}_n , scegliamo il coefficiente c_n in modo che p e $c_n p_n$ abbiano lo stesso coefficiente direttivo, cioè

$$a_n = c_n d_n \quad \implies \quad c_n = a_n / d_n.$$

Allora $p - c_n p_n$ è un polinomio di grado $\leq n - 1$. Scegliamo poi il coefficiente c_{n-1} in modo che $p - c_n p_n$ e $c_{n-1} p_{n-1}$ abbiano lo stesso coefficiente direttivo; con tale scelta di c_{n-1} il polinomio $p - c_n p_n - c_{n-1} p_{n-1}$ ha grado $\leq n - 2$. Così proseguendo, possiamo scegliere $c_{n-2}, \dots, c_2, c_1, c_0$ in modo che $p - \sum_{k=0}^n c_k p_k = 0$. $\triangleleft \square$

Proposizione 8.2-1. I polinomi P_n sono ortogonali in $L^2[-1, 1]$, e precisamente

$$(P_n | P_m) = \int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{se } n \neq m \\ \frac{2}{2n+1}, & \text{se } n = m. \end{cases} \quad (4)$$

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo innanzitutto che, per ogni $f \in C^{(n)}[-1, 1]$, si ha

$$\begin{aligned} 2^n n! (f | P_n) &= \int_{-1}^1 f(x) D^n [(x^2 - 1)^n] dx = \\ &= (-1)^n \int_{-1}^1 D^n f(x) (x^2 - 1)^n dx. \end{aligned} \quad (5)$$

Il risultato segue mediante n integrazioni per parti, in quanto la funzione $(x^2 - 1)^n = (x - 1)^n (x + 1)^n$ ha zeri di ordine n nei punti 1 e -1 , e pertanto essa si annulla in tali punti, unitamente a tutte le sue derivate di ordine $< n$.

Sia, per fissare le idee, $m < n$. Allora P_m ha grado $< n$ e pertanto $D^n P_m = 0$, e l'uguaglianza precedente, con $f = P_m$, fornisce $(P_n | P_m) = 0$.

Esaminiamo il caso $m = n$; poiché il termine direttivo di P_n vale $d_n x^n$, si ha innanzitutto, in virtù della (3),

$$\begin{aligned} D^n P_n(x) &= d_n n! = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} n! = \frac{(2n)!}{2^n n!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2n}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n} = \\ &= 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 2n - 1 = (2n - 1)!!. \end{aligned}$$

Per $f = P_n$, la (5) fornisce dunque

$$\|P_n\|^2 = \frac{(2n - 1)!!}{2^n n!} \int_{-1}^1 (1 - x^2)^n dx. \quad (6)$$

Se ora operiamo il cambiamento di variabile $x = \sqrt{y}$, si ha

$$\int_{-1}^1 (1 - x^2)^n dx = 2 \int_0^1 (1 - x^2)^n dx = \int_0^1 (1 - y)^n y^{-1/2} dy = B(n + 1, 1/2).$$

Abbiamo utilizzato la funzione beta di Eulero (v. paragrafo 5.3):

$$B(\alpha, \beta) := \int_0^1 (1 - t)^{\alpha-1} t^{\beta-1} dt = \int_0^1 t^{\alpha-1} (1 - t)^{\beta-1} dt, \quad \alpha, \beta > 0.$$

Ricordando che

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)},$$

si trova

$$\int_{-1}^1 (1 - x^2)^n dx = \frac{\Gamma(n + 1) \Gamma(1/2)}{\Gamma(n + 1 + 1/2)}. \quad (7)$$

Applicando ripetutamente la formula ricorsiva $\Gamma(x + 1) = x \Gamma(x)$, si trova

$$\Gamma(n + 1 + 1/2) = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \dots \cdot \frac{2n+1}{2}}_{n+1 \text{ fattori}} \Gamma(1/2) = \frac{(2n+1)!!}{2^{n+1}} \Gamma(1/2),$$

quindi, sostituendo nella (7),

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx = \frac{2^{n+1} n!}{(2n+1)!!},$$

e finalmente, sostituendo nella (6),

$$\|P_n\|^2 = \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} \frac{2^{n+1} n!}{(2n+1)!!} = \frac{2}{2n+1}. \quad \triangleleft \square$$

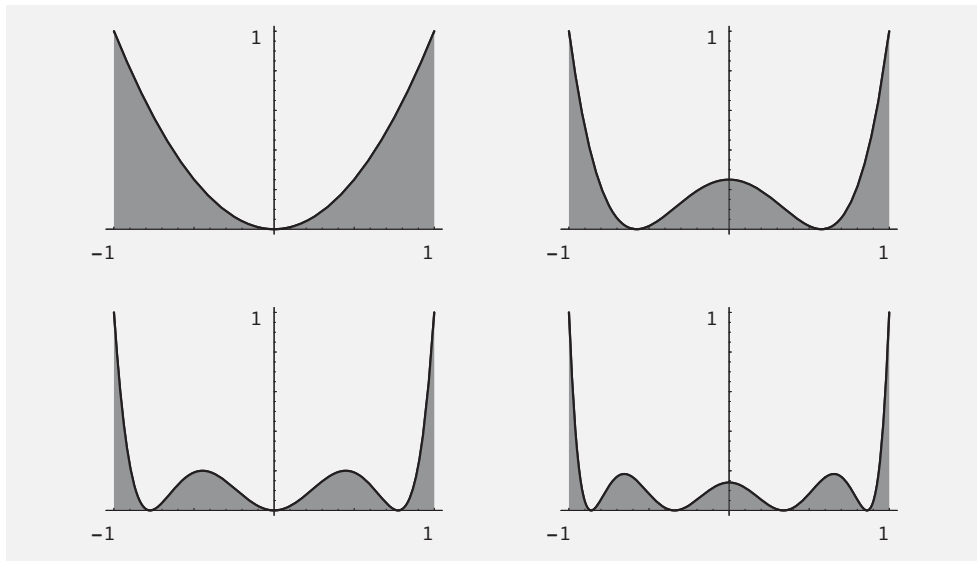


Figura 8.2-1. Da sinistra a destra, dall'alto al basso: grafici dei polinomi P_n^2 , per $n = 1, 2, 3, 4$; i relativi integrali valgono $2/(2n+1)$.

Proposizione 8.2-2. Per ogni $n \geq 0$ si ha

$$[(1-x^2) P_n'(x)]' + n(n+1) P_n(x) = 0. \quad (8)$$

In altri termini, come già abbiamo anticipato, i polinomi P_n sono autofunzioni dell'equazione di Legendre

$$[(1-x^2) y'(x)]' + \lambda y(x) = 0 \iff (1-x^2) y''(x) - 2x y'(x) + \lambda y(x) = 0,$$

e precisamente P_n è un'autofunzione corrispondente all'autovalore $\lambda_n = n(n+1)$.

DIMOSTRAZIONE. Poniamo $f(x) := [(1-x^2) P_n'(x)]'$; poiché P_n ha grado n , entro parentesi quadre compare un polinomio di grado $n+1$, e quindi finalmente f è ancora un polinomio di grado n . Poiché il termine direttivo di P_n' è $n d_n x^{n-1}$ (dove d_n è il coefficiente direttivo di P_n dato dalla (3)), il termine direttivo di $(1-x^2) P_n'(x)$ sarà $-x^2 \cdot n d_n x^{n-1} = -n d_n x^{n+1}$, e finalmente quello di f sarà

$$-n(n+1) d_n x^n,$$

dunque uguale al termine direttivo di P_n , a meno del fattore $-n(n+1)$.

Ciò implica che $f + n(n+1) P_n$ è un polinomio di grado $\leq n-1$, e dunque, in virtù del Lemma, esso può essere scritto come combinazione lineare dei polinomi P_0, \dots, P_{n-1} :

$$f + n(n+1)P_n(x) = [(1-x^2)P_n'(x)]' + n(n+1)P_n(x) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j P_j(x).$$

Dato che i polinomi di Legendre costituiscono una famiglia ortogonale, possiamo calcolare i coefficienti c_j come prodotti scalari; se riusciamo a dimostrare che tali coefficienti sono tutti nulli, la nostra tesi è dimostrata.

Ora

$$c_j = \frac{1}{\|P_j\|^2} (f + n(n+1)P_n | P_j) = \frac{1}{\|P_j\|^2} (f | P_j) + \frac{1}{\|P_j\|^2} (n(n+1)P_n | P_j).$$

L'ultimo prodotto scalare è nullo in quanto $j < n$, mentre

$$(f | P_j) = \int_{-1}^1 [(1-x^2)P_n'(x)]' P_j(x) dx.$$

Con due integrazioni per parti, tenendo conto del fatto che $(1-x^2)$ si annulla negli estremi dell'intervallo d'integrazione, si trova

$$(f | P_j) = \int_{-1}^1 P_n(x) [(1-x^2)P_j'(x)]' dx.$$

Ma $[(1-x^2)P_j'(x)]'$ ha grado j e pertanto, come combinazione lineare di P_0, \dots, P_j , è ortogonale a P_n . $\triangleleft \square$

A questo punto possiamo ricordare la Proposizione 8.1-1; l'ortogonalità dei polinomi di Legendre, che noi abbiamo verificato direttamente a partire dalla formula di Rodrigues mediante la Proposizione 8.2-1, è conseguenza della Proposizione citata. Poiché nel caso in esame la funzione che moltiplica la derivata seconda, cioè $(1-x^2)$, si annulla in entrambi gli estremi dell'intervallo $[-1, 1]$, l'ortogonalità tra autofunzioni corrispondenti ad autovalori distinti sussiste senza ulteriori condizioni ai limiti.

All'inizio di questo paragrafo abbiamo considerato i polinomi

funzione generatrice

$$p_n(x) := \frac{d^n}{dx^n} [(x^2-1)^n],$$

da cui si ottengono i polinomi di Legendre P_n mediante moltiplicazione per i coefficienti $1/(2^n n!)$. Il polinomio $(x^2-1)^n$ può essere considerato come la restrizione all'asse reale del polinomio analogo $(z^2-1)^n$ con $z \in \mathbb{C}$, e dunque per il calcolo della sua derivata n -esima nel punto $z = x \in \mathbb{R}$ possiamo utilizzare quanto sappiamo dalla teoria delle funzioni analitiche: se f è una funzione analitica in un intorno di z_0 , allora

$$\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(s)}{(s-z_0)^{n+1}} ds \iff f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(s)}{(s-z_0)^{n+1}} ds,$$

dove γ è un circuito contenente z_0 ; si riveda la Proposizione 4.5-7.

Dunque

$$p_n(x) := \frac{d^n}{dx^n} [(x^2-1)^n] = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\gamma(x)} \frac{(s^2-1)^n}{(s-x)^{n+1}} ds \quad (9)$$

dove possiamo utilizzare come circuito la circonferenza $\gamma(x)$ di centro x e raggio 1.

Siamo in buona posizione per calcolare la somma della serie di potenze

$$\sum_{n \geq 0} P_n(x) z^n,$$

dove x è un valore fissato nell'intervallo $[-1, 1]$, z è una variabile complessa, indipendente da x . Si tratta della *funzione generatrice* dei polinomi di Legendre.

Proposizione 8.2-3. Per ogni $x \in [-1, 1]$ si ha

$$F(x, z) := \sum_{n \geq 0} P_n(x) z^n = \frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}}, \quad (10),$$

per $|z| < 1$.

Come vedremo nel corso della dimostrazione, per ogni fissato $x \in [-1, 1]$ il polinomio $1 - 2xz + z^2$ è diverso da 0 per ogni $|z| < 1$; nella (10) intenderemo di considerare il valore principale della radice quadrata di tale polinomio.

DIMOSTRAZIONE. La (9) fornisce

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} p_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma(x)} \frac{1}{(s-x)} \left(\frac{s^2-1}{2(s-x)} \right)^n ds$$

quindi

$$\sum_{n \geq 0} P_n(x) z^n = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n \geq 0} \oint_{\gamma(x)} \frac{1}{(s-x)} \left(\frac{z(s^2-1)}{2(s-x)} \right)^n ds.$$

Se z è in valore assoluto abbastanza piccolo in modo che risulti

$$\left| \frac{z(s^2-1)}{2(s-x)} \right| < 1$$

comunque si scelga $x \in [-1, 1]$ e comunque si scelga $s \in \gamma(x)$, la serie geometrica avente come ragione il rapporto appena considerato è totalmente convergente e dunque uniformemente convergente al variare di s su $\gamma(x)$, e pertanto è lecito scambiare il segno di serie con quello di integrale.

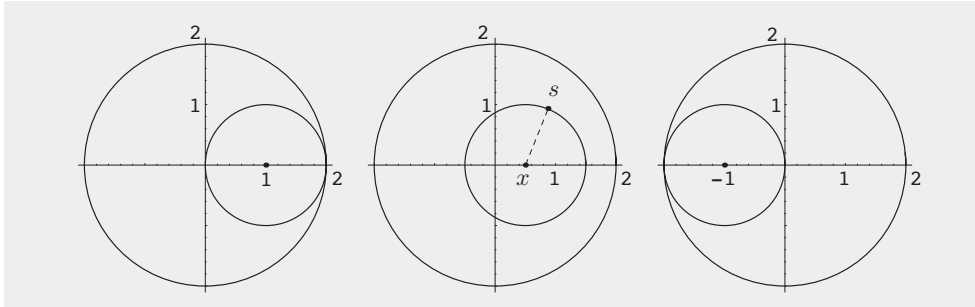


Figura 8.2-2. La circonferenza $\gamma(x)$ è contenuta nel disco $|s| \leq 2$.

Non è difficile riconoscere che, comunque si scelga $x \in [-1, 1]$, la circonferenza $\gamma(x)$ è contenuta nel disco $|s| \leq 2$, dunque

$$\left| \frac{z(s^2-1)}{2(s-x)} \right| < |z| \frac{|s|^2+1}{2} \leq |z| \frac{5}{2},$$

e pertanto basta scegliere $|z| < 2/5$. Per tali z si ha

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} P_n(x) z^n &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma(x)} \frac{1}{(s-x)} \left[1 - \frac{z(s^2-1)}{2(s-x)} \right]^{-1} ds = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma(x)} \frac{2}{z-2x+2s-zs^2} ds. \end{aligned}$$

Abbiamo utilizzato la formula che fornisce la somma della serie geometrica. La funzione $s \mapsto z - 2x + 2s - zs^2$ ammette gli zeri

$$s_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - 2xz + z^2}}{z}, \quad s_2 = \frac{1 + \sqrt{1 - 2xz + z^2}}{z}.$$

Quando $|z|$ è piccolo $\sqrt{1 - 2xz + z^2}$ si avvicina a $1 - xz$, dunque s_1 è prossimo a x , mentre s_2 è grande in valore assoluto (si ricordi che $\sqrt{1-t} \sim 1 - t/2$ per t piccolo). Possiamo dunque applicare il teorema dei residui ed ottenere finalmente

$$\sum_{n \geq 0} P_n(x) z^n = \operatorname{res} \left(\frac{2}{z-2x+2s-zs^2}; s_1 \right) = \frac{1}{1-zs_1} = \frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}}.$$

La (10) è così stabilita, almeno per gli z abbastanza piccoli in valore assoluto. Tuttavia la serie a primo membro è la serie di Taylor della funzione analitica a secondo membro; dunque lo sviluppo vale nel più grande intorno dell'origine che è contenuto nell'aperto di analiticità di tale funzione. Poiché il polinomio $z \mapsto 1 - 2xz + z^2$ si annulla per $z = x \pm i\sqrt{1-x^2}$, cioè in punti di valore assoluto unitario, la (10) resta provata per $|z| < 1$. $\triangleleft \square$

Possiamo utilizzare lo sviluppo ottenuto per trovare una formula ricorsiva a tre termini, cioè una formula che, dati P_{n-1} e P_n , consenta il calcolo di P_{n+1} . Poiché $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, una tale formula consentirà agevolmente di calcolare quanti si vogliono termini della successione dei polinomi di Legendre.

Proposizione 8.2-4. Per ogni $n \geq 1$ si ha

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x). \quad (11)$$

DIMOSTRAZIONE. Cominciamo col verificare la relazione

$$(1-2xz+z^2) \frac{\partial F(x,z)}{\partial z} = (x-z)F(x,z). \quad (12)$$

Infatti

$$\frac{\partial F(x,z)}{\partial z} = -\frac{1}{2} \frac{-2x+2z}{(1-2xz+z^2)^{3/2}} = \frac{x-z}{1-2xz+z^2} \frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}},$$

che è semplicemente un modo diverso di scrivere l'uguaglianza (12). Riscriviamo il primo membro della (12) utilizzando la rappresentazione di $F(x,z)$ come somma di una serie di potenze. Abbiamo

$$\begin{aligned} (1-2xz+z^2) \sum_{n \geq 1} nP_n(x) z^{n-1} &= \sum_{n \geq 1} nP_n(x) z^{n-1} + \\ &\quad - 2x \sum_{n \geq 1} nP_n(x) z^n + \\ &\quad + \sum_{n \geq 1} nP_n(x) z^{n+1} =: S_1 - 2xS_2 + S_3, \end{aligned}$$

con evidente significato dei simboli. Se si scrive n al posto di $n-1$, la prima somma si scrive

$$S_1 = \sum_{n \geq 0} (n+1)P_{n+1}(x) z^n;$$

le due restanti si possono scrivere anche

$$S_2 = \sum_{n \geq 0} nP_n(x) z^n, \quad S_3 = \sum_{n \geq 0} nP_n(x) z^{n+1}.$$

Analogamente, il secondo membro della (12) diventa

$$\sum_{n \geq 0} xP_n(x) z^n - \sum_{n \geq 0} P_n(x) z^{n+1}.$$

In definitiva, portando tutti i termini a primo membro, la (12) si scrive

$$\sum_{n \geq 0} [(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x)] z^n + \sum_{n \geq 0} (n+1)P_n(x) z^{n+1} = 0.$$

Ma l'ultima somma si scrive ancora $\sum_{n \geq 1} nP_{n-1}(x) z^n = \sum_{n \geq 0} nP_{n-1}(x) z^n$, dunque finalmente si ha

$$\sum_{n \geq 0} [(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x)] z^n = 0,$$

da cui segue la (11) uguagliando a 0 il coefficiente di z^n . $\triangleleft \square$

Esempio 8.2-1. Mostriamo un possibile utilizzo della formula dimostrata. Vogliamo ricalcolare le norme dei polinomi P_n , cioè le quantità $\|P_n\|^2$ che sappiamo valere $2/(2n+1)$ (\uparrow Proposizione 8.2-1). Osservato che la (11) vale anche per $n=0$, ove si convenga di porre $P_{-1}=0$, la formula stessa, scritta con n al posto di $n+1$, ci consente di esprimere P_n in funzione di P_{n-1} e P_{n-2} . Abbiamo dunque

$$\begin{aligned}\|P_n\|^2 &= (P_n(x) | P_n(x)) = \frac{1}{n} ((2n-1)xP_{n-1}(x) + (n-1)P_{n-2}(x) | P_n(x)) = \\ &= \frac{2n-1}{n} (xP_{n-1}(x) | P_n(x)) = \frac{2n-1}{n} (P_{n-1}(x) | xP_n(x)).\end{aligned}$$

Abbiamo tenuto conto dell'ortogonalità tra P_{n-2} e P_n . D'altra parte sempre la (11) consente di esprimere il prodotto $xP_n(x)$ in funzione di $P_{n-1}(x)$ e $P_{n+1}(x)$:

$$xP_n(x) = \frac{n+1}{2n+1} P_{n+1}(x) + \frac{n}{2n+1} P_{n-1}(x).$$

Sostituendo nella formula precedente e sfruttando l'ortogonalità tra P_{n+1} e P_{n-1} , si ottiene

$$\begin{aligned}\|P_n\|^2 &= \frac{2n-1}{n} \frac{n}{2n+1} (P_{n-1}(x) | P_{n-1}(x)) = \\ &= \frac{2n-1}{2n+1} (P_{n-1}(x) | P_{n-1}(x)) = \frac{2n-1}{2n+1} \|P_{n-1}\|^2.\end{aligned}$$

Poiché evidentemente $\|P_0\|^2 = 2$, abbiamo successivamente

$$\|P_1\|^2 = \frac{1}{3} 2 = \frac{2}{3}, \quad \|P_2\|^2 = \frac{3}{5} \|P_1\|^2 = \frac{2}{5}, \quad \|P_3\|^2 = \frac{5}{7} \|P_2\|^2 = \frac{2}{7},$$

e procedendo per induzione si ha $\|P_n\|^2 = 2/(2n+1)$. $\triangleleft \square$

zeri dei polinomi
di Legendre

La figura 8.1-1 lascia sospettare che il polinomio P_n , per ogni $n \geq 1$, abbia n zeri interni all'intervallo $[-1, 1]$.

Proposizione 8.2-5. Per ogni $n \geq 1$ il polinomio P_n ammette n zeri appartenenti all'intervallo $(-1, 1)$.

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo innanzitutto che la funzione $w(x) := (x^2-1)^n$ si annulla nei punti $x = -1$ e $x = 1$, unitamente alle sue derivate fino all'ordine $n-1$ (v. figura 8.2-3). Applichiamo ripetutamente il teorema di Rolle. Poiché w si annulla agli estremi dell'intervallo $[-1, 1]$, esiste almeno un punto interno a tale intervallo in cui si annulla w' ; tale punto è evidentemente $x = 0$. Poiché w' si annulla per $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$, w'' si annulla in (almeno) un punto interno all'intervallo $[-1, 0]$, ed anche in (almeno) un altro punto interno all'intervallo $[0, 1]$.

Così proseguendo si giunge a dimostrare che $D^n w(x)$ si annulla in (almeno) n punti interni all'intervallo $[-1, 1]$, e poiché tale derivata è un polinomio di grado n , tali punti sono esattamente n . La proposizione è dimostrata, in quanto P_n è proporzionale alla derivata esaminata. $\triangleleft \square$

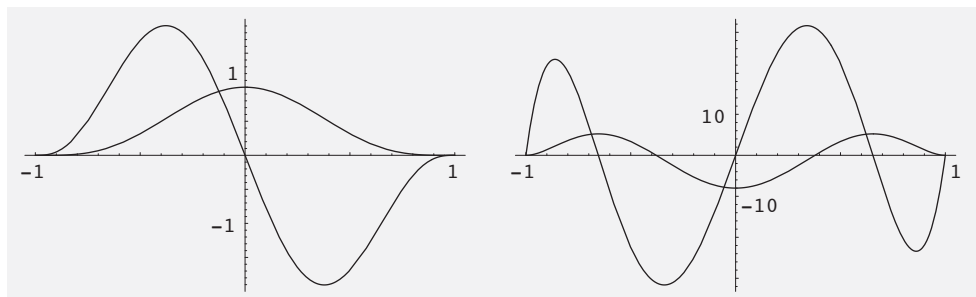


Figura 8.2-3. Grafico del polinomio $(x^2-1)^4$ e della sua derivata prima (a sinistra), grafici della derivata seconda e terza (a destra).

Osservazione. Gli zeri dei polinomi di Legendre trovano interessanti applicazioni nelle cosiddette *formule di quadratura*, cioè formule per il calcolo approssimato di integrali definiti, quando non sia possibile esprimere una primitiva della funzione integranda mediante funzioni elementari. Ce ne occuperemo nell'Appendice C al termine del capitolo. $\triangleleft \square$

Concludiamo la trattazione dei polinomi di Legendre:

Proposizione 8.2-6. La successione (P_n) , $n \in \mathbb{N}$, è massimale (= totale, completa) in $L^2[-1, 1]$:

$$(f \in L^2[-1, 1]) \wedge (\forall n \in \mathbb{N}, (f | P_n) = 0) \implies (f = 0 \text{ q.o. in } [-1, 1]), \quad (13)$$

dunque una base ortogonale di tale spazio.

Si riveda in proposito la Proposizione 3.4-2.

La dimostrazione procede secondo il seguente schema: la proposizione è ovvia se f è un polinomio. Infatti scritto f nella forma $f = \sum_{j=0}^k c_j P_j$, la condizione (13) implica subito che f è nulla, in quanto i coefficienti c_j sono dati dai rapporti $(f | P_j) / \|P_j\|^2$.

Dopodiché si dimostra che la proposizione stessa vale per ogni funzione continua sull'intervallo $[-1, 1]$, in quanto ogni funzione continua può essere approssimata in modo arbitrariamente accurato in norma $\|\cdot\|_\infty$ (e dunque a più forte ragione in norma $\|\cdot\|_2$) da una funzione polinomiale.

Il passo finale consiste nell'estendere la proposizione ad ogni funzione di quadrato sommabile, sfruttando il fatto che ogni funzione di L^2 può essere approssimata tanto bene quanto si vuole da una funzione continua. In questo testo non vengono dimostrati i due risultati che abbiamo citato, quindi accetteremo la Proposizione 8.2-5 senza dimostrazione.

Come abbiamo anticipato al termine del paragrafo precedente, ogni funzione $f \in L^2[-1, 1]$ può essere sviluppata in serie utilizzando la base $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} c_n P_n(x), \quad (14)$$

dove

$$c_n = \frac{2n+1}{2} (f | P_n) = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx. \quad (14')$$

L'uguaglianza (14) sussiste nel senso della norma di L^2 ; se poi f è abbastanza regolare, valgono risultati analoghi a quelli che sono stati dimostrati per la convergenza puntuale delle serie di Fourier.

Esempio 8.2-2. Consideriamo la funzione $f(x) = \sin(\pi x)$ sull'intervallo $[-1, 1]$; possiamo approssimarla con una somma parziale della serie (14): trattandosi di una funzione dispari, compariranno soltanto i termini di indice dispari. La figura 8.2-4 mostra, in grigio, il grafico della funzione f e in nero il grafico del polinomio $s_5(x) = c_1 P_1(x) + c_3 P_3(x) + c_5 P_5(x)$; a destra viene mostrato l'errore $f - s_5$.

2. POLINOMI DI ČEBYŠEV

Come abbiamo ricordato nell'esempio 8.1-4, i polinomi di Čebyšev sono stati definiti mediante la formula

$$\begin{aligned} T_n(x) &:= \cos(n \arccos x) = \\ &= \sum_{0 \leq k \leq n/2} \binom{n}{2k} (-1)^k x^{n-2k} (1-x^2)^k, \quad n \in \mathbb{N}, \quad x \in [-1, 1]. \end{aligned} \quad (15)$$

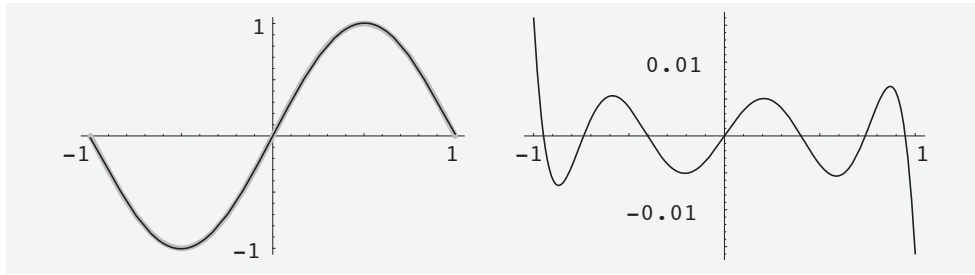


Figura 8.2-4. A sinistra: grafico della funzione $f(x) = \sin(\pi x)$ (in grigio) a cui è sovrapposto il grafico della sua approssimazione mediante il polinomio $s_5 = c_1 P_1 + c_3 P_3 + c_5 P_5$; a destra viene mostrato l'errore $f - s_5$ (si osservi l'unità di misura sull'asse delle ordinate).

Ricordiamo brevemente la genesi di tali polinomi. Ponendo $e^{it} = c + is$, dunque $c := \cos t$, $s := \sin t$, si ha

$$e^{int} = \cos nt + i \sin nt = (c + is)^n;$$

sviluppando il secondo membro con la formula del binomio e uguagliando a primo e a secondo membro le parti reali, si ottiene l'identità

$$\cos nt = \sum_{0 \leq k \leq n/2} \binom{n}{2k} (-1)^k c^{n-2k} s^{2k} = \sum_{0 \leq k \leq n/2} \binom{n}{2k} (-1)^k c^{n-2k} (1 - c^2)^k,$$

dove l'ultima quantità è un polinomio di grado n nella variabile c . Nell'ultimo passaggio abbiamo sfruttato il fatto che $s^2 = 1 - c^2$. Se si pone $x = \cos t$, con $t \in [0, \pi]$, dunque $t = \arccos x$, abbiamo la (15).

Tabella 8.2-1. ALCUNI POLINOMI DI ČEBYŠEV

grado n	$T_n(x)$
0	1
1	x
2	$-1 + 2x^2$
3	$-3x + 4x^3$
4	$1 - 8x^2 + 8x^4$
5	$5x - 20x^3 + 16x^5$

Abbiamo già verificato le relazioni di ortogonalità:

$$\int_{-1}^1 \frac{T_n(x) T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^\pi \cos nt \cos mt dt = \begin{cases} 0, & \text{se } n \neq m, \\ \pi/2, & \text{se } n = m > 0, \\ \pi, & \text{se } n = m = 0. \end{cases} \quad (16)$$

Abbiamo operato il cambiamento di variabile $t = \arccos x$, $x \in [-1, 1]$; per il calcolo dell'ultimo integrale si può utilizzare la formula

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)).$$

La (16) esprime l'ortogonalità dei polinomi di Čebyšev sull'intervallo $[-1, 1]$, rispetto alla funzione peso $w(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$.

Derivando due volte $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ si ottiene

$$T'_n(x) = \frac{n \sin(n \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\begin{aligned} T_n''(x) &= -\frac{n^2 \cos(n \arccos x)}{1-x^2} + \frac{nx \sin(n \arccos x)}{(1-x^2)^{3/2}} = \\ &= -\frac{n^2}{1-x^2} T_n(x) + \frac{x}{1-x^2} T_n'(x), \end{aligned}$$

cioè, moltiplicando per $1-x^2$ e portando tutti i termini a primo membro,

$$(1-x^2) T_n''(x) - x T_n'(x) + n^2 T_n(x) = 0.$$

Dunque T_n è un'autofunzione corrispondente all'autovalore n^2 dell'equazione differenziale

$$(1-x^2) y''(x) - x y'(x) + \lambda y(x) = 0. \quad (17)$$

Abbiamo già osservato che tale equazione si può scrivere in forma auto-aggiunta:

$$\left(\sqrt{1-x^2} y'(x) \right)' + \frac{\lambda}{\sqrt{1-x^2}} y(x) = 0. \quad (17')$$

Abbiamo anche già ottenuto, nell'esercizio 4.3-4, la formula ricorsiva a tre termini

$$T_{n+1}(x) = 2x T_n(x) - T_{n-1}(x), \quad n \geq 1, \quad T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x. \quad (18)$$

Per finire, deriviamo la funzione generatrice dei polinomi T_n , cioè una funzione $F(x, z)$ tale che $F(x, z) = \sum_{n \geq 0} T_n(x) z^n$, per ogni fissato $x \in [-1, 1]$, e per tutti gli z di un intorno dell'origine nel piano complesso. Con la consueta posizione

$$x = \cos t \quad \iff \quad t = \arccos x \quad (t \in [0, \pi])$$

abbiamo

$$T_n(x) = \cos(nt) = \frac{1}{2} (e^{int} + e^{-int}),$$

da cui

$$T_n(x) z^n = \frac{1}{2} \left[(e^{it} z)^n + (e^{-it} z)^n \right];$$

sommando rispetto all'indice n si ottiene

$$\begin{aligned} F(x, z) &= \sum_{n \geq 0} T_n(x) z^n = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1 - e^{it} z} + \frac{1}{1 - e^{-it} z} \right] = \\ &= \frac{1 - xz}{1 - 2xz + z^2} \end{aligned} \quad (19)$$

per ogni $z \in \mathbb{C}$ con $|z| < 1$, in base alla formula per la somma della serie geometrica.

Esempio 8.2-3. Riprendiamo in considerazione la funzione $f(x) = \sin(\pi x)$ sull'intervallo $[-1, 1]$; vogliamo approssimarla con una somma del tipo $s_5(x) = c_1 T_1(x) + c_3 T_3(x) + c_5 T_5(x)$, analogamente a quanto abbiamo fatto nell'esempio precedente. I coefficienti, in virtù della (16), sono dati dalla formula

$$c_n = \frac{(f | T_n)_w}{\|T_n\|_w^2} = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(x) T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx,$$

che può essere valutata con metodi numerici. L'indice w posto in basso specifica il fatto che stiamo utilizzando il prodotto scalare pesato

$$(f | g)_w := \int_{-1}^1 \frac{f(x) g(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

e la norma da esso indotta. La figura 8.2-5 mostra, in grigio, il grafico della funzione f e in nero il grafico del polinomio s_5 ; a destra viene mostrato l'errore $f - s_5$.

3. POLINOMI DI LAGUERRE

Consideriamo funzioni definite sull'intervallo illimitato $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$; evidentemente se p è una funzione polinomiale, esse non è né sommabile, né di quadrato sommabile

funzione generatrice

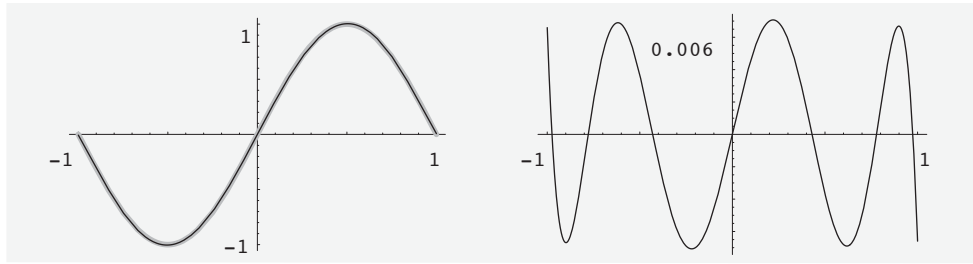


Figura 8.2-5. A sinistra: grafico della funzione $f(x) = \sin(\pi x)$ (in grigio) a cui è sovrapposto il grafico della sua approssimazione mediante il polinomio $s_5 = c_1 T_1 + c_3 T_3 + c_5 T_5$; a destra viene mostrato l'errore $f - s_5$ (si osservi l'unità di misura sull'asse delle ordinate).

su \mathbb{R}_+ . Tuttavia se si introduce la funzione peso $w(x) := e^{-x}$, allora ogni funzione polinomiale appartiene allo spazio $L^2(\mathbb{R}_+; w)$, cioè l'integrale $\int_0^{+\infty} e^{-x} f^2(x) dx$ è convergente. Si può dunque ortogonalizzare la successione dei monomi $1, x, x^2, \dots$ rispetto al prodotto scalare pesato

$$(f | g)_w := \int_0^{+\infty} e^{-x} f(x) g(x) dx.$$

Si ottengono i cosiddetti *polinomi di Laguerre*, dal nome del matematico francese E. Laguerre (1834-1886). Tali polinomi possono essere definiti mediante una formula analoga alla formula di Rodrigues, e precisamente

$$L_n(x) := \frac{e^x}{n!} D^n [e^{-x} x^n], \quad n \in \mathbb{N}. \quad (20)$$

Non è difficile, calcolando la derivata n -esima del prodotto $e^{-x} x^n$, ottenere una formula esplicita per L_n :

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \binom{n}{k} x^k = \frac{(-1)^n}{n!} x^n + \dots \quad (20')$$

Tabella 8.2-2. ALCUNI POLINOMI DI LAGUERRE

grado n	$L_n(x)$
0	1
1	$1 - x$
2	$1 - 2x + x^2/2$
3	$1 - 3x + 3x^2/2 - x^3/6$
4	$1 - 4x + 3x^2 - 2x^3/3 + x^4/24$
5	$1 - 5x + 5x^2 - 5x^3/3 + 5x^4/24 - x^5/120$

Dalla definizione (20) possiamo dedurre la relazione di ortogonalità

$$(L_n | L_m)_w = \int_0^{+\infty} L_n(x) L_m(x) e^{-x} dx = \begin{cases} 0, & \text{se } n \neq m, \\ 1, & \text{se } n = m. \end{cases} \quad (21)$$

La dimostrazione è simile a quella della Proposizione 8.2-1. Se f è una qualunque funzione n volte derivabile, si ha

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} f(x) L_n(x) e^{-x} dx &= \frac{1}{n!} \int_0^{+\infty} f(x) D^n [x^n e^{-x}] dx = \\ &= \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{+\infty} f^{(n)}(x) x^n e^{-x} dx. \end{aligned}$$

Abbiamo tenuto conto del fatto che la funzione $x^n e^{-x}$, e ciascuna delle sue derivate di ordine $< n$, si annulla tanto nell'origine quanto all'infinito. Ora, se f è un polinomio di grado minore di n , in particolare se $f = L_m(x)$ con $m < n$, abbiamo $f^{(n)}(x) = 0$, quindi la relazione di ortogonalità $(L_n | L_m)_w = 0$ è stabilita. Se poi $f = L_n(x)$, dalla (20') si deduce che $f^{(n)}(x) = (-1)^n$, quindi

$$\|L_n\|_w^2 = \frac{1}{n!} \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = 1.$$

Quanto al calcolo dell'ultimo integrale, si riveda il paragrafo 5.3, all'inizio.

Procedendo come per la dimostrazione della Proposizione 8.2-2, si dimostra che i polinomi L_n sono autofunzioni dell'equazione di Laguerre

$$xy''(x) + (1-x)y'(x) + \lambda y(x) = 0, \quad (22)$$

e precisamente L_n è un'autofunzione corrispondente all'autovalore n :

$$xL_n''(x) + (1-x)L_n'(x) + nL_n(x) = 0.$$

Si osservi che se si moltiplica l'equazione di (22) per la funzione peso e^{-x} , possiamo riscriverla in forma auto-aggiunta $xe^{-x}y''(x) + (1-x)e^{-x}y'(x) + \lambda e^{-x}y(x) = 0$, cioè

$$(xe^{-x}y'(x))' + \lambda e^{-x}y(x) = 0. \quad (22')$$

La funzione $p(x) = xe^{-x}$ che moltiplica y'' si annulla per $x = 0$ e per $x \rightarrow +\infty$. Si può infine trovare la funzione generatrice dei polinomi Laguerre:

$$\sum_{n \geq 0} L_n(x) z^n = \frac{e^{-xz/(1-z)}}{1-z}, \quad |z| < 1,$$

e da questa si può ricavare una formula ricorsiva a tre termini:

$$(n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1-x)L_n(x) - nL_{n-1}(x) = 0, \quad n \geq 1, \\ L_0(x) = 1, \quad L_1(x) = 1-x.$$

4. POLINOMI DI HERMITE

Consideriamo lo spazio $L^2(\mathbb{R}; w)$ delle funzioni di quadrato sommabile sulla retta reale, rispetto alla funzione peso $w(x) := e^{-x^2}$; ogni funzione polinomiale appartiene a tale spazio e dunque si può ortogonalizzare la successione dei monomi $1, x, x^2, \dots$ rispetto al prodotto scalare pesato

$$(f | g)_w := \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} f(x) g(x) dx.$$

Si ottengono i cosiddetti *polinomi di Hermite*, dal nome del matematico C. Hermite, che già abbiamo citato nel paragrafo 1.3. Tali polinomi possono essere definiti mediante una formula analoga alla formula di Rodrigues, e precisamente

$$H_n(x) := (-1)^n e^{x^2} D^n[e^{-x^2}], \quad n \in \mathbb{N}. \quad (23)$$

Tabella 8.2-3. ALCUNI POLINOMI DI HERMITE

grado n	$H_n(x)$
0	1
1	$2x$
2	$-2 + 4x^2$
3	$-12x + 8x^3$
4	$12 - 48x^2 + 16x^4$
5	$120x - 160x^3 + 32x^5$

Si osservi che il coefficiente direttivo di H_n è 2^n . Dalla (23) si può ricavare la relazione di ortogonalità

$$(H_n | H_m)_w = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{se } n \neq m, \\ 2^n n! \sqrt{\pi}, & \text{se } n = m. \end{cases} \quad (21)$$

I polinomi di Hermite sono autofunzioni dell'equazione differenziale

$$y''(x) - 2x y'(x) + \lambda y(x) = 0, \quad (24)$$

e precisamente H_n è un'autofunzione corrispondente all'autovalore $\lambda = 2n$:

$$H_n''(x) - 2x H_n'(x) + 2n H_n(x) = 0.$$

Si osservi che l'equazione precedente, moltiplicandola per il peso e^{-x^2} , può essere scritta in forma auto-aggiunta

$$(e^{-x^2} y'(x))' + \lambda e^{-x^2} y(x) = 0. \quad (24')$$

Si può calcolare la funzione generatrice

$$\sum_{n \geq 0} H_n(x) z^n = e^{2xz - z^2},$$

e da questa dedurre la formula ricorsiva

$$H_{n+1}(x) = 2x H_n(x) - 2n H_{n-1}(x), \quad n \geq 1, \quad H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = 2x. \quad (25)$$

Esercizi

8.2-1. Mediante ripetuta integrazione per parti mostrare che, per ogni coppia di numeri naturali n e m , si ha

$$\int_a^b \frac{(b-x)^m}{m!} \frac{(x-a)^n}{n!} dx = \frac{(b-a)^{m+n+1}}{(m+n+1)!};$$

in particolare ($a = -1$, $b = 1$, $m = n$):

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx = 2 \frac{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n+1)} = 2 \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}.$$

SUGGERIMENTO \triangleright Una primitiva di $(x-a)^n/n!$ è $(x-a)^{n+1}/(n+1)!$; la derivata di $(b-x)^m/m!$ è $-(b-x)^{m-1}/(m-1)!$.

8.2-2. Per stabilire la formula (5') si tratta di calcolare

$$\int_{-1}^1 P_n^2(x) dx = \frac{1}{[(2n)!!]^2} \int_{-1}^1 D^n(x^2-1)^n D^n(x^2-1)^n dx.$$

Con un'integrazione per parti mostrare che

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 D^n(x^2-1)^n D^n(x^2-1)^n dx &= \\ &= \left[D^{n-1}(x^2-1)^n D^n(x^2-1)^n \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 D^{n-1}(x^2-1)^n D^{n+1}(x^2-1)^n dx = \\ &= - \int_{-1}^1 D^{n-1}(x^2-1)^n D^{n+1}(x^2-1)^n dx. \end{aligned}$$

Così proseguendo si trovi, dopo n integrazioni per parti,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 D^n(x^2-1)^n D^n(x^2-1)^n dx &= \\ &= (-1)^n \int_{-1}^1 D^{n-n}(x^2-1)^n D^{n+n}(x^2-1)^n dx = \\ &= (-1)^n (2n)! \int_{-1}^1 (x^2-1)^n dx = (2n)! \int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx = \\ &= 2 \frac{(2n)! (2n)!!}{(2n+1)!!}, \end{aligned}$$

dove si è utilizzato il risultato del precedente esercizio.

SUGGERIMENTO ▷ Poiché $(x^2 - 1)^n = (x - 1)^n (x + 1)^n$ ha uno zero di ordine n tanto in 1 quanto in -1 , le derivate di tale polinomio di ordine inferiore a n si annullano in tali punti. Si sfrutti il fatto che la derivata di ordine $2n$ di $(x^2 - 1)^n$ coincide con la derivata del termine direttivo x^{2n} .

8.2-3. Combinare i risultati dei due precedenti esercizi per ottenere nuovamente la formula (4) relativa alla norma di P_n .

8.2-4. Si consideri nuovamente la rappresentazione integrale

$$P_n(x) := \frac{1}{2^n \cdot 2\pi i} \oint_{\gamma(x)} \frac{(s^2 - 1)^n}{(s - x)^{n+1}} ds$$

che abbiamo utilizzato per dimostrare la Proposizione 8.2-3. Si verifichi che scegliendo come circuito $\gamma(x)$ la circonferenza di centro x a raggio $\sqrt{1 - x^2}$, essa si scrive

$$P_n(x) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (x + i\sqrt{1 - x^2} \sin \varphi)^n ds.$$

SUGGERIMENTO. Dalla parametrizzazione $s := x + \sqrt{1 - x^2} e^{i\varphi}$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, della circonferenza $\gamma(x)$, segue $ds = i\sqrt{1 - x^2} e^{i\varphi} d\varphi$, $s - x = \sqrt{1 - x^2} e^{i\varphi}$, e

$$\begin{aligned} s^2 - 1 &= x^2 + (1 - x^2) e^{i2\varphi} + 2x\sqrt{1 - x^2} e^{i\varphi} - 1 = \\ &= (1 - x^2) e^{i2\varphi} + 2x\sqrt{1 - x^2} e^{i\varphi} - (1 - x^2) = \\ &= \sqrt{1 - x^2} e^{i\varphi} [2x + \sqrt{1 - x^2} (e^{i\varphi} - e^{-i\varphi})] = \\ &= 2\sqrt{1 - x^2} e^{i\varphi} [x + i\sqrt{1 - x^2} \sin \varphi]. \end{aligned}$$

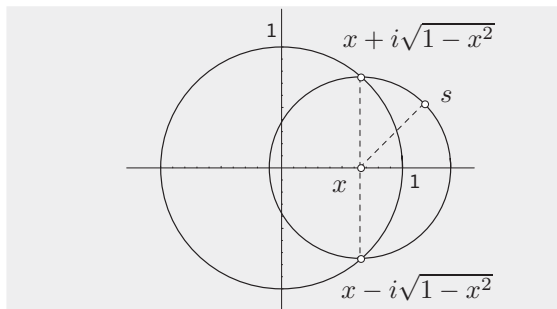


Figura 8.2-6.

Per ogni $x \in [-1, 1]$ il punto $x + i\sqrt{1 - x^2} \sin \varphi$ appartiene al segmento di estremi $x + i\sqrt{1 - x^2}$, $x + i\sqrt{1 - x^2}$, contenuto nel disco di centro l'origine e raggio 1.

8.2-5. Dedurre dalla rappresentazione integrale ottenuta nel precedente esercizio la disuguaglianza $|P_n(x)| \leq 1$ per ogni naturale n e per ogni $x \in [-1, 1]$. Si riveda, in proposito, la figura 8.1-1.

SUGGERIMENTO. Verificare che $|x + i\sqrt{1 - x^2} \sin \varphi| \leq 1$ per $x \in [-1, 1]$, calcolando il quadrato del valore assoluto in esame.

8.2-4. Dedurre dalla formula ricorsiva (18) che i coefficienti dei polinomi di Čebyšev sono interi. Discorso analogo per i polinomi di Hermite, a partire dalla formula (25).

8.2-5. Dimostrare che il polinomio di Čebyšev $T_n(x)$, per $n \geq 1$, si annulla nei punti

$$x_k = \cos \left(\frac{(2k + 1)\pi}{2n} \right), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n - 1,$$

8.3. Problemi ai limiti per equazioni differenziali non omogenee La funzione di Green

Consideriamo l'equazione differenziale non omogenea

$$-(py')' + qy = f, \quad (1)$$

sull'intervallo $[a, b]$, unitamente alle condizioni ai limiti omogenee

$$y(a) = 0, \quad y(b) = 0. \quad (2)$$

Supporremo che le funzioni p, p', q, f siano continue su $[a, b]$ con $p(x) > 0$. Consideriamo ancora l'operatore

$$L[y] = -(py')' + qy = -py'' - p'y' + qy$$

che applicheremo alle funzioni di $C^{(2)}[a, b]$ che verificano le condizioni ai limiti (2): tali funzioni costituiranno il dominio D_L dell'operatore L .

unicità Occupiamoci dell'esistenza ed unicità della soluzione del problema (1)-(2), cominciando dall'unicità. Se esistono due soluzioni $y_1, y_2 \in D_L$ del problema posto, la loro differenza $y := y_1 - y_2$ è una soluzione non nulla dell'equazione omogenea associata alla (1), cioè si ha $L[y] = 0$. Ciò equivale a dire che il problema di Sturm-Liouville

$$y \in D_L, \quad L[y] = \lambda y$$

ammette l'autovalore $\lambda = 0$.

Supponiamo che $\lambda = 0$ non sia un autovalore del problema considerato: pertanto la soluzione del problema (1)-(2), se esiste, è unica.

esistenza Per determinare tale soluzione, procuriamoci due soluzioni non nulle, y_1 e y_2 , dell'equazione omogenea $L[y] = 0$ che si annullino rispettivamente in a e in b :

$$y_1(a) = 0, \quad y_2(b) = 0.$$

Possiamo, ad esempio, imporre valori non nulli per $y_1'(a)$ e $y_2'(b)$ e risolvere i problemi di valori iniziali così ottenuti. Le funzioni y_1 e y_2 sono linearmente indipendenti: in caso contrario si avrebbe $y_1(x) = c y_2(x)$, con c costante, dunque si avrebbe $y_1(a) = y_1(b) = 0$, contro l'ipotesi ammessa che l'equazione $L[y] = 0$ ammette soltanto la soluzione nulla in D_L .

variazione delle costanti Determiniamo la soluzione del problema (1)-(2) mediante il *metodo di variazione delle costanti* di Lagrange, cioè cerchiamo la soluzione sotto la forma

$$y(x) = c_1(x) y_1(x) + c_2(x) y_2(x) \quad (3)$$

con c_1 e c_2 funzioni da determinare. Osserviamo innanzitutto che per il relativo wronskiano

$$w(x) := \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \quad (4)$$

vale l'identità (\downarrow esercizio 8.3-1)

$$p(x) w(x) = \text{costante} \neq 0. \quad (5)$$

Osserviamo poi che per ciascuna delle funzioni $c_k y_k$, $k = 1, 2$, si ha

$$(c_k y_k)' = c_k' y_k + c_k y_k', \quad (c_k y_k)'' = c_k'' y_k + 2c_k' y_k' + c_k y_k'';$$

dunque

$$\begin{aligned} L[y] = & -p(c_1'' y_1 + 2c_1' y_1' + c_1 y_1'') - p'(c_1' y_1 + c_1 y_1') + q c_1 y_1 + \\ & -p(c_2'' y_2 + 2c_2' y_2' + c_2 y_2'') - p'(c_2' y_2 + c_2 y_2') + q c_2 y_2. \end{aligned}$$

Ma $L[y_1] = L[y_2] = 0$, quindi la somma dei tre termini contenenti c_1 , così come la somma dei tre termini contenenti c_2 , è nulla, e quindi la condizione $L[y] = f$ si scrive

$$\begin{aligned} L[y] = & -p(c_1'' y_1 + 2c_1' y_1') - p' c_1' y_1 + \\ & -p(c_2'' y_2 + 2c_2' y_2') - p' c_2' y_2 = f. \end{aligned}$$

Possiamo soddisfare l'equazione precedente mediante il sistema di condizioni

$$\begin{cases} c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0 \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' = -f/p, \end{cases}$$

il cui determinante $w(x)$ è $\neq 0$. Infatti se $c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0$, si ha anche

$$(c_1' y_1 + c_2' y_2)' = c_1'' y_1 + c_2'' y_2 + c_1' y_1' + c_2' y_2' = 0,$$

dunque $c_1'' y_1 + c_2'' y_2 = -c_1' y_1' - c_2' y_2'$.

Risolviendo il sistema posto, e sfruttando la (5), otteniamo

$$c_1'(x) = \frac{1}{w(x)} \begin{vmatrix} 0 & y_2(x) \\ -f(x)/p(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \frac{f(x) y_2(x)}{p(a) w(a)}, \quad (6_1)$$

$$c_2'(x) = \frac{1}{w(x)} \begin{vmatrix} y_1(x) & 0 \\ y_1'(x) & -f(x)/p(x) \end{vmatrix} = -\frac{f(x) y_1(x)}{p(a) w(a)}. \quad (6_2)$$

Per soddisfare la condizione $y(a) = 0$, dobbiamo avere

$$y(a) = c_1(a) y_1(a) + c_2(a) y_2(a) = c_2(a) y_2(a) = 0 \implies c_2(a) = 0;$$

dunque, integrando la (6₂), si ha

$$c_2(x) = -\frac{1}{p(a) w(a)} \int_a^x f(\xi) y_1(\xi) d\xi. \quad (7_2)$$

Analogamente, dalla condizione $y(b) = 0$ segue $c_1(b) = 0$, dunque

$$c_1(x) = -\frac{1}{p(a) w(a)} \int_x^b f(\xi) y_2(\xi) d\xi. \quad (7_1)$$

In conclusione, la soluzione del problema (1)-(2) si scrive

$$y(x) = -\frac{1}{p(a) w(a)} \left[y_2(x) \int_a^x f(\xi) y_1(\xi) d\xi + y_1(x) \int_x^b f(\xi) y_2(\xi) d\xi \right], \quad (8)$$

o anche

$$y(x) = \int_a^b G(x, \xi) f(\xi) d\xi, \quad (8')$$

avendo posto

$$G(x, \xi) := -\frac{1}{p(a) w(a)} \begin{cases} y_1(x) y_2(\xi), & \text{per } a \leq x \leq \xi, \\ y_2(x) y_1(\xi), & \text{per } \xi \leq x \leq b. \end{cases} \quad (9)$$

La funzione G viene chiamata *funzione di Green* dell'operatore L , in onore del matematico inglese George Green (1793-1841). Riassumiamo la discussione precedente sotto forma di

funzione di Green

Proposizione 8.3-1. Se $\lambda = 0$ non è un autovalore del problema di Sturm-Liouville $y \in D_L$, $L[y] = \lambda y$, allora la soluzione del problema (1)-(2) esiste ed è unica in D_L ed è data da

$$y(x) = \int_a^b G(x, \xi) f(\xi) d\xi,$$

dove G è la funzione di Green definita dalla (9).

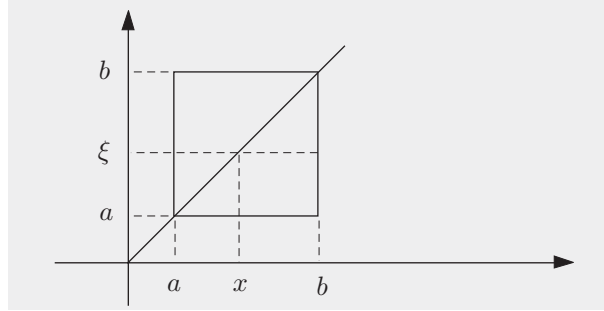
La funzione di Green gode delle seguenti proprietà:

1. G è reale e continua sul quadrato $[a, b] \times [a, b]$.

2. G è simmetrica: $G(x, \xi) = G(\xi, x)$.
3. Per ogni $\xi \in (a, b)$ la funzione $x \mapsto G(x, \xi)$ è soluzione dell'equazione omogenea $L[G(\cdot, \xi)] = 0$, negli intervalli $a \leq x < \xi$ e $\xi < x \leq b$.
4. Per ogni $\xi \in [a, b]$ la funzione $x \mapsto G(x, \xi)$ verifica le condizioni ai limiti (2): $G(a, \xi) = G(b, \xi) = 0$;
5. per ogni $\xi \in (a, b)$ il salto della derivata prima $G_x(x, \xi)$ nel punto $x = \xi$ vale $-1/p(\xi)$: $G_x(\xi^+, \xi) - G_x(\xi^-, \xi) = -1/p(\xi)$.

Figura 8.3-1.

La funzione G è continua sul quadrato $[a, b] \times [a, b]$; per ogni $\xi \in (a, b)$ la derivata parziale $G_x(x, \xi)$ ha una discontinuità di prima specie nel punto $x = \xi$ con salto uguale a $-1/p(\xi)$.



Per quanto riguarda l'ultima proprietà, si osservi che si ha

$$G_x(x, \xi) := -\frac{1}{p(a)w(a)} \begin{cases} y_1'(x) y_2(\xi), & \text{per } a \leq x < \xi, \\ y_2'(x) y_1(\xi), & \text{per } \xi < x \leq b, \end{cases}$$

dunque il salto della derivata prima per $x = \xi$ vale

$$-\frac{1}{p(a)w(a)} (y_1(\xi) y_2'(\xi) - y_2(\xi) y_1'(\xi)) = -\frac{w(\xi)}{p(a)w(a)} = -\frac{1}{p(\xi)},$$

in quanto $p(a)w(a) = p(\xi)w(\xi)$.

Si ha una migliore comprensione delle proprietà della funzione di Green se esse vengono lette nel quadro della teoria delle distribuzioni che abbiamo sviluppato nel capitolo precedente. Dalle proprietà 1, 3 e 5 segue che, per ogni $\xi \in (a, b)$, la funzione $x \mapsto G(x, \xi)$ è soluzione dell'equazione

$$L[G(x, \xi)] = \delta(x - \xi),$$

dove s'intende che l'operatore L agisce su G in quanto funzione di x . Dunque G è una *soluzione fondamentale* dell'operatore differenziale L ; essa può essere interpretata come la perturbazione generata da una sorgente puntiforme di intensità 1, collocata nel punto $x = \xi$.

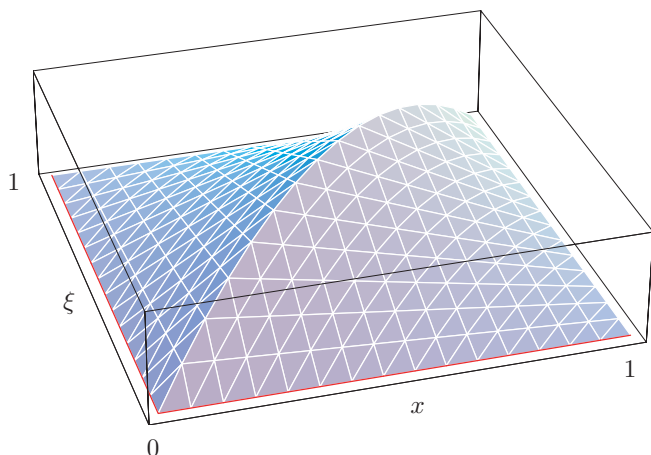
Nel paragrafo 5.5 abbiamo considerato la *risposta impulsiva* relativa ad un sistema dinamico retto da un'equazione differenziale a coefficienti costanti, col coefficiente di y'' uguale a 1 (equazione in forma normale); abbiamo visto che si tratta di una soluzione fondamentale dell'equazione in esame, che è nulla per $x \leq 0$.

Il fatto che l'operatore differenziale, applicato a tale funzione, generi $\delta(x)$, dipende dal fatto che la derivata prima ha una discontinuità di prima specie nell'origine con salto uguale a 1.

Esempio 8.3-1. Costruiamo la funzione di Green per il problema

$$-y'' = f, \quad y(0) = y(1) = 0.$$

Possiamo scegliere $y_1(x) = x$, $y_2(x) = 1 - x$, da cui segue facilmente

**Figura 8.3-2.**

La funzione di Green per il problema $-y'' = f$,
 $y(0) = y(1) = 0$.

$$G(x, \xi) = \begin{cases} x(1 - \xi), & \text{per } 0 \leq x \leq \xi, \\ (1 - x)\xi, & \text{per } \xi \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Esempio 8.3-2. Costruiamo la funzione di Green per il problema

$$-y'' - y = f, \quad y(0) = y(\pi/2) = 0.$$

Possiamo scegliere $y_1(x) = \sin x$, $y_2(x) = \cos x$, da cui segue

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \sin x \cdot \cos \xi, & \text{per } 0 \leq x \leq \xi, \\ \cos x \cdot \sin \xi, & \text{per } \xi \leq x \leq \pi/2. \end{cases}$$

Esempio 8.3-3. Costruiamo la funzione di Green per il problema

$$-y'' + y = f, \quad y(0) = y(1) = 0.$$

Possiamo scegliere $y_1(x) = \sinh x$, $y_2(x) = \sinh(1 - x)$, da cui segue

$$G(x, \xi) = \frac{1}{\sinh 1} \begin{cases} \sinh x \cdot \sinh(1 - \xi), & \text{per } 0 \leq x \leq \xi, \\ \sinh \xi \cdot \sinh(1 - x), & \text{per } \xi \leq x \leq \pi/2. \end{cases}$$

◁□

Tutto ciò che abbiamo detto fino a questo momento relativamente al problema di Sturm-Liouville

$$-(py')' + qy = f, \quad y(a) = 0, \quad y(b) = 0$$

si estende, con poche varianti formali, al caso delle condizioni ai limiti più generali

$$k_1 y(a) + k_2 y'(a) = 0, \quad h_1 y(b) + h_2 y'(b) = 0$$

(si rivedano le (2') e (2'') del paragrafo iniziale), sempre nell'ipotesi che il corrispondente problema per l'equazione omogenea $L[y] = 0$ ammetta soltanto la soluzione nulla.

Basta scegliere due soluzioni dell'equazione omogenea, siano y_1 e y_2 , in modo tale che y_1 verifichi la condizione posta nel punto a , ma non quella nel punto b , e viceversa la y_2 verifichi la condizione nel punto b , ma non quella nel punto a . Per il resto non ci sono cambiamenti da fare. Mostriamo tutto ciò su alcuni esempi.

Esempio 8.3-4. Costruiamo la funzione di Green per il problema

$$-y'' = f, \quad y(0) = 0, \quad y'(1) = 0.$$

Poiché l'equazione omogenea $y'' = 0$ ammette come soluzioni tutti e soli i polinomi di grado ≤ 1 , cioè $y(x) = ax + b$, le condizioni ai limiti si scrivono $y(0) = b = 0$, $y'(1) = a = 0$.

Dunque il problema ai limiti per l'equazione omogenea ammette soltanto la soluzione nulla. Possiamo scegliere le due soluzioni dell'equazione omogenea $y_1(x) = x$ (per cui $y_1(0) = 0$, ma $y_1'(1) \neq 0$), $y_2(x) = 1$ (per cui $y_2(0) \neq 0$, $y_2'(1) = 0$); ad esse corrisponde il wronskiano $w(x) = -1$. Abbiamo dunque la funzione di Green

$$G(x, \xi) = \begin{cases} x, & \text{per } 0 \leq x \leq \xi, \\ \xi, & \text{per } \xi \leq x \leq 1. \end{cases}$$

La formula risolutiva (8) si scrive semplicemente

$$y(x) = \int_0^x f(\xi) \xi d\xi + x \int_x^1 f(\xi) d\xi.$$

Applicata al termine noto $f(x) = x$, essa fornisce la soluzione $y(x) = x/2 - x^3/6$, la cui correttezza è subito verificata.

Esempio 8.3-5. Costruiamo la funzione di Green per il problema

$$-y'' - y = f, \quad y(0) = 0, \quad y'(\pi) = 0.$$

Lasciamo al lettore la verifica del fatto che il corrispondente problema per l'equazione omogenea ammette soltanto la soluzione nulla. Possiamo scegliere $y_1(x) = \sin x$, $y_2(x) = \cos x$, esattamente come nell'esempio 8.3-2, ottenendo la stessa funzione di Green.

Si faccia attenzione, tuttavia, al fatto che l'intervallo in cui si cerca la soluzione non è più $[0, \pi/2]$, bensì $[0, \pi]$. La formula risolutiva (8) si scrive dunque

$$y(x) = \cos x \int_0^x f(\xi) \sin \xi d\xi + \sin x \int_x^\pi f(\xi) \cos \xi d\xi.$$

Applicata al termine noto $f(x) = x$, essa fornisce la soluzione $y(x) = -\sin x - x$, la cui correttezza è subito verificata.

Esempio 8.3-6. Costruiamo la funzione di Green per il problema

$$-y'' - y = f, \quad y(0) + y'(0) = 0, \quad y(\pi) = 0.$$

Poiché la soluzione generale dell'equazione omogenea associata è $c_1 \cos x + c_2 \sin x$, le condizioni ai limiti conducono al sistema

$$c_1 + c_2 = 0, \quad -c_1 = 0;$$

dunque esse sono soddisfatte soltanto dalla funzione nulla. Possiamo scegliere $y_1(x) = \cos x - \sin x$, $y_2(x) = \sin x$, a cui corrisponde il wronskiano $w(x) = 1$. La formula risolutiva (8) si scrive pertanto

$$y(x) = -\sin x \int_0^x f(\xi) (\cos \xi - \sin \xi) d\xi - (\cos x - \sin x) \int_x^\pi f(\xi) \sin \xi d\xi.$$

Applicata al termine noto $f(x) = \sin x$, essa fornisce la soluzione

$$y(x) = \frac{1}{2}((x - \pi) \cos x + (\pi - 1) \sin x),$$

la cui correttezza è facilmente verificata.

Esercizi

8.3-1. Siano y_1 e y_2 due soluzioni dell'equazione differenziale lineare omogenea $-(py')' + qy = 0$, che si può anche scrivere $py'' = -p'y' + qy$. Dimostrare che per il relativo wronskiano

$$w(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

si ha $p(x)w(x) = \text{costante}$, in quanto $(p(x)w(x))' = 0$.

SUGGERIMENTO ▷ Si tratta di dimostrare che $pw' = -p'w$. Ora

$$w'(x) = \begin{vmatrix} y_1'(x) & y_2'(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) \end{vmatrix}.$$

Si moltiplichino entrambi i membri per p , scrivendo py_1'' e py_2'' nella seconda riga dell'ultimo determinante, e si sfruttino le uguaglianze $py_k'' = -p'y_k' + qy_k$, $k = 1, 2$.

8.3-2. Dedurre dal precedente esercizio che, se p ha segno costante sull'intervallo di definizione $[a, b]$, ad esempio $p(x) > 0$, allora o il wronskiano w è identicamente nullo, oppure è anch'esso di segno costante. La prima alternativa si verifica se e solo se y_1 e y_2 sono linearmente dipendenti.

8.3-3. Si consideri il problema ai limiti dell'esempio 8.3-1, cioè $-y'' = f$, $y(0) = y(1) = 0$. Si scriva esplicitamente la formula risolutiva (8) e si verifichi che, in corrispondenza dei termini noti f indicati nella tabella seguente, si hanno le soluzioni indicate a fianco di ciascuno.

$f(x)$	$y(x)$	$f(x)$	$y(x)$
1	$(x - x^2)/2$	x	$(x - x^3)/6$
x^2	$(x - x^4)/12$	x^3	$(x - x^5)/20$

Potete fare una congettura sulla soluzione corrispondente al termine noto $f(x) = x^n$?

8.3-4. Relativamente allo stesso problema ai limiti del precedente esercizio, calcolare le soluzioni corrispondenti ai termini noti $f(x) = \sin(\pi x)$, $f(x) = \cos(\pi x)$, $f(x) = e^x$. In ciascun caso verificare la soluzione ottenuta.

8.3-5. Verificare che tutte le soluzioni calcolate nei due precedenti esercizi si presentano come somma di una soluzione dell'equazione omogenea e di una soluzione dell'equazione non omogenea.

8.3-6. Si consideri il problema ai limiti $-y'' = f$, $y(0) + y'(0) = 0$, $y(1) + y'(1) = 0$. Dopo aver verificato che il corrispondente problema per l'equazione omogenea ammette soltanto la soluzione nulla, si costruisca la funzione di Green, si scriva la formula risolutiva (8) e si verifichi che, in corrispondenza dei termini noti f indicati nella tabella seguente, si hanno le soluzioni indicate a fianco di ciascuno.

$f(x)$	$y(x)$	$f(x)$	$y(x)$
1	$(-x^2 + 3x - 3)/2$	x	$(-x^3 + 4x - 4)/6$
x^2	$(-x^4 + 5x - 5)/12$	x^3	$(-x^5 + 6x - 6)/20$

Potete fare una congettura sulla soluzione corrispondente al termine noto $f(x) = x^n$?

8.4. L'equazione del calore

La conduzione del calore in un mezzo omogeneo e isotropo è governata da un'equazione del tipo

$$\Delta u = \frac{1}{C} \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (1)$$

dove u è la temperatura (funzione delle coordinate spaziali e del tempo t) e Δu è il cosiddetto *laplaciano* di u , in coordinate cartesiane ortogonali

$$\Delta u(x, y, z) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

La costante C dipende dal mezzo considerato ed è il rapporto tra la conducibilità del mezzo e il prodotto tra il calore specifico e la densità.

In alcuni casi semplici la temperatura dipende da una sola coordinata spaziale: possiamo immaginare una barra omogenea di lunghezza L i cui estremi vengono tenuti a temperatura costante (convenzionalmente posta uguale a 0) e si vuole studiare l'evoluzione temporale della temperatura ammettendo di conoscerne la distribuzione in un assegnato istante, convenzionalmente posto uguale a 0. In questo caso la coordinata x individua la posizione di un punto della barra rispetto all'asse longitudinale della stessa.

Abbiamo dunque l'equazione differenziale

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{C} \frac{\partial u}{\partial t} \quad \forall x \in [0, L], \quad \forall t \geq 0, \quad (1')$$

con le condizioni al contorno

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in [0, L], \quad u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (2)$$

La funzione $x \in [0, L] \mapsto u_0(x)$, che rappresenta la temperatura iniziale, può essere prolungata "per disparità" all'intervallo simmetrico $[-L, L]$ ponendo

$$u_0(-x) := -u_0(x), \quad \forall x \in [0, L].$$

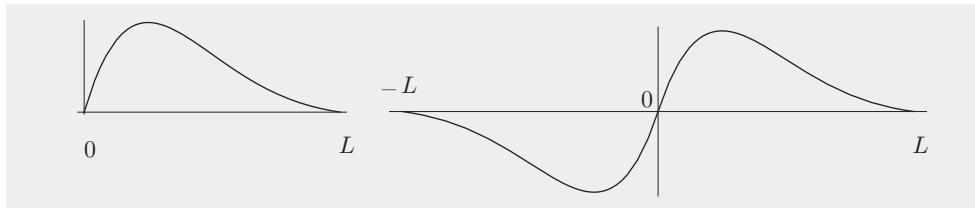


Figura 8.4-1. Una funzione definita sull'intervallo $[0, L]$ viene prolungata all'intervallo $[-L, L]$ in modo da ottenere una funzione dispari.

Se dunque u_0 ha una regolarità sufficiente per essere sviluppata in serie di Fourier, avremo (\uparrow formula (4) del par. 3.5)

$$u_0(x) = \sum_{k>0} b_k \sin(k\omega_1 x),$$

dove

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{2\pi}{2L} = \frac{\pi}{L}, \\ b_k &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L u_0(x) \sin(k\omega_1 x) dx = \frac{2}{L} \int_0^L u_0(x) \sin(k\omega_1 x) dx. \end{aligned} \quad (3)$$

Abbiamo scelto il simbolo ω_1 per indicare il rapporto π/L per ragioni di coerenza con il simbolo ω_n che introdurremo tra poco.

separazione
delle variabili

Utilizzeremo il *metodo di separazione delle variabili* (proposto dallo stesso Fourier), cioè cercheremo soluzioni particolari dell'equazione (1') sotto forma di prodotto di una funzione della sola x per una funzione della sola t , vale a dire

$$u(x, t) = X(x)T(t).$$

Procedendo in modo formale, cioè senza preoccuparci della liceità delle operazioni che faremo, otteniamo

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''(x) T(t), \quad \frac{\partial u}{\partial t} = X(x) T'(t),$$

dunque abbiamo una soluzione dell'equazione (1') se

$$X''(x) T(t) = \frac{1}{C} X(x) T'(t) \iff \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{C} \frac{T'(t)}{T(t)}.$$

Ai due membri dell'uguaglianza scritta compaiono una funzione della sola x ed una funzione della sola t ; l'uguaglianza è possibile solo se entrambe le funzioni sono costanti:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{C} \frac{T'(t)}{T(t)} = k \iff \begin{cases} X''(x) = k X(x), \\ T'(t) = k C \cdot T(t). \end{cases}$$

Tuttavia tale costante deve necessariamente essere negativa: infatti l'equazione differenziale

$$X''(x) = k X(x)$$

con le condizioni di annullamento $X(0) = X(L) = 0$ coincide con il problema di Sturm-Liouville che abbiamo studiato nell'esempio 8.1-1: basta scrivere $-\lambda$ al posto di k . Sappiamo che esso ha autovalori λ positivi. Se indichiamo la costante precedente con il simbolo $-\omega^2$, le due equazioni differenziali scritte hanno soluzioni

$$X(x) = \alpha \cos \omega x + \beta \sin \omega x, \quad T(t) = \gamma e^{-C \omega^2 t},$$

con α, β, γ costanti reali arbitrarie. Una soluzione particolare dell'equazione (1') si scrive dunque ($a := \alpha \gamma$, $b := \beta \gamma$)

$$u(x, t) = (a \cos \omega x + b \sin \omega x) e^{-C \omega^2 t},$$

con a, b costanti reali arbitrarie. Come già abbiamo visto nell'esempio sopra citato, imponendo la condizione $u(0, t) = 0$, si ha necessariamente $a = 0$, mentre la condizione $u(L, t) = 0$ richiede che sia

$$\sin \omega L = 0 \iff \omega L = n\pi, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

In definitiva la funzione u appena considerata è una soluzione non nulla dell'equazione (1') con le condizioni al contorno $u(0, t) = u(L, t) = 0$ se (e solo se) ω è uguale ad uno dei valori

$$\omega_n := \frac{n\pi}{L}, \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

e si scrive

$$u(x, t) = b \sin \omega_n x \cdot e^{-C \omega_n^2 t}.$$

Infine la condizione iniziale $u(x, 0) = u_0(x)$ non può essere soddisfatta da una tale funzione, a meno che il dato $u_0(x)$ non si riduca ad una funzione sinusoidale del tipo $b \sin \omega_n x$. Tuttavia la somma di un numero arbitrario di funzioni del tipo considerato

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^N b_n \sin \omega_n x \cdot e^{-C \omega_n^2 t}, \quad (4)$$

è ancora soluzione del problema considerato e lo stesso può dirsi anche per una "somma infinita", cioè per una serie trigonometrica del tipo

$$u(x, t) = \sum_{n \geq 1} b_n \sin \omega_n x \cdot e^{-C \omega_n^2 t}, \quad (4')$$

almeno sotto condizioni sui coefficienti b_n che assicurino la sua convergenza e la liceità di derivarla termine a termine due volte rispetto a x ed una volta rispetto a t .

Ora la condizione iniziale $u(x, 0) = u_0(x)$ diventa

$$u_0(x) = \sum_{n \geq 1} b_n \sin \omega_n x;$$

se si osserva che

$$\omega_n = \frac{n\pi}{L} = n\omega_1,$$

si riconosce che la condizione imposta è soddisfatta se e solo se i coefficienti b_n sono i coefficienti dello sviluppo di Fourier della funzione u_0 .

In conclusione: la serie (4'), dove i coefficienti b_n sono dati dalle formule (3), risolve il problema, almeno formalmente. In pratica, se le ampiezze b_n tendono a 0 abbastanza rapidamente, una somma parziale del tipo (4) fornisce una buona soluzione approssimata del problema posto.

Osserviamo che ciascun termine della serie (4'), cioè ciascuna delle funzioni

$$(x, t) \mapsto b_n \sin \omega_n x \cdot e^{-C \omega_n^2 t}$$

tende a 0 per $t \rightarrow +\infty$. Mostriamo che, sotto ipotesi ragionevoli, la funzione $u(x, t)$, somma della stessa serie, tende a 0 per $t \rightarrow +\infty$, anzi la convergenza è uniforme al variare di x nell'intervallo $[0, L]$.

Supponiamo infatti che il dato iniziale u_0 sia sommabile sull'intervallo $[0, L]$; allora dalla formula (3) segue

$$|b_n| \leq \frac{2}{L} \int_0^L |u_0(x)| dx = \frac{2}{L} \|u_0\|_1.$$

Ne segue

$$|u(x, t)| \leq \frac{2}{L} \|u_0\|_1 \sum_{n \geq 1} e^{-C \omega_n^2 t}.$$

Ma

$$\omega_n^2 = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \geq n \left(\frac{\pi}{L}\right)^2,$$

quindi

$$|u(x, t)| \leq \frac{2}{L} \|u_0\|_1 \sum_{n \geq 1} \left(e^{-C(\pi/L)^2 t}\right)^n = \frac{2}{L} \|u_0\|_1 \frac{e^{-C(\pi/L)^2 t}}{1 - e^{-C(\pi/L)^2 t}},$$

dove l'ultima quantità tende a 0 per $t \rightarrow +\infty$. Abbiamo sfruttato il fatto che la somma della serie geometrica $\sum_{n \geq 1} z^n = z + z^2 + z^3 + \dots$ vale $z/(1-z)$ per $|z| < 1$.

Supponiamo ora di sostituire le condizioni ai limiti (2) con condizioni del tipo

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u(0, t) = \alpha, \quad u(L, t) = \beta, \quad t > 0. \quad (2')$$

Possiamo cercare la soluzione del problema posto nella forma

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x),$$

dove w è la funzione polinomiale di grado ≤ 1 che vale α per $x = 0$ e vale β per $x = L$ (\downarrow esercizio 8.3-1):

$$w(x) := \alpha + (\beta - \alpha)x/L.$$

La funzione u verificherà le condizioni al contorno (2') a patto che v verifichi le condizioni

$$v(x, 0) = u_0(x) - w(x), \quad x \in [0, L], \quad v(0, t) = v(L, t) = 0, \quad t \geq 0.$$

Esempio 8.4-1. Vogliamo risolvere l'equazione $u_t = u_{xx}$ per $x \in [0, 1]$, $t > 0$, con le condizioni al contorno

$$u(x, 0) = x^2, \quad u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 1.$$

Avremo $w(x) = x$, dunque dovremo calcolare, mediante la serie (4'), la soluzione del problema

$$v_t = v_{xx}, \quad v(x, 0) = x^2 - x, \quad v(0, t) = v(1, t) = 0.$$

Essendo $\omega_n = n\pi$, si ottiene la soluzione

$$v(x, t) = \sum_{n \geq 1} b_n \sin(n\pi x) e^{-n^2 \pi^2 t},$$

con

$$b_n = 2 \int_0^1 (t^2 - t) \sin(n\pi t) dt = \frac{4}{n^3 \pi^3} ((-1)^n - 1).$$

Il calcolo del coefficiente b_n si effettua mediante due integrazioni per parti; si osservi che $b_n = 0$ per n pari.

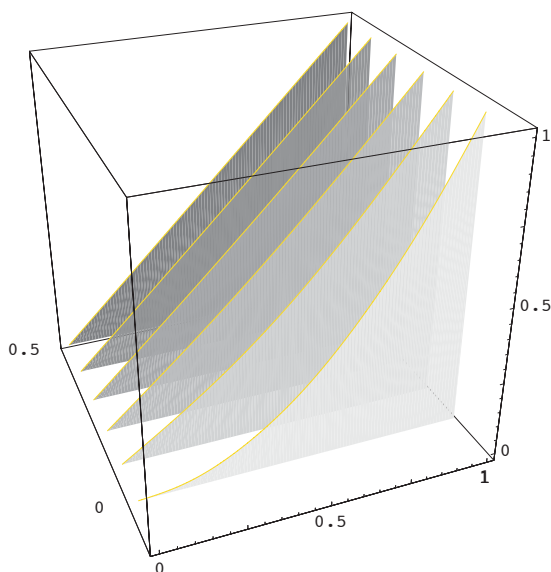


Figura 8.4-2.

Soluzione approssimata del problema posto nell'esempio 8.4-1, per t da 0 a 0.5 a passi $\Delta t = 0.1$.

Data la rapida convergenza a 0 dei coefficienti di Fourier b_n , bastano pochi termini della serie scritta per avere una buona approssimazione del dato iniziale. La figura 8.4-2 mostra la somma parziale $s_5(x, t)$ della serie che fornisce v , a cui è stata sommata la funzione $w(x) = x$, cioè

$$b_1 \sin(\pi x) \exp(-\pi^2 t) + b_3 \sin(3\pi x) \exp(-9\pi^2 t) + b_5 \sin(5\pi x) \exp(-25\pi^2 t) + x,$$

per i valori di t da 0 a 0.5 a passi $\Delta t = 0.1$. Per $t \rightarrow +\infty$ la soluzione $u(x, t)$ tende alla soluzione stazionaria $w(x) = x$.

Esempio 8.4-2. Vogliamo risolvere l'equazione $u_t = u_{xx}$ per $x \in [0, 2]$, $t > 0$, con le condizioni al contorno

$$u(x, 0) = (x - 1)^+ = \begin{cases} 0, & \text{per } 0 \leq x \leq 1, \\ x - 1, & \text{per } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}, \quad u(0, t) = 0, \quad u(2, t) = 1.$$

Ora abbiamo $\omega_n = n\pi/2$, $w(x) = x/2$, quindi il dato iniziale per l'incognita ausiliaria v sarà

$$v(x, 0) = (x - 1)^+ - x/2 = \begin{cases} -x/2, & \text{per } 0 \leq x \leq 1, \\ x/2 - 1, & \text{per } 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Per i coefficienti di Fourier di tale funzione troviamo

$$\begin{aligned} b_n &= - \int_0^1 (t/2) \sin(n\pi t/2) dt + \int_1^2 (t/2 - 1) \sin(n\pi t/2) dt = \\ &= - \frac{4}{n^2 \pi^2} \sin(n\pi/2). \end{aligned}$$

Abbiamo ancora che i coefficienti di indice pari sono nulli; tuttavia la minore regolarità del dato iniziale comporta una più lenta convergenza a 0 dei coefficienti b_n . La figura 8.4-3, del tutto simile alla precedente, mostra l'andamento della soluzione approssimata $s_5(x, t) + x/2$, per t da 0 a 0.7 a passi $\Delta t = 0.1$. $\triangleleft \square$

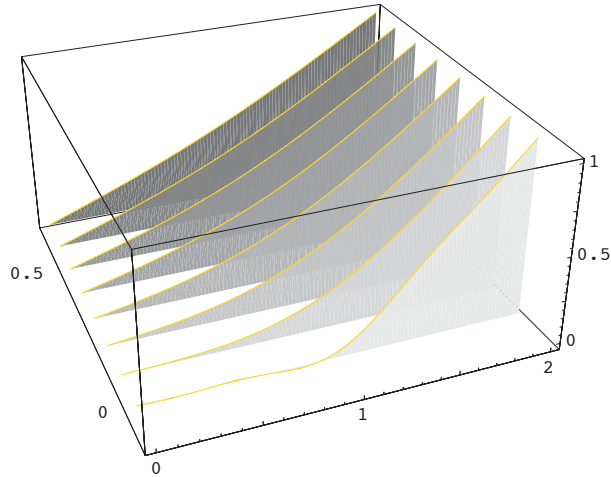


Figura 8.4-3.
Soluzione approssimata del
problema posto nell'esempio
8.4-2, per t da 0 a 0.7 a passi
 $\Delta t = 0.1$.

Un secondo problema, simile al precedente, si ottiene se consideriamo una barra illimitata, conduttrice del calore, di cui sia nota la temperatura all'istante iniziale e ci si propone di studiare l'andamento della temperatura nel tempo. Sia, come in precedenza, $u(x, t)$ la temperatura nel punto di ascissa $x \in \mathbb{R}$ all'istante $t > 0$. Supponiamo, per semplicità di notazioni, che la costante C che compare nell'equazione (1) sia uguale a 1. Supponiamo che sia

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

Per risolvere il problema posto, utilizzeremo la trasformata di Fourier della u , considerata come funzione della sola x , per t fissato. Supporremo che il dato iniziale u_0 sia sommabile, unitamente alle derivate prima e seconda; analogamente, cercheremo una soluzione nello spazio delle funzioni $u(x, t)$ per cui

- 1) le funzioni $x \mapsto u(x, t)$, $x \mapsto u_x(x, t)$, $x \mapsto u_{xx}(x, t)$, sono sommabili su \mathbb{R} per ogni $t \geq 0$;
- 2) su ogni intervallo limitato $0 \leq t \leq T$ la funzione $x \mapsto u_t(x, t)$ ammette una maggiorante sommabile $f(x)$, $|u_t(x, t)| \leq f(x)$, indipendente da t .

Per t fissato, applichiamo la F -trasformata (rispetto a x) ai due membri della (1'), che ora si scrive

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall t \geq 0, \quad (1'')$$

A primo membro otteniamo

$$\mathcal{F}[u_{xx}(x, t)](\omega) = -\omega^2 \hat{u}(\omega, t),$$

avendo indicato con $\hat{u}(\omega, t)$ la F -trasformata di $x \mapsto u(x, t)$.

A secondo membro, in base alla condizione 2), che rende lecita la derivazione sotto il segno di integrale, abbiamo

$$\mathcal{F}[u_t(x, t)](\omega) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega x} u_t(x, t) dx = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega x} u(x, t) dx = \hat{u}(\omega, t)_t.$$

Per ogni fissato ω , la trasformata $\hat{u}(\omega, t)$ è dunque soluzione dell'equazione differenziale lineare del primo ordine a coefficienti costanti (rispetto a t)

$$\hat{u}(\omega, t)_t = -\omega^2 \hat{u}(\omega, t),$$

la cui soluzione generale è

$$\hat{u}(\omega, t) = c(\omega) e^{-\omega^2 t}.$$

Poiché per $t = 0$ dobbiamo ottenere la trasformata di u_0 , sia $\hat{u}_0(\omega)$, abbiamo

$$\hat{u}(\omega, t) = \hat{u}_0(\omega) e^{-\omega^2 t}.$$

A questo punto possiamo applicare il teorema sulla convoluzione (↑ Prop. 6.2-6): tenendo presente che

$$e^{-\omega^2 t} = \mathcal{F}\left[\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-x^2/4t}\right]$$

(si riveda l'esempio 6.2-8, in cui si sostituisca t al posto di $\sigma^2/2$), si ottiene finalmente

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\xi^2/4t} u_0(x - \xi) d\xi.$$

Si osservi che la famiglia di funzioni

$$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-x^2/4t}$$

per $t \rightarrow 0^+$ genera la delta di Dirac; si riveda in proposito il quarto esempio della Tabella 7.1-1, in cui si ponga $\lambda = 1/(2\sqrt{t})$. Dunque la relazione di limite

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} u(x, t) = u_0(x)$$

segue dalla Proposizione 7.1-2.

Esempio 8.4-3. Supponiamo che il dato iniziale $u_0(x)$ abbia un andamento gaussiano, cioè sia $u_0(x) = ce^{-ax^2}$, con c e a costanti positive. Allora (↑ esempio 6.2-7) abbiamo

$$\hat{u}_0(\omega) = c\sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(-\frac{\omega^2}{4a}\right),$$

e pertanto l'uguaglianza $\hat{u}(\omega, t) = \hat{u}_0(\omega) e^{-\omega^2 t}$ si scrive

$$\hat{u}(\omega, t) = c\sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(-\frac{\omega^2}{4a}\right) \exp(-\omega^2 t) = c\sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(-\left(\frac{1}{4a} + t\right)\omega^2\right).$$

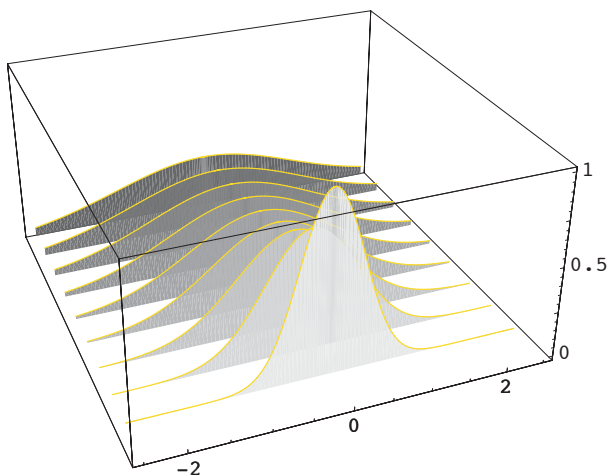


Figura 8.4-4.

Soluzione approssimata del problema posto nell'esempio 8.4-3: se la temperatura iniziale ha un andamento gaussiano, tale andamento si conserva nel tempo.

Poniamo

$$\frac{1}{4a} + t = \frac{1 + 4at}{4a} = \frac{1}{4\alpha} \iff \alpha = \frac{a}{1 + 4at}.$$

Allora

$$\begin{aligned} \widehat{u}(\omega, t) &= c \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(-\frac{\omega^2}{4\alpha}\right) = c \sqrt{\frac{\alpha}{a}} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \exp\left(-\frac{\omega^2}{4\alpha}\right) = \\ &= \frac{c}{\sqrt{1 + 4at}} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \exp\left(-\frac{\omega^2}{4\alpha}\right), \end{aligned}$$

da cui finalmente, antitrasformando,

$$u(x, t) = \frac{c}{\sqrt{1 + 4at}} \exp\left(-\frac{ax^2}{1 + 4at}\right).$$

Per ogni $t > 0$ la temperatura ha un andamento gaussiano: l'andamento "a campana" è tanto più appiattito quanto più t è grande; per ogni fissato x , $u(x, t)$ che tende a 0 per $t \rightarrow \infty$. $\triangleleft \square$

Esercizi

8.4-1. Verificare che le soluzioni dell'equazione del calore che sono indipendenti dal tempo sono tutte (e soltanto) quello del tipo $u(x, t) = ax + b$.

8.4-2. Verificare che i polinomi del tipo $u(x, t) = ax^2 + bx + c + 2at$ (in particolare i polinomi di grado ≤ 1 nella sola x) sono soluzioni dell'equazione del calore $u_t = u_{xx}$.

8.4-3. Sotto quale condizione sui coefficienti α e β le due funzioni $e^{\alpha t} \cos(\beta x)$ e $e^{\alpha t} \sin(\beta x)$ sono soluzioni dell'equazione del calore $u_t = u_{xx}$?

8.4-4. Verificare che la funzione

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)$$

verifica l'equazione del calore $u_t = u_{xx}$ per $t > 0$.

8.4-5. Verificare che la funzione

$$u(x, y, t) = \frac{1}{t} \exp\left(-\frac{(x^2 + y^2)}{4t}\right)$$

verifica l'equazione del calore $u_t = u_{xx} + u_{yy}$ per $t > 0$.

8.4-6. Applicare il metodo di separazione delle variabili alla soluzione del problema

$$u_t = u_{xx}, \quad x \in [0, L], \quad t > 0, \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0,$$

corrispondente al caso di una sbarra conduttrice i cui estremi sono isolati.

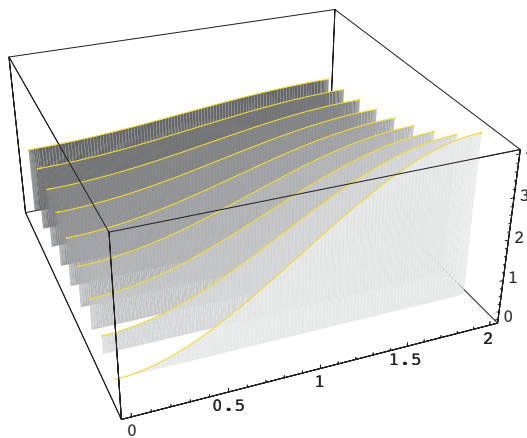


Figura 8.4-5.
Soluzione approssimata
del problema posto
nell'esercizio 8.4-6, con i dati
 $L = 2$, $u_0(x) = 4x - x^3$.

Verificare che si ottiene la soluzione sotto la forma

$$u(x, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n>0} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \exp\left[-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t\right],$$

dove $a_n = (2/L) \int_0^L u_0(t) \cos(n\pi/L t) dt$. Quanto vale il limite $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t)$?

8.5. L'equazione delle onde

Le vibrazioni di una corda elastica sono governate dall'equazione (monodimensionale) delle onde

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (1)$$

dove la costante c ha le dimensioni di una velocità. Se l'asse x corrisponde alla posizione della corda a riposo, allora $u(x, t)$ rappresenta lo spostamento all'istante t del punto di ascissa x . Poiché la corda è fissata agli estremi $x = 0$ e $x = L$, avremo le *condizioni ai limiti*

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0, \quad \forall t \geq 0. \quad (2)$$

Le oscillazioni della corda dipenderanno dallo spostamento iniziale (cioè all'istante 0) e dalla velocità iniziale; se f indica lo spostamento iniziale e g la velocità iniziale, avremo le *condizioni iniziali*

$$u(x, 0) = f(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = g(x), \quad 0 \leq x \leq L. \quad (3)$$

Cerchiamo, come nel precedente paragrafo, una soluzione mediante separazione delle variabili, cioè

$$u(x, t) = X(x) T(t).$$

Sostituendo nella (1) otteniamo

$$X(x) T''(t) = c^2 X''(x) T(t) \iff \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{c^2} \frac{T''(t)}{T(t)}.$$

L'uguaglianza è possibile soltanto se i due membri sono uguali ad una costante, sia k ; siamo dunque condotti alle equazioni

$$X'' - kX = 0, \quad T'' - kc^2 T = 0. \quad (4)$$

Poiché la funzione identicamente nulla $T(t) \equiv 0$ conduce alla soluzione nulla, priva di interesse, le condizioni ai limiti (2) conducono alle uguaglianze $X(0) = X(L) = 0$. Abbiamo dunque nuovamente il problema di Sturm-Liouville che abbiamo discusso nell'esempio 8.1-1 e ancora nel precedente paragrafo. Sappiamo che esso ammette soluzioni non nulle per $k = -\omega_n^2 = -(n\pi/L)^2$, $n = 1, 2, \dots$, e tali soluzioni si scrivono

$$X_n(x) = \sin(\omega_n x) = \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right), \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Sostituendo nella seconda delle (4) uno dei valori ottenuti per k , abbiamo l'equazione

$$T''(t) + \lambda_n^2 T(t) = 0, \quad \lambda_n := \frac{cn\pi}{L} = c\omega_n,$$

che ammette la soluzione generale

$$T_n(t) = A_n \cos(\lambda_n t) + B_n \sin(\lambda_n t).$$

In definitiva le funzioni

$$u_n(x, t) := X_n(x) T_n(t) = (A_n \cos(\lambda_n t) + B_n \sin(\lambda_n t)) \sin(\omega_n x), \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

sono soluzioni dell'equazione considerata e verificano le condizioni al contorno (2).

modo normale

Ogni funzione u_n rappresenta un moto armonico di frequenza $f_n = \lambda_n/(2\pi) = cn/(2L)$ cicli per unità di tempo; si tratta dell' n -esimo *modo normale* di vibrazione della corda. Per $n = 1$ abbiamo il *modo fondamentale* (o *primo armonico*), per $n > 2$ abbiamo gli *armonici superiori*, che corrispondono a frequenze multiple della frequenza fondamentale $f_1 = c/(2L)$.

L' n -esimo modo fondamentale presenta $n - 1$ *nodì*, cioè punti in cui $u_n(x, t) = 0$ per ogni t , e precisamente

$$x = \frac{kL}{n}, \quad k = 1, 2, \dots, n - 1.$$

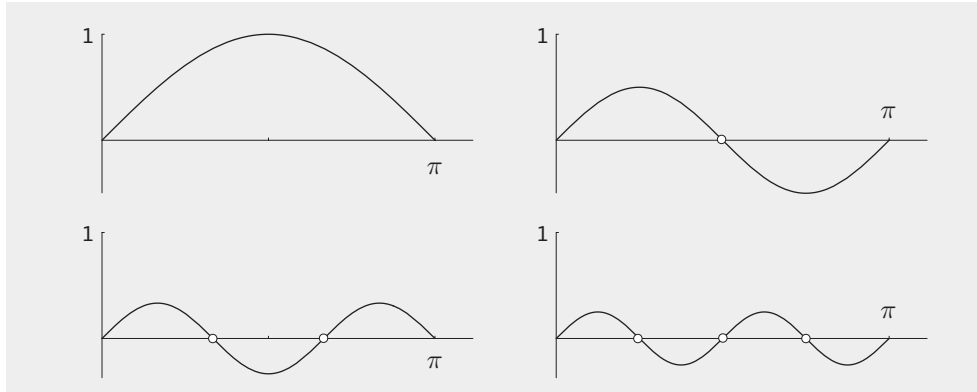


Figura 8.5-1. Per $n \geq 2$, l' n -esimo modo fondamentale presenta $n - 1$ nodi.

principio di sovrapposizione

Poiché l'equazione considerata è omogenea e le condizioni ai limiti sono omogenee, ogni somma di un numero finito di u_n verificherà la stessa equazione con le stesse condizioni. Per soddisfare le condizioni iniziali consideriamo una serie

$$u(x, t) = \sum_{n \geq 1} u_n(x, t) = \sum_{n \geq 1} (A_n \cos \lambda_n t + B_n \sin \lambda_n t) \sin(\omega_n x). \quad (5)$$

La prima condizione iniziale, $u(x, 0) = f(x)$, conduce all'uguaglianza

$$f(x) = \sum_{n \geq 1} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right);$$

dunque a secondo membro dobbiamo avere lo sviluppo di f in serie di Fourier di soli seni. Abbiamo già discusso questo problema nel paragrafo precedente (↑ figura 8.3-1 e formula (3)) e abbiamo visto che esso è risolto ponendo

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx, \quad n \in \mathbb{N}^*. \quad (6)$$

Se ora deriviamo formalmente termine a termine la serie (5) rispetto a t otteniamo

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \sum_{n \geq 1} (-A_n \lambda_n \sin \lambda_n t + B_n \lambda_n \cos \lambda_n t) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right),$$

quindi la seconda condizione iniziale conduce all'uguaglianza

$$g(x) = \sum_{n \geq 1} B_n \lambda_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right),$$

dunque

$$B_n \lambda_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx,$$

ed essendo $\lambda_n = cn\pi/L$,

$$B_n = \frac{2}{cn\pi} \int_0^L g(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx. \quad (7)$$

La serie (5), con i coefficienti A_n e B_n dati dalle (6) e (7) e $\lambda = cn\pi/L$, risolve il problema dato, sempre che la serie converga.

Esaminiamo ora un caso in cui è possibile esprimere in forma semplice la soluzione: quello in cui la velocità iniziale è nulla: $g(x) = 0$. Possiamo immaginare una corda che venga tesa, spostandola dalla sua condizione di riposo, e poi rilasciata senza imprimerle alcuna velocità iniziale. La serie (5) si riduce a velocità

$$u(x, t) = \sum_{n \geq 1} A_n \cos\left(\frac{cn\pi}{L}t\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

Ma

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)],$$

dunque

$$\cos\left(\frac{cn\pi}{L}t\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = \frac{1}{2} \left[\sin\left(\frac{n\pi}{L}(x - ct)\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{L}(x + ct)\right) \right],$$

e finalmente

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}(x - ct)\right) + \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}(x + ct)\right).$$

Ma

$$f(x) = \sum_{n \geq 1} A_n \sin \frac{n\pi}{L} x,$$

dove la serie a secondo membro ha come somma sull'intervallo $[-L, L]$ il prolungamento di f "per disparità" (\uparrow figura 8.3-1) e su tutto \mathbb{R} il prolungamento periodico di tale funzione di periodo $2L$. Sia f^* tale funzione periodica su \mathbb{R} . In definitiva

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [f^*(x - ct) + f^*(x + ct)]. \quad (8)$$

Il grafico della funzione $x \mapsto f^*(x - ct)$ si ottiene da quello della funzione $x \mapsto f^*(x)$ mediante una traslazione "a destra" della quantità ct , mentre il grafico della funzione $x \mapsto f^*(x + ct)$ si ottiene mediante una traslazione "a sinistra" della stessa quantità.

Dunque la prima funzione rappresenta un'onda che trasla verso destra, mentre la seconda rappresenta un'onda che trasla verso sinistra. Nel CD allegato al volume viene mostrata un'animazione di quanto abbiamo appena detto.

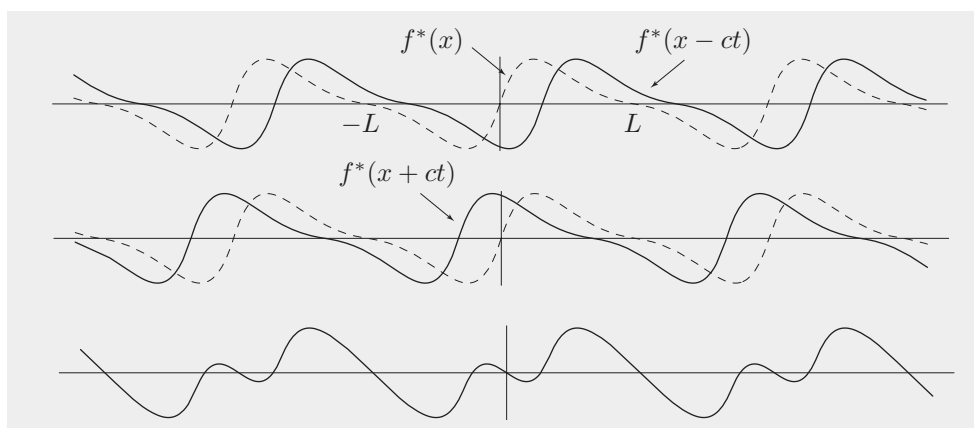


Figura 8.5-2. La funzione f^* , dispari e periodica di periodo $2L$, viene traslata verso destra e verso sinistra della quantità ct ; in basso è rappresentata la semisomma delle due funzioni traslate.

il metodo di
d'Alembert

La soluzione ottenuta era già nota a J. D'Alembert (1717-1783). Il ragionamento si svolge secondo le seguenti linee. Introduciamo due nuove variabili, siano

$$v := x + ct, \quad z := x - ct.$$

D'ora in poi, per alleggerire le notazioni, indichiamo le derivate parziali mediante indici discendenti. Con un lieve abuso di notazioni, indichiamo ancora con la lettera u la funzione incognita in quanto funzione di v e z . Ora $v_x = z_x = 1$ e successivamente

$$\begin{aligned} u_x &= u_v v_x + u_z z_x = u_v + u_z, \\ u_{xx} &= (u_v + u_z)_x = (u_v + u_z)_v v_x + (u_v + u_z)_z z_x = \\ &= (u_v + u_z)_v + (u_v + u_z)_z = u_{vv} + 2u_{vz} + u_{zz}. \end{aligned}$$

Abbiamo supposto la funzione u abbastanza regolare perchè si abbia $u_{vz} = u_{zv}$. In modo del tutto analogo si trova

$$u_{tt} = c^2 (u_{vv} - 2u_{vz} + u_{zz}).$$

Sostituendo nell'equazione (1) si trova

$$u_{vz} = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial v} = 0. \quad (9)$$

La cosa interessante è che quest'ultima equazione può essere risolta mediante due integrazioni: infatti integrando rispetto a z troviamo

$$\frac{\partial u}{\partial v} = h(v),$$

dove h è un'arbitraria funzione di v , e successivamente integrando rispetto a v abbiamo

$$u = \int h(v) dv + \psi(z),$$

dove ψ è un'arbitraria funzione di z . D'altra parte l'integrale appena scritto è funzione di v , sia $\phi(v)$, per cui $u = \phi(v) + \psi(z)$, cioè, in virtù delle posizioni fatte,

$$u(x, y) = \phi(x + ct) + \psi(x - ct). \quad (10)$$

Determiniamo ϕ e ψ in base alle condizioni iniziali $u(x, 0) = f(x)$, $u_t(x, 0) = 0$. Derivando la (10) abbiamo

$$u_t(x, t) = c\phi'(x + ct) - c\psi'(x - ct),$$

quindi le condizioni iniziali diventano

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \phi(x) + \psi(x) = f(x), \\ u_t(x, 0) &= c\phi'(x) - c\psi'(x) = 0. \end{aligned}$$

Dall'ultima equazione deduciamo $\phi'(x) - \psi'(x) = 0$, quindi $\psi(x) = \phi(x) + k$. Da tale uguaglianza e dalla prima condizione deduciamo $2\phi(x) + k = f(x)$, cioè $\phi(x) = [f(x) - k]/2$. Con questa scelta delle funzioni ϕ e ψ la soluzione (10) diventa

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x - ct) + f(x + ct)],$$

dunque si ritrova la (8) a patto d'intendere la f prolungata su tutto \mathbb{R} nel modo a suo tempo specificato.

Se la velocità iniziale non è nulla si trova la soluzione

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x - ct) + f(x + ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds;$$

lasciamo al lettore la verifica della condizione $u_t(x, 0) = g(x)$.

8.6. Il metodo delle serie di potenze

In vista dello studio delle funzioni di Bessel, che occuperà i prossimi due paragrafi, vogliamo introdurre alcuni elementi del cosiddetto *metodo delle serie di potenze* per risolvere equazioni differenziali ordinarie. Questo metodo è spesso efficace per la soluzione di equazioni differenziali lineari i cui coefficienti sono funzioni razionali, intere o fratte.

Nella sua forma più semplice tale metodo consiste nel cercare una soluzione di un'equazione data, sotto forma di serie di potenze

$$y(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots; \quad (1)$$

si sostituisce la serie scritta (e le serie ottenute da essa mediante derivazione termine a termine) nell'equazione data, ottenendo complessivamente una serie di potenze la cui somma deve essere 0. Uguagliando a 0 i coefficienti di x^n , per $n = 0, 1, 2, \dots$, si possono calcolare i coefficienti a_n che compaiono nella (1).

Mostriamo alcuni semplici esempi, in cui ritroviamo, col metodo indicato, risultati ben noti.

Esempio 8.6-1. Consideriamo l'equazione differenziale $y' = y$. Sostituendo la (1) essa si traduce nell'uguaglianza

$$\sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1} = \sum_{n \geq 0} a_n x^n;$$

poiché la somma a primo membro, cambiando $n-1$ in n , si scrive $\sum_{n \geq 0} (n+1) a_{n+1} x^n$, abbiamo

$$\sum_{n \geq 0} (n+1) a_{n+1} x^n = \sum_{n \geq 0} a_n x^n \iff \sum_{n \geq 0} [(n+1) a_{n+1} - a_n] x^n = 0,$$

da cui

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n+1) a_{n+1} - a_n = 0 \iff a_{n+1} = \frac{a_n}{n+1}.$$

Dunque

$$a_1 = \frac{a_0}{1}, \quad a_2 = \frac{a_1}{2} = \frac{a_0}{1 \cdot 2}, \quad a_3 = \frac{a_2}{3} = \frac{a_0}{1 \cdot 2 \cdot 3},$$

e, in generale, $a_n = a_0/n!$. Si ritrova dunque la serie esponenziale

$$y(x) = a_0 \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!} = a_0 e^x.$$

Il coefficiente a_0 può essere individuato mediante una condizione iniziale; ad esempio imponendo la condizione $y(0) = 1$ si ottiene $a_0 = 1$, dunque $y(x) = e^x$.

Esempio 8.6-2. Consideriamo l'equazione differenziale $y'' + y = 0$, unitamente alle condizioni iniziali $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$; vogliamo ritrovare col metodo delle potenze la soluzione $y(x) = \sin x$. Derivando due volte la (1) abbiamo

$$y''(x) = \sum_{n \geq 2} n(n-1) a_n x^{n-2},$$

serie che si può anche scrivere (ponendo $n+2$ al posto di n) $\sum_{n \geq 0} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n$. In definitiva si ha

$$\sum_{n \geq 0} [(n+2)(n+1) a_{n+2} + a_n] x^n = 0,$$

da cui

$$\forall n \in \mathbb{N}, [(n+2)(n+1) a_{n+2} + a_n] = 0 \iff a_{n+2} = -\frac{a_n}{(n+2)(n+1)}.$$

Dalla condizione $y(0) = a_0 = 0$, deduciamo che tutti i coefficienti di indice pari sono nulli: $a_{2n} = 0$. Quanto a quelli di indice dispari, abbiamo, sfruttando l'altra condizione $y'(0) = a_1 = 1$,

$$a_3 = -\frac{1}{3 \cdot 2}, \quad a_5 = -\frac{a_3}{5 \cdot 4} = \frac{1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2},$$

e, in generale,

$$a_{2n+1} = (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}.$$

Abbiamo dunque ritrovato lo sviluppo in serie di Taylor della funzione seno

$$y(x) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin x.$$

Lasciamo al lettore il compito di mostrare che la stessa equazione differenziale, unitamente alle condizioni iniziali $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, ci avrebbe condotto allo sviluppo in serie del coseno. $\triangleleft \square$

In alcuni casi i coefficienti dell'equazione in esame sono singolari per $x = 0$, dunque non è possibile cercare una soluzione sotto forma di serie di potenze (1). Può allora essere utile cercare una soluzione del tipo

$$y(x) = x^\sigma \sum_{n \geq 0} a_n x^n, \quad (2)$$

dove σ è una costante reale (non necessariamente positiva) da scegliersi caso per caso.

Esempio 8.6-3. Consideriamo, per $x > 0$, l'equazione

$$y'(x) + \frac{1}{x} y(x) = 0.$$

Il metodo standard per la soluzione di equazioni lineari del primo ordine fornisce subito $y(x) = c/x$, dove la costante c può essere interpretata come il valore della y per $x = 1$.

Si è condotti a studiare l'equazione scritta quando si voglia determinare una funzione armonica nelle variabili x e y , che dipenda soltanto da $r := \sqrt{x^2 + y^2}$. Poiché il laplaciano in coordinate polari si scrive (\downarrow Appendice 8.A)

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi} + u_r \frac{1}{r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2},$$

$u = u(r)$ è armonica se (e solo se)

$$u_{rr} + \frac{1}{r} u_r = 0,$$

dunque $v(r) := u_r(r)$ è soluzione dell'equazione $v'(r) + (1/r)v(r) = 0$, che è esattamente l'equazione considerata, a parte i simboli.

Cerchiamo una soluzione dell'equazione posta nella forma

$$y(x) = \frac{1}{x} \sum_{n \geq 0} a_n x^n. \quad (3)$$

Si trova

$$y'(x) = -\frac{1}{x^2} \sum_{n \geq 0} a_n x^n + \frac{1}{x} \sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1};$$

sostituendo nell'equazione data, scritta nella forma $xy'(x) + y(x) = 0$, si ottiene

$$-\frac{1}{x} \sum_{n \geq 0} a_n x^n + \sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1} + \frac{1}{x} \sum_{n \geq 0} a_n x^n = 0,$$

cioè $\sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1} = 0$, da cui $\forall n \geq 1, n a_n = 0$, e finalmente $\forall n \geq 1, a_n = 0$, mentre a_0 resta indeterminato. In conclusione, la soluzione è $y(x) = a_0/x$.

Esempio 8.6-4. Modifichiamo l'esempio precedente, considerando l'equazione

$$y'(x) + \frac{2}{x} y(x) = 0.$$

Si è condotti a studiare l'equazione scritta quando si voglia determinare una funzione armonica nelle variabili x, y, z , che dipenda soltanto da $r := \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ (\downarrow Appendice 8.B). Se si cerca una soluzione di tale equazione nella forma (3) si perviene all'uguaglianza

$$-\frac{1}{x} \sum_{n \geq 0} a_n x^n + \sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1} + \frac{2}{x} \sum_{n \geq 0} a_n x^n = 0,$$

cioè, moltiplicando entrambi i membri per x ,

$$\sum_{n \geq 0} a_n x^n + \sum_{n \geq 0} n a_n x^n = \sum_{n \geq 0} (n+1) a_n x^n = 0$$

e, in definitiva, $(n+1) a_n = 0$ per ogni naturale n , cioè $a_n = 0$. Pertanto l'unica soluzione dell'equazione allo studio che si possa scrivere nella forma (3) è la soluzione nulla, priva di interesse.

Cerchiamo dunque una soluzione nella forma

$$y(x) = x^\sigma \sum_{n \geq 0} a_n x^n, \quad (4)$$

riservandoci di scegliere opportunamente il parametro σ . Abbiamo

$$y'(x) = \sigma x^{\sigma-1} \sum_{n \geq 0} a_n x^n + x^\sigma \sum_{n \geq 0} n a_n x^{n-1},$$

da cui sostituendo nell'equazione data, scritta nella forma equivalente $xy' + 2y = 0$, si ottiene

$$\sigma x^\sigma \sum_{n \geq 0} a_n x^n + x^\sigma \sum_{n \geq 0} n a_n x^n + 2x^\sigma \sum_{n \geq 0} a_n x^n = 0.$$

Dividendo entrambi i membri per x^σ , si ottiene

$$\sum_{n \geq 0} (\sigma + n + 2) a_n x^n = 0.$$

Scegliendo $\sigma = -2$, si ottiene la condizione $n a_n = 0$, da cui segue $a_n = 0$ per ogni $n > 0$, mentre a_0 resta indeterminato. In conclusione: l'unica soluzione che possa essere scritta nella forma (4) è $y(x) = a_0/x^2$.

Esempio 8.6-5. Riprendiamo in esame l'equazione differenziale di Legendre (\uparrow Proposizione 8.2-2)

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \lambda y = 0.$$

Vogliamo ritrovare i polinomi di Legendre come casi particolari di serie di potenze $y(x) = \sum_{k \geq 0} a_k x^k$. Sostituendo nell'equazione scritta si ottiene

$$\sum_{k \geq 0} k(k-1) a_k x^{k-2} - \sum_{k \geq 0} k(k-1) a_k x^k - 2 \sum_{k \geq 0} k a_k x^k + \lambda \sum_{k \geq 0} a_k x^k.$$

La prima serie si può scrivere $\sum_{k \geq 0} (k+1)(k+2) a_{k+2} x^k$, quindi si ha

$$\begin{aligned} & \sum_{k \geq 0} [(k+1)(k+2) a_{k+2} - (k(k-1) + 2k - \lambda) a_k] x^k = \\ & = \sum_{k \geq 0} [(k+1)(k+2) a_{k+2} - (k(k+1) - \lambda) a_k] x^k = 0. \end{aligned}$$

Poniamo ora $\lambda = n(n+1)$, $n \in \mathbb{N}$, in base a quanto sappiamo dalla Proposizione 8.2-2. Allora

$$\begin{aligned} k(k+1) - \lambda &= k(k+1) - n(n+1) = k^2 + k - n^2 - n = \\ &= (k-n)(k+n) + k - n = (k-n)(k+n+1). \end{aligned}$$

Uguagliando a 0 il coefficiente di x^k abbiamo la formula

$$\forall k \in \mathbb{N}, a_{k+2} = \frac{(k-n)(k+n+1)}{(k+1)(k+2)} a_k. \quad (5)$$

La (5) ammette notevoli conseguenze. Se n è pari, possiamo scegliere $a_0 \neq 0$, $a_1 = 0$; la (5) implica allora che tutti i coefficienti a_k di indice dispari sono nulli, mentre tutti quelli di indice pari sono nulli a partire da a_{n+2} . Stesse considerazioni se n è dispari, scambiando i ruoli di a_0 e a_1 . Dunque con le scelte proposte la serie si riduce ad un polinomio di grado n ; tale polinomio, a meno di un coefficiente di proporzionalità, deve coincidere con il polinomio di Legendre P_n .

Ad esempio, per $n = 4$, la (5) porge

$$a_2 = -\frac{4 \cdot 5}{2} a_0 = -10 a_0, \quad a_4 = -\frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 4} a_2 = -\frac{7}{6} a_2 = \frac{35}{4} a_0,$$

quindi si ottiene il polinomio

$$\left(\frac{35}{4} x^2 - 10x + 1 \right) a_0,$$

che coincide col polinomio P_4 fornito dalla Tabella 8.1-1, ove si scelga $a_0 = 3/8$.

Poiché conosciamo il coefficiente direttivo del polinomio di Legendre P_n (vedi formula (3) del precedente paragrafo), possiamo scrivere la (5) nella forma

$$a_k = \frac{(k+1)(k+2)}{(k-n)(k+n+1)} a_{k+2},$$

che ci consente di dedurre i coefficienti di indici inferiori ad n a partire dal coefficiente direttivo. Poiché siamo interessati ai valori di k aventi la stessa parità di n , possiamo porre $k = n - 2h$, ottenendo la formula

$$a_{n-2h} = -\frac{(n-2h+1)(n-2h+2)}{2h(2n-2h+1)} a_{n-2(h-1)}. \quad (5')$$

In definitiva possiamo scrivere uno schema ricorsivo per il calcolo dei coefficienti del polinomio di Legendre P_n a partire dal coefficiente direttivo:

$$\begin{aligned} a_n &:= \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}, \\ a_{n-2h} &:= -\frac{(n-2h+1)(n-2h+2)}{2h(2n-2h+1)} a_{n-2(h-1)}, \quad h = 1, 2, \dots, \lfloor n/2 \rfloor, \end{aligned}$$

dove $\lfloor n/2 \rfloor$ indica la parte intera di $n/2$.

Esercizi

8.6-1. I polinomi di Čebyšev sono autofunzioni dell'equazione differenziale

$$(1-x^2)y'' - xy' + \lambda y = 0,$$

e più precisamente T_n corrisponde all'autovalore $\lambda_n = n^2$. Procedendo come nell'esempio 8.6-5, si utilizzi il metodo delle serie di potenze per dedurre la formula

$$a_{k+2} = -\frac{n^2 - k^2}{(k+1)(k+2)} a_k$$

per il calcolo dei coefficienti di T_n . Sapendo che il termine direttivo di T_n vale 2^{n-1} , ponendo $k = n - 2h$ si ottenga il seguente schema

$$a_n := 2^{n-1},$$

$$a_{n-2h} := -\frac{(n-2h+1)(n-2h+2)}{4h(n-h)} a_{n-2(h-1)}, \quad h = 1, 2, \dots, \lfloor n/2 \rfloor.$$

8.6-2. I polinomi di Laguerre sono autofunzioni dell'equazione differenziale

$$x y'' + (1-x) y' + \lambda y = 0,$$

e più precisamente L_n corrisponde all'autovalore $\lambda_n = n$. Utilizzando il metodo delle serie potenze si deduca la formula

$$a_{k+1} = -\frac{n-k}{(k+1)^2} a_k,$$

che, unita alla condizione iniziale $a_0 = 1$, consente il calcolo ricorsivo dei coefficienti di L_n .

8.6-3. I polinomi di Hermite sono autofunzioni dell'equazione differenziale

$$y'' - 2x y' + \lambda y = 0,$$

e più precisamente H_n corrisponde all'autovalore $\lambda_n = 2n$. Procedendo come nei precedenti esercizi, si ottenga la formula

$$a_{k+2} = -\frac{2(n-k)}{(k+1)(k+2)} a_k.$$

Si ponga poi $k = n - 2h$, e si scriva uno schema ricorsivo che consenta il calcolo dei coefficienti del polinomio H_n a partire dal coefficiente direttivo $d_n = 2^n$.

8.7. Le funzioni di Bessel

Supponiamo di voler determinare soluzioni non nulle per l'equazione $\Delta u + k^2 u = 0$ all'interno di un cerchio; in dimensione tre questo cerchio può essere considerato come la sezione di un cilindro circolare retto. In una tale situazione è naturale utilizzare coordinate polari r, ϕ , rispetto alle quali (\downarrow Appendice 8-A) l'equazione scritta diventa

$$u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\phi\phi} + k^2 u = 0. \quad (1)$$

Utilizziamo il metodo di separazione delle variabili, cioè cerchiamo soluzioni della (1) sotto forma di prodotto di una funzione della sola r per una funzione della sola ϕ : $u(r, \phi) = R(r) \Phi(\phi)$. Riscrivendo la (1) nella forma

$$r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\phi\phi} + k^2 r^2 u = 0, \quad (1')$$

e sostituendo l'espressione $u = R \Phi$, si ottiene

$$r^2 R''(r) \Phi(\phi) + r R'(r) \Phi(\phi) + R(r) \Phi''(\phi) + k^2 r^2 R(r) \Phi(\phi) = 0,$$

e finalmente, dividendo per $R \Phi$ e separando le variabili,

$$\frac{r R''(r) + r R'(r) + k^2 r^2 R(r)}{R(r)} = -\frac{\Phi''(\phi)}{\Phi(\phi)}. \quad (2)$$

L'uguaglianza scritta è possibile solo se i due membri sono uguali ad una costante, sia μ ; dunque il secondo membro della (2), uguagliato a μ , diventa

$$\Phi'' + \mu \Phi = 0. \quad (2')$$

La natura del problema richiede che Φ sia una funzione periodica di periodo 2π . Ora l'equazione scritta non ha soluzioni periodiche se $\mu \leq 0$, ha le soluzioni linearmente indipendenti $\cos(\sqrt{\mu} \phi)$ e $\sin(\sqrt{\mu} \phi)$ se $\mu > 0$, funzioni periodiche di periodo $2\pi/\sqrt{\mu}$ (\uparrow esempio 8.1-1).

Dunque la (2') ammette soluzioni periodiche di periodo 2π se e solo se $\mu = n^2$, con n naturale > 0 .

Se dunque $\mu = n^2$, il primo membro della (2), uguagliato a n^2 , fornisce l'equazione

$$r^2 R''(r) + r R'(r) + (k^2 r^2 - n^2) R(r) = 0, \quad n \in \mathbb{N}^*. \quad (2'')$$

equazione di Bessel

Poniamo $x := kr \iff r = x/k$, e scriviamo $y(x) := R(r) = R(x/k)$; poiché

$$y'(x) = R'(x/k) \cdot (1/k), \quad y''(x) = R''(x/k) \cdot (1/k^2),$$

si ottiene finalmente l'equazione di Bessel di ordine n :

$$x^2 y''(x) + x y'(x) + (x^2 - n^2) y(x) = 0 \iff y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) y = 0. \quad (3)$$

Per $n = 0$ si ottiene l'equazione di Bessel di ordine 0

$$x^2 y''(x) + x y'(x) + x^2 y(x) = 0 \iff y'' + \frac{1}{x} y' + y = 0,$$

che corrisponde al caso in cui si cerchi una soluzione dell'equazione (1) dotata di simmetria assiale, cioè una soluzione dipendente dalla sola r .

Considereremo in generale l'equazione di Bessel di ordine ν , cioè

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - \nu^2) y = 0, \quad (4)$$

soluzione per serie

con ν reale non negativo. Cercheremo soluzioni non nulle di tale equazione sotto forma di serie di potenze in forma generalizzata, cioè

$$y(x) = x^\sigma (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots), \quad (5)$$

dove l'esponente σ e i coefficienti a_k sono da determinare.

Derivando termine a termine la serie scritta si ottiene

$$\begin{aligned} y'(x) &= \sigma x^{\sigma-1} \sum_{k \geq 0} a_k x^k + x^\sigma \sum_{k \geq 0} k a_k x^{k-1} = \\ &= x^\sigma \sum_{k \geq 0} (\sigma + k) a_k x^{k-1} \\ y''(x) &= \sigma x^{\sigma-1} \sum_{k \geq 0} (\sigma + k) a_k x^{k-1} + x^\sigma \sum_{k \geq 0} (\sigma + k)(k-1) a_k x^{k-2} = \\ &= x^\sigma \sum_{k \geq 0} (\sigma + k)(\sigma + k - 1) a_k x^{k-2}. \end{aligned}$$

Sostituendo nell'equazione (4) e uguagliando a 0 i coefficienti di x^σ , $x^{\sigma+1}$, $x^{\sigma+k}$, con $k \geq 2$, otteniamo

$$\begin{cases} a_0(\sigma^2 - \nu^2) = 0, \\ a_1[(\sigma + 1)^2 - \nu^2] = 0, \\ a_k[(\sigma + k)^2 - \nu^2] + a_{k-2} = 0, \quad k = 2, 3, \dots \end{cases} \quad (6)$$

Potendo supporre $a_0 \neq 0$, la prima delle (6) implica che

$$\sigma^2 = \nu^2 \implies \sigma = \pm \nu. \quad (7)$$

Questa condizione, combinata con la seconda della (6), fornisce $a_1 = 0$. La k -esima uguaglianza (6), con $k \geq 2$, si scrive anche

$$(\sigma + k + \nu)(\sigma + k - \nu) a_k + a_{k-2} = 0.$$

Supponiamo, per ora, che ν non sia un intero. Dall'ultima uguaglianza deduciamo la formula ricorsiva

$$a_k = -\frac{a_{k-2}}{(\sigma + k + \nu)(\sigma + k - \nu)}. \quad (8)$$

Combinando tale relazione con l'uguaglianza $a_1 = 0$, si ha che tutti i coefficienti di indice dispari della serie (5) sono nulli.

Esaminiamo il caso $\sigma = \nu$. Per i coefficienti di indice k pari, sia $k = 2h$, si ha

$$a_{2h} = -\frac{a_{2h-2}}{2^2 h(h+\nu)},$$

o anche, scrivendo nuovamente k al posto di h ,

$$a_{2k} = -\frac{a_{2(k-1)}}{2^2 k(k+\nu)}. \quad (8')$$

Dunque

$$a_2 = -\frac{a_0}{2^2 \cdot 1 \cdot (\nu+1)},$$

$$a_4 = -\frac{a_2}{2^2 \cdot 2 \cdot (\nu+2)} = \frac{a_0}{(2^2)^2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot (\nu+1)(\nu+2)};$$

in generale, applicando k volte la (8'), possiamo esprimere a_{2k} in funzione di a_0 :

$$a_{2k} = (-1)^k \frac{a_0}{2^{2k} \cdot k! (\nu+1)(\nu+2) \dots (\nu+k)}. \quad (9)$$

Può essere utile a questo punto utilizzare la funzione gamma di Eulero (↑ par. 5.3). Ricordiamo che $k! = \Gamma(k+1)$; si ha poi, per ogni s non intero,

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s) = s(s-1)\Gamma(s-1) = \dots = s(s-1) \dots (s-n)\Gamma(s-n).$$

Utilizzando questa formula per $s = \nu+k$ e $n = k-1$ (dunque $s-n = \nu+1$), possiamo scrivere il prodotto a denominatore della formula (9) come

$$(\nu+1)(\nu+2) \dots (\nu+k) = \Gamma(\nu+k+1)/\Gamma(\nu+1)$$

e dunque la (9) stessa come

$$a_{2k} = (-1)^k \frac{a_0 \Gamma(\nu+1)}{2^{2k} \cdot \Gamma(k+1) \Gamma(\nu+k+1)}. \quad (9')$$

A questo punto abbiamo ancora a nostra disposizione la scelta di a_0 ; scegliendo

$$a_0 := \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)}, \quad (10)$$

abbiamo

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k}{2^{2k+\nu} \cdot \Gamma(k+1) \Gamma(\nu+k+1)}. \quad (9'')$$

e sostituendo nella serie (5) abbiamo la *funzione di Bessel di prima specie e ordine ν* : funzioni di Bessel

$$J_\nu(x) := \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1) \Gamma(\nu+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}. \quad (11)$$

Il caso $\sigma = -\nu$, sempre con $\nu \geq 0$ e non intero, si tratta allo stesso modo, semplicemente scrivendo $-\nu$ al posto di ν :

$$J_{-\nu}(x) := \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1) \Gamma(-\nu+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu}. \quad (12)$$

Le funzioni appena considerate si scrivono anche

$$J_{\pm\nu}(x) := \left(\frac{x}{2}\right)^{\pm\nu} \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1) \Gamma(k \pm \nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}; \quad (12')$$

il comportamento asintotico della funzione Γ assicura che l'ultima serie scritta è totalmente convergente su ogni intervallo della retta reale.

Si osservi che le due funzioni $J_\nu(x)$ e $J_{-\nu}(x)$ sono tra loro linearmente indipendenti, cioè non proporzionali: basta osservare che la prima s'annulla nell'origine mentre la seconda tende all'infinito. Dunque ogni soluzione dell'equazione di Bessel si scrive nella forma $c_1 J_\nu(x) + c_2 J_{-\nu}(x)$; se si cerca una soluzione limitata in un intorno dell'origine, allora necessariamente $c_2 = 0$.

Particolarmente semplice risulta l'espressione delle funzioni $J_{\pm 1/2}(x)$: si trova infatti (i dettagli sono contenuti negli esercizi al termine del paragrafo):

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x,$$

$$J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x.$$

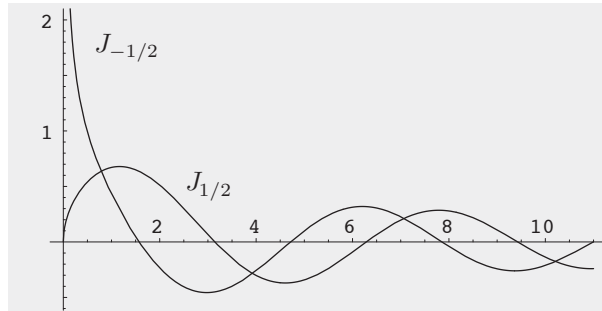


Figura 8.7-1.
Grafici (non monometrici)
delle funzioni $J_{1/2}(x)$
e $J_{-1/2}(x)$.

Fino a questo punto abbiamo supposto che ν non sia intero. Se ν è un numero naturale, $\nu = n$, la formula (11) non pone alcun problema:

$$J_n(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(n+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n} = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}. \quad (11')$$

Ad esempio, per $n = 0$ e $n = 1$ abbiamo

$$J_0(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} = 1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{(2!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^4 - \frac{1}{(3!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^6 + \dots,$$

$$J_1(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{k!(k+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1} = \frac{x}{2} - \frac{1}{2!} \left(\frac{x}{2}\right)^3 + \frac{1}{2!3!} \left(\frac{x}{2}\right)^5 + \dots;$$

mediante derivazione termine a termine non è difficile riconoscere che $J'_0(x) = -J_1(x)$.

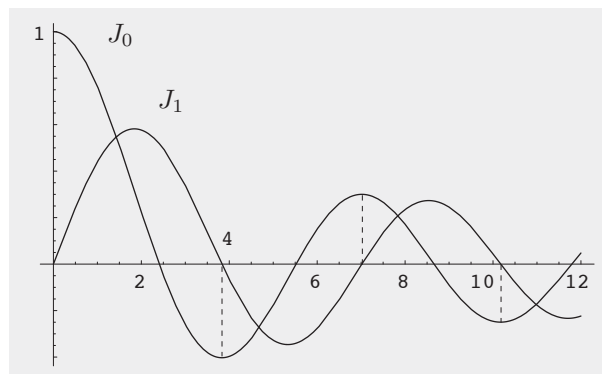


Figura 8.7-2.
Grafici (non monometrici)
delle funzioni $J_0(x)$ e
 $J_1(x)$; gli zeri di J_1 sono
punti di massimo o di
minimo di J_0 .

Al contrario, se ν è un intero negativo, a denominatore della (12) compare la Γ calcolata in punti interi ≤ 0 , in cui sappiamo che essa presenta poli semplici (\uparrow figura 5.3-2). Possiamo interpretare la stessa formula nel senso che sono nulli i termini in cui compare a denominatore la Γ calcolata in uno dei suoi poli, dunque la (12) diventa

$$\begin{aligned}
 J_{-n}(x) &= \sum_{k \geq n} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(-n+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n} = \quad (h := k - n) \\
 &= \sum_{h \geq 0} \frac{(-1)^{h+n}}{\Gamma(h+1)\Gamma(n+h+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2h+n} = (-1)^n J_n(x).
 \end{aligned}
 \tag{12'}$$

Dunque le funzioni $J_n(x)$ e $J_{-n}(x)$ sono linearmente dipendenti. Ci occuperemo più oltre della determinazione di una soluzione dell'equazione di Bessel indipendente da $J_n(x)$.

Dimostriamo ora due formule ricorrenti che legano le funzioni di Bessel e le loro derivate: formule ricorrenti

$$\begin{aligned}
 x J'_\nu(x) &= \nu J_\nu(x) - x J_{\nu+1}(x), \\
 x J'_\nu(x) &= -\nu J_\nu(x) + x J_{\nu-1}(x),
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

che si possono scrivere anche, sottraendo e sommando le uguaglianze precedenti,

$$\begin{aligned}
 2\nu J_\nu(x) &= x J_{\nu+1}(x) + x J_{\nu-1}(x), \\
 2 J'_\nu(x) &= J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) \iff J'_\nu(x) = \frac{1}{2}[J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x)].
 \end{aligned}
 \tag{13'}$$

Le (13), per $\nu = 0$, forniscono nuovamente la relazione $J'_0(x) = -J_1(x)$; lo stesso vale per la seconda delle (13'), in quanto $J_{-1}(x) = -J_1(x)$.

La prima delle formule (13') consente di determinare ricorsivamente tutte le funzioni di Bessel di ordine intero a partire da J_0 e J_1 . Sempre la stessa relazione ci consente di calcolare $J_{3/2}$ a partire da $J_{-1/2}$ e $J_{1/2}$: si trova

$$J_{3/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\frac{\sin x}{x} - \cos x \right);$$

così proseguendo si possono determinare tutte le funzioni di Bessel di ordine semi-intero, cioè $J_{n+1/2}$, $n \in \mathbb{N}$.

La seconda delle formule (13') consente poi di calcolare le derivate prime di tali funzioni, e derivandola essa consente il calcolo delle derivate seconde a partire dalle derivate prime, ecc. (↓ esercizio 8.7-5).

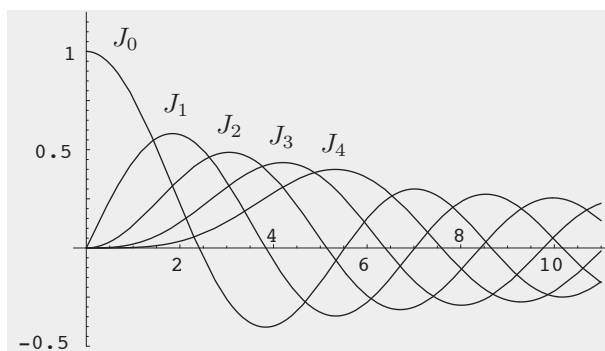


Figura 8.7-3.
Grafici (non monometrici) delle funzioni $J_0(x)$, $J_1(x)$, $J_2(x)$, $J_3(x)$, $J_4(x)$.

Per dimostrare la prima delle (13), deriviamo la (11):

$$J'_\nu(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(\nu + k + 1)} (2k + \nu) \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu-1} \frac{1}{2},$$

da cui, moltiplicando per x ,

$$x J'_\nu(x) = \nu J_\nu(x) + x \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k k}{k! \Gamma(\nu + k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu-1}.$$

Per riconoscere che l'ultima somma (nella quale possiamo tralasciare il termine corrispondente a $k = 0$ in quanto nullo) vale $-J_{\nu+1}(x)$, osserviamo che essa può scriversi

$$\begin{aligned} & \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^k k}{k! \Gamma(\nu + k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k + \nu - 1} = \\ &= - \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)! \Gamma(\nu + 1 + k - 1 + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2(k-1) + \nu + 1} = \quad (h := k - 1) \\ &= - \sum_{h \geq 0} \frac{(-1)^h}{h! \Gamma(\nu + 1 + h + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2h + \nu + 1} = -J_{\nu+1}(x). \end{aligned}$$

La seconda delle (13) si dimostra in modo analogo; la prima si può scrivere

$$x J'_\nu(x) - \nu J_\nu(x) = -x J_{\nu+1}(x),$$

e dividendo entrambi i membri per $x^{\nu+1}$,

$$x^{-\nu} J'_\nu(x) - \nu x^{-\nu-1} J_\nu(x) = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x).$$

In definitiva si ha

$$\left(\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}\right)' = -\frac{J_{\nu+1}(x)}{x^\nu},$$

formula che estende ai valori $\nu > 0$ la relazione $J'_0(x) = -J_1(x)$.

funzioni di Bessel
di seconda specie

Accanto alle funzioni di Bessel di prima specie J_ν , si considerano anche le funzioni di seconda specie Y_ν ; tali funzioni sono definite in modo che J_ν e Y_ν siano linearmente indipendenti anche in corrispondenza di valori interi degli indici. Si pone innanzitutto

$$Y_\nu(x) := \frac{\cos(\nu\pi) J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin \nu\pi}, \tag{14}$$

per $\nu \notin \mathbb{N}$. La funzione definita è ovviamente soluzione dell'equazione di Bessel, in quanto combinazione lineare di J_ν e $J_{-\nu}$, ed è linearmente indipendente da J_ν in quanto essa dipende anche da $J_{-\nu}$. La definizione posta cade in difetto per ν naturale; si definisce allora Y_n come limite di Y_ν per $\nu \rightarrow n$. Trattandosi di una forma indeterminata del tipo 0/0, troviamo, in base alla regola di L'Hospital,

$$\begin{aligned} Y_n(x) &= \lim_{\nu \rightarrow n} Y_\nu(x) = \\ &= \lim_{\nu \rightarrow n} \frac{-\pi \sin(\nu\pi) J_\nu(x) + \cos(\nu\pi) \frac{\partial J_\nu(x)}{\partial \nu} - \frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial \nu}}{\pi \cos(\nu\pi)} = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\partial J_\nu(x)}{\partial \nu} - (-1)^n \frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial \nu} \right] \Big|_{\nu=n}. \end{aligned}$$

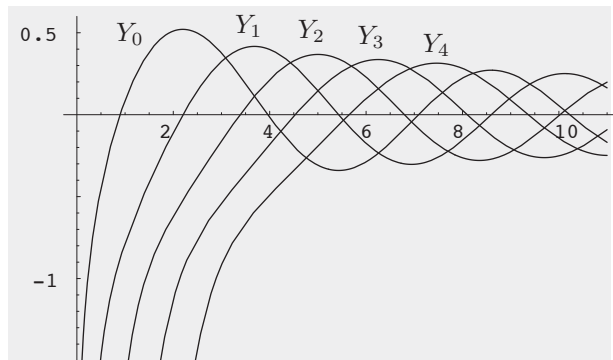


Figura 8.7-4.
Grafici (non monometrici) delle
funzioni di Bessel di seconda
specie $Y_0(x)$, $Y_1(x)$, $Y_2(x)$,
 $Y_3(x)$, $Y_4(x)$.

Nei moderni sistemi di calcolo algebrico (*Mathematica*, Maple, ecc.) le funzioni di Bessel, di prima e di seconda specie, sono direttamente implementate. Ad esempio nel sistema *Mathematica*, che è stato utilizzato per tracciare le figure di questo paragrafo, le funzioni di Bessel sono denominate `BesselJ[n, x]` e `BesselY[n, x]`.

Come si vede dai grafici mostrati, le funzioni di Bessel hanno carattere oscillatorio; ciascuna delle funzioni J_ν ammette una successione di zeri positivi e semplici, diciamo $\xi_{\nu,1}, \xi_{\nu,2}, \xi_{\nu,3}, \dots$, in corrispondenza di ciascuno dei quali essa cambia segno. Riesamineremo la questione nell'Appendice D al termine del capitolo.

Tranne casi particolari, come le funzioni $J_{1/2}$ e $J_{-1/2}$, tali zeri non sono equispaziati e devono essere determinati per via numerica. La Tabella 8.7-1 mostra i primi cinque zeri positivi delle funzioni J_0, J_1 e J_2 .

Tabella 8.7-1. ALCUNI ZERI DELLE FUNZIONI DI BESSEL

	J_0	J_1	J_2
$\xi_{\nu,1}$	2.408 825 ...	3.831 705 ...	5.135 622 ...
$\xi_{\nu,2}$	5.520 078 ...	7.015 586 ...	8.417 244 ...
$\xi_{\nu,3}$	8.653 727 ...	10.173 468 ...	11.619 841 ...
$\xi_{\nu,4}$	11.791 533 ...	13.323 689 ...	14.795 951 ...
$\xi_{\nu,5}$	14.930 917 ...	16.470 630 ...	17.959 819 ...

Per ogni ν , la funzione $x \mapsto J_\nu(\xi_{\nu,k} x)$, per $k \geq 1$, possiede k zeri nell'intervallo $(0, 1]$ (\downarrow Fig. 8.6-1). Le restrizioni delle funzioni $J_\nu(\xi_{\nu,k} x)$, $k = 1, 2, \dots$, all'intervallo $[0, 1]$ possiedono un'interessante proprietà di ortogonalità, di cui ci occuperemo nel paragrafo seguente (\downarrow Prop. 8.8-1).

Ricordiamo che si utilizzano anche altre combinazioni lineari delle funzioni di Bessel di prima e di seconda specie, ad esempio le *funzioni di Hankel* (dal nome del matematico tedesco H. Hankel, 1839-1873) di prima e di seconda specie, definite mediante le formule

$$H_\nu^{(1)}(x) := J_\nu(x) + i Y_\nu(x), \quad H_\nu^{(2)}(x) := J_\nu(x) - i Y_\nu(x).$$

Per ogni $\nu \geq 0$, le funzioni di Hankel di ordine ν e $-\nu$ sono soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione di Bessel.

Esercizi

8.7-1. Nella definizione delle funzioni di Bessel $J_{\pm\nu}(x)$ (v. formula (12')) compare la serie

$$\sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k \pm \nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}.$$

Scrivendo z al posto di $(x/2)^2$ si ottiene la serie di potenze $\sum_{k \geq 0} a_k z^k$ con

$$a_k = \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k \pm \nu + 1)}.$$

Sappiamo (v. pag. 136-137) che il limite per $k \rightarrow \infty$ del rapporto $|a_k|/|a_{k+1}|$ (se esiste) fornisce il raggio di convergenza della serie considerata. Dimostrare che tale limite è $+\infty$.

8.7-2. Mediante ripetuta applicazione della formula ricorsiva $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, assieme alla uguaglianza $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, verificare le uguaglianze

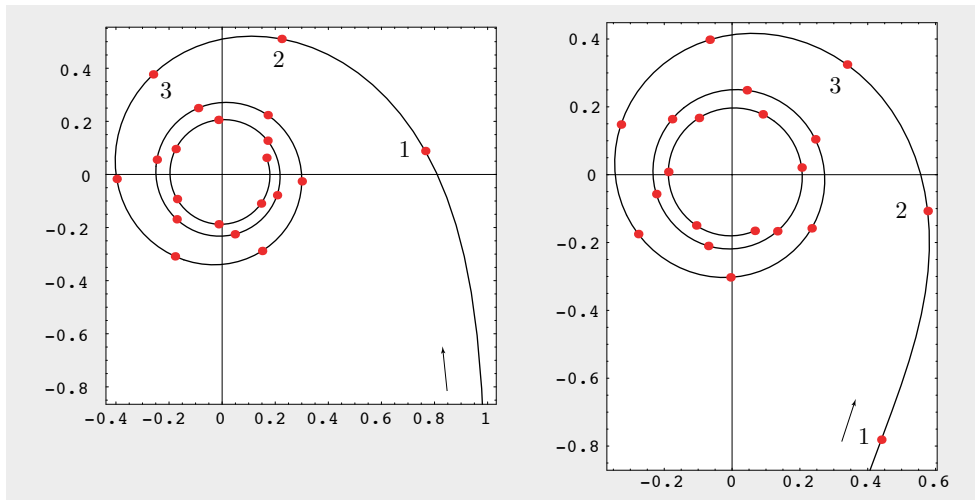


Figura 8.7-5. A sinistra: rappresentazione nel piano complesso della funzione $x \mapsto H_0^{(1)}(x)$, per $x \in [0.1, 20]$. I punti evidenziati sulla curva corrispondono a valori interi della x . A destra rappresentazione analoga per la funzione $x \mapsto H_1^{(1)}(x)$.

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \sqrt{\pi},$$

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \Gamma\left(1 + \frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(2 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1 \cdot 3}{2^2} \sqrt{\pi},$$

.....

$$\Gamma\left(\frac{2k+1}{2}\right) = \Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k-1)}{2^k} \sqrt{\pi}.$$

Utilizzando il simbolo $(2k-1)!! := 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k-1)$ (*semifattoriale* di $2k-1$) abbiamo dunque, per ogni naturale k ,

$$\Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2k-1)!!}{2^k} \sqrt{\pi}.$$

8.7-3. Ponendo $(2k)!! := 2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2k$, si verifichino le uguaglianze

$$(2k)!! = 2^k \cdot k!, \quad (2k)!! (2k+1)!! = (2k+1)!.$$

8.7-4. Utilizzando i risultati dei due precedenti esercizi, si riconosca che il termine k -esimo della serie che fornisce $J_{1/2}(x)$, cioè

$$\sqrt{\frac{x}{2}} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1) \Gamma(k+1+1/2)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k},$$

si scrive successivamente

$$\sqrt{\frac{x}{2}} \frac{(-1)^k \cdot 2^{k+1}}{k! \cdot (2k+1)!! \sqrt{\pi} \cdot 2^k \cdot 2^k} x^{2k} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1},$$

dunque $J_{1/2}(x) = \sqrt{2/(\pi x)} \sin x$. Fare il calcolo analogo per la funzione $J_{-1/2}(x)$.

8.7-5. Dalla definizione della funzione J_1 sappiamo che $J_1(x) \sim x/2$, per $x \rightarrow 0$. Si ritrovi lo stesso risultato in base alla seconda delle formule (13'): per $\nu = 1$ essa fornisce $2J_1'(x) = J_0(x) - J_2(x)$ da cui si ricavi $J_1'(0) = 1/2$ sapendo che $J_0(0) = 1$ e $J_2(0) = 0$ (\uparrow formule (11) e (12)).

8.7-6. Verificare direttamente la relazione $(x^{-\nu} J_\nu(x))' = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x)$ partendo dall'osservazione che si ha (v. formula (12'))

$$x^{-\nu} J_{\nu}(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\nu} \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k \pm \nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}.$$

8.8. Ulteriori proprietà delle funzioni di Bessel

Vogliamo ottenere ulteriori proprietà delle funzioni di Bessel di prima specie, utili nelle applicazioni. Premettiamo la seguente osservazione sul prodotto di due serie di Laurent. Siano

$$f(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k z^k, \quad g(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k z^k$$

due funzioni sviluppabili in serie di Laurent (\uparrow par. 4.7). La funzione $z \mapsto f(z)g(z)$ ammette lo sviluppo di Laurent

$$f(z)g(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n z^n,$$

dove

$$c_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k b_{n-k}. \quad (1)$$

Se entrambe le serie date si riducono a serie di Taylor (cioè $a_k = b_k = 0$ per $k < 0$), la formula (1) si semplifica nella $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ (\uparrow esercizio 4.4-2). Ci chiediamo come si scriva la (1) se la prima serie si riduce a una serie di Taylor, cioè $a_k = 0$ per $k < 0$, e nella seconda si ha $b_k = 0$ per $k > 0$, dunque si ha una situazione del tipo

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_k z^k + \dots, \quad g(z) = b_0 + \frac{b_{-1}}{z} + \frac{b_{-2}}{z^2} + \dots + \frac{b_{-k}}{z^k} + \dots$$

Se $n \geq 0$, dobbiamo eliminare nella (1) tutti i termini con $k < 0$, in quanto in corrispondenza di tali valori si annullano gli a_k , ed anche i termini con $0 \leq k < n$ perché si annullano i b_{n-k} . Dunque

$$c_n = \sum_{k \geq n} a_k b_{n-k} = \sum_{h \geq 0} a_{n+h} b_{-h}. \quad (1')$$

Abbiamo operato il cambiamento di indici $h := k - n \iff k = n + h$.

Se invece $n < 0$, dobbiamo eliminare dalla (1) soltanto i termini con $k < 0$, cioè

$$c_n = \sum_{k \geq 0} a_k b_{n-k}. \quad (1'')$$

La situazione appena descritta si presenta nel caso delle funzioni

$$e^{\frac{x}{2}z} = \sum_{k \geq 0} \left(\frac{x}{2}\right)^k \frac{z^k}{k!}, \quad e^{-\frac{x}{2z}} = \sum_{k \geq 0} \left(\frac{x}{2}\right)^k \frac{(-1)^k}{k! z^k},$$

con $x \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}^*$. La prima funzione è intera, la seconda ha una singolarità essenziale nell'origine. Si ha

$$a_k = \begin{cases} \left(\frac{x}{2}\right)^k \frac{1}{k!}, & \text{per } k \geq 0 \\ 0, & \text{altrimenti;} \end{cases} \quad b_{-k} = \begin{cases} \left(\frac{x}{2}\right)^k \frac{(-1)^k}{k!}, & \text{per } k \geq 0 \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Vogliamo calcolare lo sviluppo di Laurent del prodotto

$$e^{\frac{x}{2}z} e^{-\frac{x}{2z}} = e^{\frac{x}{2}(z - \frac{1}{z})}.$$

Per $n \geq 0$ abbiamo, in base alla (1'),

$$c_n = \sum_{h \geq 0} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+h} \frac{1}{(n+h)!} \left(\frac{x}{2}\right)^h \frac{(-1)^h}{h!} = \sum_{h \geq 0} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2h} \frac{(-1)^h}{h!(n+h)!} = J_n(x),$$

come subito si riconosce confrontando con la (11'). Per $n < 0$, sia $n = -m$, con $m > 0$, si ha poi, in base alla (1''),

$$\begin{aligned} c_{-m} &= \sum_{k \geq 0} a_k b_{-m-k} = \sum_{k \geq 0} \left(\frac{x}{2}\right)^k \frac{1}{k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{m+k} \frac{(-1)^{m+k}}{(m+k)!} = \\ &= (-1)^m \sum_{k \geq 0} \left(\frac{x}{2}\right)^{m+2k} \frac{(-1)^k}{k!(m+k)!} = (-1)^m J_m(x) = \\ &= J_{-m}(x), \end{aligned}$$

come si riconosce in base alla (12').

In definitiva $c_n = J_n(x)$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$, quindi lo sviluppo cercato si scrive

$$e^{\frac{x}{2}(z - \frac{1}{z})} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} J_n(x) z^n. \quad (2)$$

funzione generatrice

Abbiamo trovato la *funzione generatrice* della successione delle funzioni di Bessel $J_n(x)$. La (2) ammette alcune notevoli conseguenze. Sempre ricordando che $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$, $n > 0$, si ha

$$e^{\frac{x}{2}(z - \frac{1}{z})} = J_0(x) + \sum_{n \geq 1} J_n(x) [z^n + (-1)^n z^{-n}];$$

ponendo $z = e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$, segue, separando gli indici pari da quelli dispari,

$$\begin{aligned} e^{ix \sin \theta} &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} J_n(x) e^{in\theta} = J_0(x) + \sum_{n \geq 1} J_n(x) [e^{in\theta} + (-1)^n e^{-in\theta}] = \\ &= J_0(x) + 2 \sum_{k \geq 1} J_{2k}(x) \cos(2k\theta) + 2i \sum_{k \geq 1} J_{2k-1}(x) \sin((2k-1)\theta). \end{aligned} \quad (3)$$

Uguagliando parti reali e coefficienti delle parti immaginarie di ottengono le formule equivalenti

$$\cos(x \sin \theta) = J_0(x) + 2 \sum_{k \geq 1} J_{2k}(x) \cos(2k\theta), \quad (3')$$

$$\sin(x \sin \theta) = 2 \sum_{k \geq 1} J_{2k-1}(x) \sin((2k-1)\theta). \quad (3'')$$

Si osservi che l'uguaglianza $e^{ix \sin \theta} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} J_n(x) e^{in\theta}$ altro non è che lo sviluppo in serie di Fourier (in forma complessa) della funzione $\theta \mapsto e^{ix \sin \theta}$, periodica di periodo 2π . L'identità di Parseval (\uparrow Corollario della Prop. 3.4-3) fornisce la notevole relazione

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} J_n^2(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |e^{ix \sin \theta}|^2 d\theta = 1; \quad (4)$$

da essa segue subito che $|J_n(x)| \leq 1$ per ogni n e per ogni x .

$J_n(x)$, in quanto coefficiente di Fourier di indice n della funzione $e^{ix \sin \theta}$, vale

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(x \sin \theta - n\theta)} d\theta, \quad (5)$$

e poiché si tratta di una quantità reale (per la funzione $\phi(\theta) := e^{ix \sin \theta}$ si ha $\overline{\phi(\theta)} = \phi(-\theta)$; \uparrow esercizio 3.5-3), si ottiene la seguente rappresentazione integrale della funzione $J_n(x)$:

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x \sin \theta - n\theta) d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \sin \theta - n\theta) d\theta. \quad (5')$$

Dalla (5) segue nuovamente la disuguaglianza $|J_n(x)| \leq 1$; anzi, poiché le derivate successive delle funzioni J_n si scrivono

$$D^k J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (i \sin \theta)^k e^{i(x \sin \theta - n\theta)} d\theta,$$

si ha $|D^k J_n(x)| \leq 1$, per ogni $k, n \in \mathbb{N}$ e per ogni x reale.

La relazione (5') può essere ulteriormente elaborata. Ricordando che $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$, possiamo scrivere

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \sin \theta - n\theta) d\theta,$$

$$(-1)^n J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \sin \theta + n\theta) d\theta.$$

Sommando e sottraendo tra loro, secondo che sia n pari oppure dispari, le uguaglianze scritte e ricordando che

$$\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta,$$

$$\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) = 2 \sin \alpha \sin \beta,$$

si ottengono le relazioni

$$J_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \sin \theta) \cos(n\theta) d\theta, & \text{se } n \text{ è pari,} \\ \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(x \sin \theta) \sin(n\theta) d\theta, & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

Abbiamo ricordato nel precedente paragrafo che ciascuna funzione $J_\nu(x)$ ammette una successione di zeri positivi, diciamo $\xi_{\nu,1}, \xi_{\nu,2}, \xi_{\nu,3}, \dots$. Per ogni ν , la funzione $x \mapsto J_\nu(\xi_{\nu,k} x)$ possiede k zeri nell'intervallo $(0, 1]$.

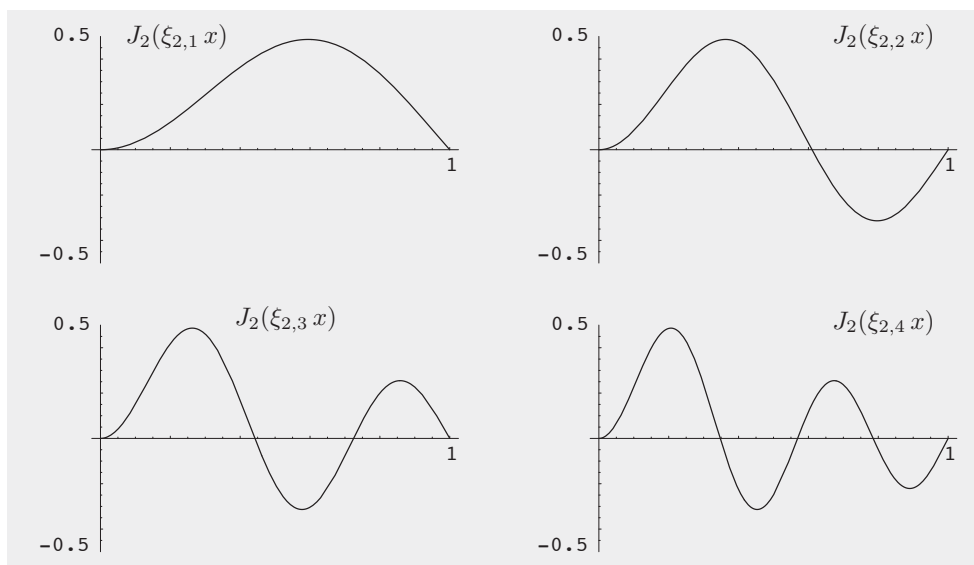


Figura 8.8-1. Le funzioni $J_2(\xi_{2,k} x)$ possiedono k zeri nell'intervallo $(0, 1]$.

Le restrizioni delle funzioni $J_\nu(\xi_{\nu,k} x)$, $k = 1, 2, \dots$, all'intervallo $[0, 1]$ possiedono una notevole proprietà di ortogonalità, espressa dalla seguente

proprietà di ortogonalità

Proposizione 8.8-1. Siano $\xi_{\nu,1}, \xi_{\nu,2}, \xi_{\nu,3}, \dots$ gli zeri positivi della funzione $J_\nu(x)$ ordinati per valori crescenti; allora

$$\int_0^1 x J_\nu(\xi_{\nu,h} x) J_\nu(\xi_{\nu,k} x) dx = \begin{cases} 0, & \text{se } h \neq k, \\ \frac{1}{2} [J'_\nu(\xi_{\nu,h})]^2, & \text{se } h = k. \end{cases} \quad (6)$$

Osservazione. Se ξ_ν è uno zero della funzione J_ν , la funzione $y(x) := J_\nu(\xi_\nu x)$ verifica l'equazione di Bessel

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(\xi_\nu^2 - \frac{\nu^2}{x^2} \right) y = 0$$

che si può anche scrivere, moltiplicando per x , in forma auto-aggiunta:

$$(x y')' + \left(-\frac{\nu^2}{x} + \xi_\nu^2 x \right) y = 0$$

con la condizione $y(1) = 0$. Siamo dunque in presenza di un problema di Sturm-Liouville: con i simboli della Proposizione 8.1-1 (si rivedano le formule (1), (2') e (2'') del paragrafo 8.1) si ha

$$a = 0, \quad b = 1, \quad p(x) = w(x) = x, \quad q(x) = -\frac{\nu^2}{x}.$$

Dunque y è un'autofunzione corrispondente all'autovalore $\lambda = \xi_\nu^2$; poiché $p(0) = 0$, basta la condizione $y(1) = 0$ per individuare tale autofunzione a meno di una costante moltiplicativa.

Dunque l'ortogonalità che vogliamo dimostrare rientra come caso particolare nella Proposizione 8.1-1; il fatto che q sia continua soltanto nell'intervallo $(0, 1]$ non invalida la dimostrazione a suo tempo presentata, come si riconosce esaminandola. Tuttavia preferiamo ripetere la dimostrazione, adattandola al caso in esame. $\triangleleft \square$

DIMOSTRAZIONE. Per quanto appena osservato, per ogni $\xi > 0$, la funzione $y(x) := J_\nu(\xi x)$ è soluzione dell'equazione di Bessel

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(\xi^2 - \frac{\nu^2}{x^2} \right) y = 0.$$

Siano ξ_1 e ξ_2 due numeri positivi; le funzioni

$$y_1(x) := J_\nu(\xi_1 x), \quad y_2(x) := J_\nu(\xi_2 x)$$

soddisfano le equazioni di Bessel

$$\begin{aligned} y_1'' + \frac{1}{x} y_1' + \left(\xi_1^2 - \frac{\nu^2}{x^2} \right) y_1 &= 0, \\ y_2'' + \frac{1}{x} y_2' + \left(\xi_2^2 - \frac{\nu^2}{x^2} \right) y_2 &= 0; \end{aligned}$$

moltiplicando la prima per $x y_2(x)$, la seconda per $x y_1(x)$ e sottraendo membro a membro, si ottiene

$$x y_2 y_1'' - x y_1 y_2'' + y_2 y_1' - y_1 y_2' = \frac{d}{dx} [x (y_2 y_1' - y_1 y_2')] = (\xi_2^2 - \xi_1^2) x y_1 y_2.$$

Integrando tra 0 e 1 si ottiene

$$(\xi_2^2 - \xi_1^2) \int_0^1 x y_1(x) y_2(x) dx = y_2(1) y_1'(1) - y_1(1) y_2'(1),$$

cioè, tornando ai simboli originari,

$$(\xi_2^2 - \xi_1^2) \int_0^1 x J_\nu(\xi_1 x) J_\nu(\xi_2 x) dx = J_\nu(\xi_2) J_\nu'(\xi_1) \xi_1 - J_\nu(\xi_1) J_\nu'(\xi_2) \xi_2.$$

Se poniamo $\xi_1 = \xi_{\nu,h}$, $\xi_2 = \xi_{\nu,k}$ con $h \neq k$, abbiamo la prima delle uguaglianze (6), in quanto $J_\nu(\xi_{\nu,h}) = J_\nu(\xi_{\nu,k}) = 0$, mentre $\xi_{\nu,k}^2 - \xi_{\nu,h}^2 \neq 0$.

La stessa formula per $\xi_1 = \xi_{\nu,h}$ e $\xi_2 = \xi \neq \xi_{\nu,h}$ fornisce

$$\int_0^1 x J_\nu(\xi_{\nu,h} x) J_\nu(\xi x) dx = \frac{J_\nu(\xi) J_\nu'(\xi_{\nu,h}) \xi_{\nu,h}}{\xi^2 - \xi_{\nu,h}^2};$$

calcolando il limite per $\xi \rightarrow \xi_{\nu,h}$, si trova, in base alla regola di L'Hospital,

$$\int_0^1 x [J_\nu(\xi_{\nu,h} x)]^2 dx = \frac{1}{2} [J'_\nu(\xi_{\nu,h})]^2. \quad \triangleleft \square$$

Dalla Proposizione dimostrata segue che la successione di funzioni $(\sqrt{x} J_\nu(\xi_{\nu,h} x))$, per $h = 1, 2, \dots$, è ortogonale nello spazio $L^2[0, 1]$, o, che è lo stesso, la successione $(J_\nu(\xi_{\nu,h} x))$ è ortogonale rispetto al prodotto scalare pesato

$$(f | g)_w := \int_0^1 w(x) f(x) \overline{g(x)} dx,$$

dove $w(x) := x$. Ad ogni funzione f che sia sommabile su $[0, 1]$ rispetto al peso considerato, possiamo associare il relativo *sviluppo in serie di Fourier-Bessel*

serie di
Fourier-Bessel

$$f(x) \sim \sum_{k \geq 1} c_k J_\nu(\xi_{\nu,k} x),$$

dove i coefficienti c_k sono dati dalla formula (\uparrow formula (5) del paragrafo 1.4)

$$c_k := \frac{2}{[J'_\nu(\xi_{\nu,k})]^2} \int_0^1 x f(x) J_\nu(\xi_{\nu,k} x) dx.$$

Quanto alla convergenza di tale serie, valgono risultati analoghi a quelli che abbiamo dimostrato nel Capitolo 3.

Per finire, occupiamoci brevemente degli sviluppi asintotici delle funzioni di Bessel; si tratta di formule approssimate per la rappresentazione di tali funzioni per valori “grandi” della variabile x . Procediamo in modo euristico: riprendiamo in considerazione l'equazione di Bessel nella forma

sviluppi asintotici

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0.$$

Poiché ν^2/x^2 tende a 0 per $x \rightarrow \infty$, è ragionevole congetturare che le soluzioni di tale equazione, per $x \rightarrow \infty$, si comportino come le soluzioni dell'equazione

$$y'' + \frac{1}{x} y' + y = 0.$$

Cerchiamo di risolvere tale equazione ponendo $y(x) = x^\alpha u(x)$, con α costante opportuna e u come nuova funzione incognita. Sostituendo nell'equazione precedente si ottiene

$$u''(x) + \frac{2\alpha + 1}{x} u'(x) + \left(1 + \frac{\alpha^2}{x^2}\right) u(x) = 0.$$

Nuovamente trascuriamo il rapporto α^2/x^2 , ottenendo l'equazione semplificata

$$u''(x) + \frac{2\alpha + 1}{x} u'(x) + u(x) = 0.$$

Quest'ultima equazione è di immediata soluzione per $\alpha = -1/2$, riducendosi a $u'' + u = 0$; si trova

$$u(x) = A \cos(x + B),$$

con A e B costanti rispetto a x . Tornando all'incognita y si trova dunque

$$y(x) = \frac{A}{\sqrt{x}} \cos(x + B). \quad (7)$$

Affinché il secondo membro della (7) fornisca un'espressione asintotica delle funzioni di Bessel $J_\nu(x)$ occorre scegliere in modo opportuno le costanti A e B .

Si può supporre che A sia indipendente da ν e B sia polinomiale di primo grado rispetto ad essa. Tale scelta è resa plausibile dall'espressione delle funzioni $J_{1/2}(x)$ e $J_{-1/2}(x)$ che conosciamo esplicitamente:

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x, \quad J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x.$$

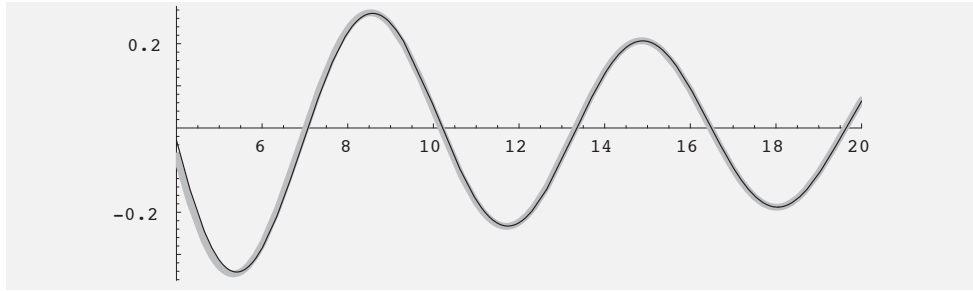


Figura 8.8-2. La funzione $J_1(x)$, in grigio, e il suo sviluppo asintotico.

Chiaramente, le formule appena scritte sono conformi all'espressione a secondo membro di (7) a patto di scegliere

$$A = \sqrt{\frac{2}{\pi}}, \quad B = -\frac{2\nu + 1}{4} \pi.$$

Ricordiamo che $\cos(x - \pi/2) = \sin x$. Abbiamo scelto come B la funzione polinomiale di primo grado che vale 0 per $\nu = -1/2$ e vale $-\pi/2$ per $\nu = 1/2$. Si hanno dunque le espressioni asintotiche per le funzioni di Bessel di prima specie

$$J_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{2\nu + 1}{4} \pi\right), \quad x \rightarrow +\infty. \quad (8)$$

Si osservi che l'espressione a secondo membro è esatta per $\nu = \pm 1/2$.

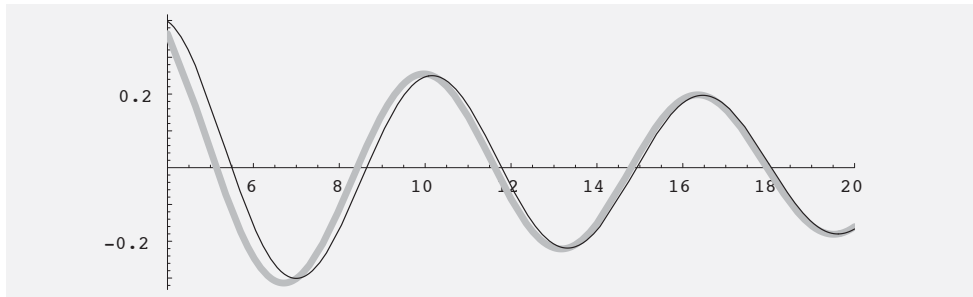


Figura 8.8-3. La funzione $J_2(x)$, in grigio, e il suo sviluppo asintotico.

Analogamente, per le funzioni di Bessel di seconda specie si possono ottenere le espressioni asintotiche

$$Y_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{2\nu + 1}{4} \pi\right) \quad x \rightarrow +\infty.$$

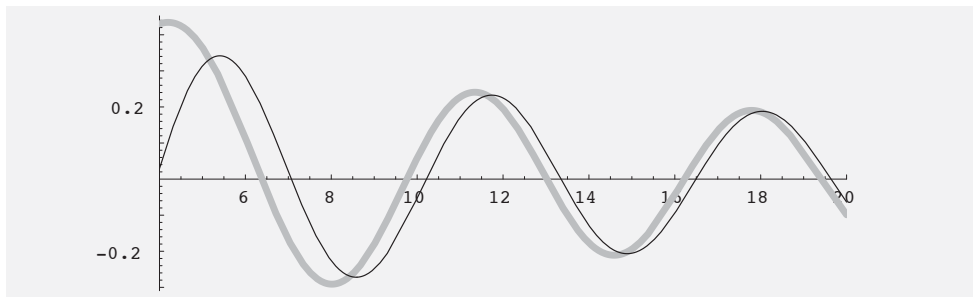


Figura 8.8-4. La funzione $J_3(x)$, in grigio, e il suo sviluppo asintotico.

Appendice 8-A. Coordinate polari nel piano

Consideriamo nel piano un sistema di coordinate polari r e φ ; esse sono legate alle coordinate cartesiane x e y dalle formule

$$x = r \cos \varphi; \quad y = r \sin \varphi. \quad (1)$$

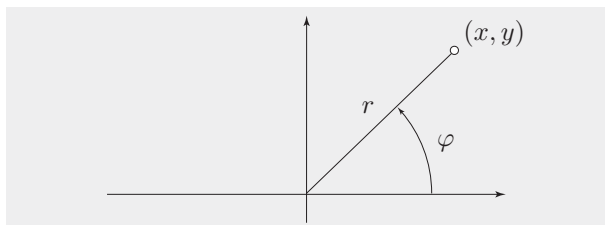


Figura 8.A-1.

Le coordinate polari r e φ del punto (x, y) .

Si ha $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, e per ogni $(x, y) \neq (0, 0)$,

$$\begin{cases} \tan \varphi = \frac{y}{x}, & \text{se } x \neq 0, \\ \cot \varphi = \frac{x}{y}, & \text{se } y \neq 0. \end{cases}$$

Ne deduciamo

$$\varphi = \arctan \frac{y}{x} + c, \quad \text{oppure} \quad \varphi = \operatorname{arccot} \frac{x}{y} + c,$$

dove la costante c va scelta in base al quadrante di appartenenza del punto (x, y) . Ad esempio, nel caso dell'arcotangente, $c = 0$ nel primo e quarto quadrante, $c = \pi$ nel secondo quadrante e $c = -\pi$ nel terzo quadrante. Le *curve coordinate*, cioè le curve individuate dalle relazioni $r = \text{costante}$ e $\varphi = \text{costante}$ sono le circonferenze di centro l'origine e le semirette uscenti dall'origine: tali curve si tagliano mutuamente ad angolo retto, e pertanto si tratta di un sistema di coordinate ortogonali.

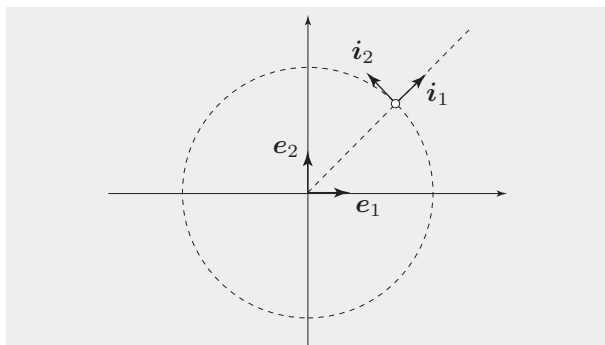


Figura 8.A-2.

Le curve $r = \text{costante}$ e $\varphi = \text{costante}$ si tagliano ortogonalmente.

Sia $u(x, y)$ una funzione data; utilizzando le (1) abbiamo

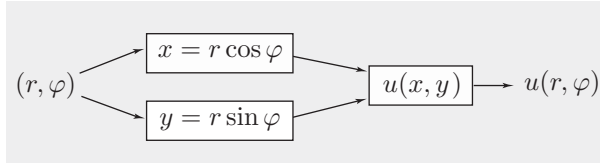
$$u(x, y) = u(r \cos \varphi, r \sin \varphi) =: u(r, \varphi).$$

Commettendo un lieve abuso di notazioni, abbiamo indicato con la stessa lettera u tanto la funzione data, quanto la funzione di r e φ composta mediante le (1) e la funzione iniziale.

Vogliamo determinare le derivate prime e seconde della $u(x, y)$, nonché il laplaciano della stessa funzione, in termini delle derivate della funzione $u(r, \varphi)$.

Abbiamo innanzitutto

Figura 8.A-3.
Una funzione di x e y può essere espressa in funzione di r e φ .



$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = \cos \varphi, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} = \sin \varphi,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{y}{r^2} = -\frac{\sin \varphi}{r}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{x}{r^2} = \frac{\cos \varphi}{r},$$

quindi

$$\text{grad } r \cdot \text{grad } \varphi = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \quad (2)$$

in accordo col fatto che il sistema di coordinate è ortogonale. Si ha poi

$$\text{grad } r \cdot \text{grad } r = \|\text{grad } r\|^2 = 1, \quad \text{grad } \varphi \cdot \text{grad } \varphi = \|\text{grad } \varphi\|^2 = \frac{1}{r^2}. \quad (3)$$

Calcoliamo le derivate seconde:

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3}, \quad \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = \frac{1}{r} - \frac{y^2}{r^3} \implies \Delta r = \frac{1}{r}; \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{2yx}{r^4}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -\frac{2xy}{r^4} \implies \Delta \varphi = 0. \quad (5)$$

Per alleggerire le notazioni, scriviamo u_x , u_{xx} , ecc., in luogo di $\partial u / \partial x$, $\partial^2 u / \partial x^2$, ecc. Abbiamo

$$u_x = u_r r_x + u_\varphi \varphi_x, \quad u_y = u_r r_y + u_\varphi \varphi_y,$$

$$u_{xx} = (u_{rr} r_x + u_{r\varphi} \varphi_x) r_x + u_r r_{xx} + (u_{\varphi r} r_x + u_{\varphi\varphi} \varphi_x) \varphi_x + u_\varphi \varphi_{xx} =$$

$$= u_{rr} r_x^2 + 2u_{r\varphi} r_x \varphi_x + u_{\varphi\varphi} \varphi_x^2 + u_r r_{xx} + u_\varphi \varphi_{xx};$$

e analogamente

$$u_{yy} = u_{rr} r_y^2 + 2u_{r\varphi} r_y \varphi_y + u_{\varphi\varphi} \varphi_y^2 + u_r r_{yy} + u_\varphi \varphi_{yy}.$$

Sommando membro a membro le due ultime uguaglianze, e tenendo conto delle (2), (3), (4) e (5) si ottiene

$$\Delta u = u_{rr} + u_{\varphi\varphi} \frac{1}{r^2} + u_r \frac{1}{r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}. \quad (6)$$

Le funzioni u per cui $\Delta u = 0$ si dicono *armoniche* (\uparrow Osservazione 4.5-3).

Appendice 8-B. Coordinate ortogonali e operatori differenziali nello spazio

Molti problemi di interesse applicativo suggeriscono di usare sistemi di coordinate nello spazio diversi dal sistema cartesiano ortogonale. In questa appendice vogliamo studiare un generico sistema di coordinate curvilinee, che sia ancora ortogonale in un senso che preciseremo, soffermandoci sui due casi di maggiore interesse, quello delle coordinate cilindriche e quello delle coordinate sferiche.

Per uniformità di notazioni, indichiamo le coordinate cartesiane ortogonali con i simboli x_1 , x_2 , x_3 , cioè poniamo

$$x_1 := x, \quad x_2 := y, \quad x_3 := z.$$

Le coordinate cilindriche (v. figura 8.B-1) sono date dalle formule

$$x_1 = r \cos \varphi, \quad x_2 = r \sin \varphi, \quad x_3 = z; \quad (1)$$

esse si ottengono dalle polari nel piano mediante l'aggiunta di una quota z . Le coordinate sferiche sono date dalle formule

$$x_1 = r \sin \theta \cos \varphi, \quad x_2 = r \sin \theta \sin \varphi, \quad x_3 = r \cos \theta. \quad (2)$$

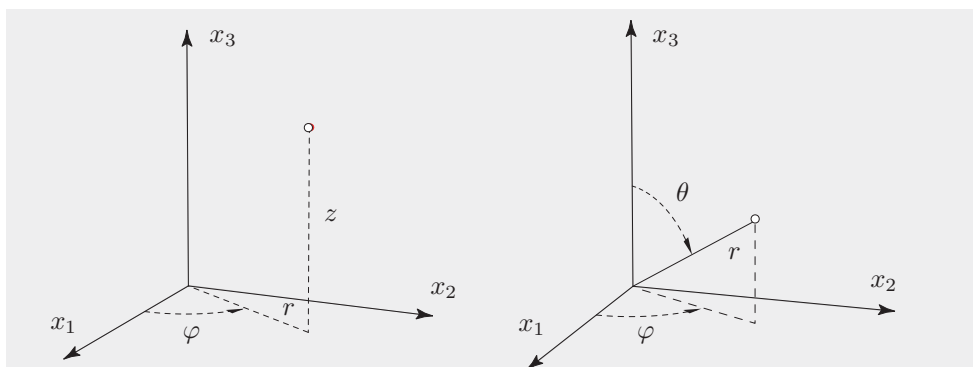


Figura 8.B-1. Coordinate cilindriche (a sinistra) e coordinate sferiche (a destra).

I due sistemi di coordinate appena descritti sono del tipo

$$x_1 = x_1(q_1, q_2, q_3), \quad x_2 = x_2(q_1, q_2, q_3), \quad x_3 = x_3(q_1, q_2, q_3). \quad (3)$$

Supponiamo che ogni punto dello spazio (tranne al più i punti di un insieme di misura nulla) sia individuato da un'unica terna di coordinate q_1, q_2, q_3 , in modo che sia possibile risolvere il sistema (3) nella forma

$$q_1 = q_1(x_1, x_2, x_3), \quad q_2 = q_2(x_1, x_2, x_3), \quad q_3 = q_3(x_1, x_2, x_3). \quad (4)$$

Per ogni punto dello spazio passano tre superfici descritte da equazioni del tipo $q_1 = \text{costante}$, $q_2 = \text{costante}$, $q_3 = \text{costante}$, dette *superfici coordinate*; tali superfici si tagliano a due a due secondo *curve coordinate*. Questo spiega il nome di *coordinate curvilinee* che viene dato alle coordinate q_1, q_2, q_3 . Si ottengono risultati più semplici se tali coordinate sono *ortogonali*, cioè tali che le tre curve coordinate che passano per ciascun punto siano mutuamente ortogonali; ciò significa che le tangenti alle curve stesse in tale punto formano angoli retti.

È il caso delle coordinate cilindriche e sferiche. Nel primo caso abbiamo

$$q_1 = r, \quad q_2 = \varphi, \quad q_3 = z;$$

le superfici coordinate sono:

$r = \text{costante}$: cilindri circolari retti con asse di rotazione l'asse z ,

$\varphi = \text{costante}$: piani passanti per l'asse z ,

$z = \text{costante}$: piani ortogonali all'asse z .

Nel caso delle coordinate sferiche abbiamo

$$q_1 = r, \quad q_2 = \theta, \quad q_3 = \varphi;$$

le superfici coordinate sono:

$r = \text{costante}$: sfere di centro l'origine,

$\theta = \text{costante}$: coni circolari retti di vertice l'origine e asse di rotazione l'asse z ,

$\varphi = \text{costante}$: piani passanti per l'asse z .

Volendo studiare i legami tra le x -coordinate e le q -coordinate, cominciamo con lo studio del quadrato dell'*elemento lineare*: se dal punto di coordinate (x_1, x_2, x_3)

passiamo al punto $(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3)$, generiamo uno spostamento ds per cui si ha (teorema di Pitagora nello spazio)

$$ds^2 = \sum_{i=1}^3 dx_i^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2. \quad (5)$$

Se gli incrementi dx_i non sono indipendenti, ma sono generati dagli incrementi dq_j , avremo

$$dx_i \doteq \sum_{j=1}^3 \frac{\partial x_i}{\partial q_j} dq_j,$$

dove il simbolo \doteq sta a significare che sono stati trascurati infinitesimi di ordine superiore agli incrementi dq_j . Avremo allora

$$ds^2 = \sum_{i=1}^3 dx_i^2 = \sum_{i=1}^3 dx_i dx_i \doteq \sum_{i=1}^3 \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial x_i}{\partial q_j} dq_j \sum_{k=1}^3 \frac{\partial x_i}{\partial q_k} dq_k \right). \quad (6)$$

Abbiamo usato simboli diversi nelle ultime due somme in quanto si tratta di somme indipendenti. Se le coordinate q_j sono ortogonali, al pari delle x_i , nella (6) compaiono soltanto quadrati degli incrementi dq_j , così come nella (5) compaiono soltanto quadrati degli incrementi dx_i . Ciò significa che la (6) deve potersi scrivere nella forma

$$ds^2 \doteq h_1^2 dq_1^2 + h_2^2 dq_2^2 + h_3^2 dq_3^2, \quad (6')$$

dove i coefficienti h_1^2, h_2^2, h_3^2 si determinano raccogliendo a fattor comune dq_1^2, dq_2^2, dq_3^2 . Ad esempio, dq_1^2 si ottiene dalla (6) per $j = k = 1$, dunque h_1^2 è la somma dei tre addendi che si ottengono per i che va da 1 a 3. Lo stesso vale per h_2^2 e h_3^2 . In sintesi

$$h_1^2 = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_1} \right)^2, \quad h_2^2 = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_2} \right)^2, \quad h_3^2 = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_3} \right)^2. \quad (7)$$

Possiamo organizzare il risultato ottenuto introducendo la matrice jacobiana (dal nome del matematico tedesco C.G.J. Jacobi, 1804-1851)

$$J(q_1, q_2, q_3) := \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(q_1, q_2, q_3)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial q_1} & \frac{\partial x_1}{\partial q_2} & \frac{\partial x_1}{\partial q_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial q_1} & \frac{\partial x_2}{\partial q_2} & \frac{\partial x_2}{\partial q_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial q_1} & \frac{\partial x_3}{\partial q_2} & \frac{\partial x_3}{\partial q_3} \end{bmatrix}$$

Le norme euclidee in \mathbb{R}^3 delle colonne della matrice jacobiana costituiscono i *coefficienti metrici*:

$$h_j = h_j(q_1, q_2, q_3) := \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial q_j} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial q_j} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial q_j} \right)^2}, \quad j = 1, 2, 3.$$

Le colonne della matrice jacobiana rappresentano tre vettori tangenti alle curve coordinate, passanti per il punto di coordinate (q_1, q_2, q_3) ; per ottenere i corrispondenti *versori* (= vettori di norma unitaria) uscenti dal punto (q_1, q_2, q_3) basta dividere le colonne per i coefficienti metrici:

$$\mathbf{i}_j := \frac{1}{h_j} \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial q_j} \\ \frac{\partial x_2}{\partial q_j} \\ \frac{\partial x_3}{\partial q_j} \end{bmatrix}, \quad j = 1, 2, 3. \quad (8)$$

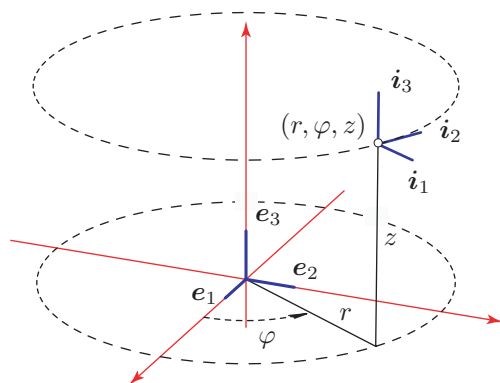


Figura 8.B-2.
Versori tangenti alle
curve coordinate in
coordinate cilindriche
 r, φ e z .

I coefficienti metrici individuano completamente il sistema di coordinate. Sia u un *campo scalare*, cioè una funzione del punto, e $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ un *campo vettoriale*, cioè un vettore le cui componenti sono funzioni del punto. Siano $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ i versori uscenti dal punto (q_1, q_2, q_3) nelle direzioni delle curve coordinate. Vogliamo trovare l'espressione del gradiente di u , della divergenza e del rotore di \mathbf{v} , del laplaciano di u mediante le coordinate q_1, q_2, q_3 .

In coordinate cartesiane ortogonali si tratta delle espressioni definite dalle formule

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{e}_3 \quad (9)$$

($\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ sono i versori degli assi cartesiani, indicati anche con i simboli $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$),

$$\text{div } \mathbf{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{v} &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \\ &= \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) \mathbf{e}_1 - \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right) \mathbf{e}_2 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) \mathbf{e}_3, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}. \quad (12)$$

Si considera spesso anche l'operatore

$$\nabla := \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3};$$

esso fu introdotto da W.R. Hamilton (1805-1865) e denominato *nabla*, da una radice ebraica che significa arpa. Usando tale operatore si può anche scrivere

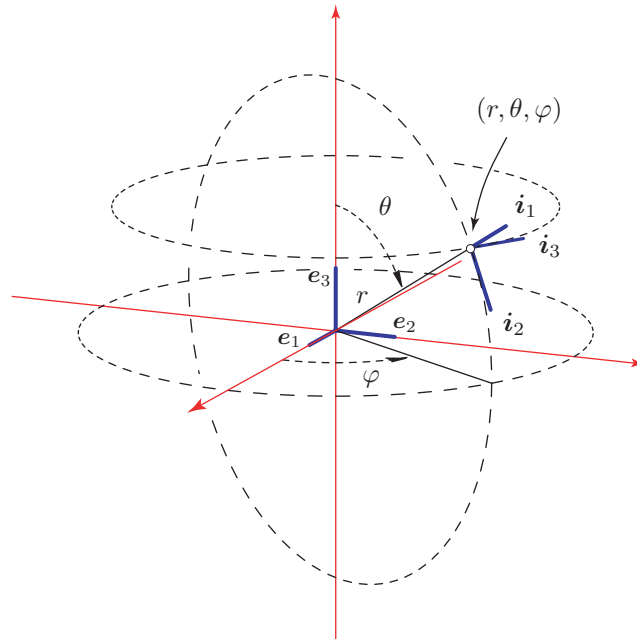
$$\text{grad } u = \nabla u;$$

vedremo altri usi dell'operatore ∇ .

Ricordiamo che se \mathbf{a} è un qualsivoglia versore, la derivata di u nella direzione di \mathbf{a} , che indicheremo $D_{\mathbf{a}}u$, è legata al gradiente dalla formula

$$D_{\mathbf{a}}u = \text{grad } u \cdot \mathbf{a}, \quad (13)$$

dove il simbolo \cdot indica il prodotto scalare canonico in \mathbb{R}^3 (\uparrow esempio 1.3-1). Il gradiente di u , se non è nullo, ha la direzione secondo cui la funzione u ha la massima crescita; esso è ortogonale alle *superfici di livello*, cioè le superfici del tipo $u = \text{costante}$.

**Figura 8.B-3.**

Versori tangenti alle curve coordinate in coordinate sferiche r (raggio vettore), θ (colatitudine) e φ (longitudine).

Indichiamo con s_1 l'ascissa curvilinea lungo la prima curva coordinata passante per il punto di coordinate (q_1, q_2, q_3) . Un incremento dq_1 della coordinata variabile provoca uno spostamento lungo la curva stessa pari a $ds_1 \doteq h_1 dq_1$, in accordo con la (6'), dove s'intende che h_1 è calcolato nel punto in esame. Dunque per calcolare la derivata della u nella direzione di i_1 basta derivare rispetto a s_1 :

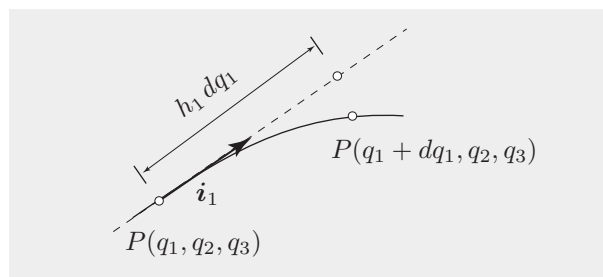
$$D_{i_1} u = \frac{\partial u}{\partial s_1}.$$

D'altra parte il rapporto incrementale che dà luogo alla derivata appena calcolata si scrive

$$\frac{f(q_1 + dq_1, q_2, q_3) - f(q_1, q_2, q_3)}{h_1 dq_1} = \frac{1}{h_1} \frac{f(q_1 + dq_1, q_2, q_3) - f(q_1, q_2, q_3)}{dq_1},$$

e l'ultima quantità, per $dq_1 \rightarrow 0$, tende a

$$\frac{1}{h_1} \frac{\partial f}{\partial q_1}.$$

**Figura 8.B-4.**

Un incremento dq_1 della prima coordinata provoca uno spostamento $ds_1 \doteq h_1 dq_1$ lungo la prima curva coordinata.

In breve: si ha

$$D_{i_1} u = \frac{\partial u}{\partial s_1} = \frac{1}{h_1} \frac{\partial f}{\partial q_1},$$

e formule analoghe per le altre derivate secondo le direzioni dei versori tangenti.

Ora il gradiente di u è ricostruibile a partire dalle sue proiezioni sui tre versori $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$; in conformità con la (13), avremo dunque

$$\text{grad } u = \frac{1}{h_1} \frac{\partial u}{\partial q_1} \mathbf{i}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial u}{\partial q_2} \mathbf{i}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial u}{\partial q_3} \mathbf{i}_3. \quad (9')$$

Nel caso delle coordinate cilindriche abbiamo la matrice jacobiana:

$$J(r, \varphi, z) := \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(r, \varphi, z)} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

il cui determinante vale r . I coefficienti metrici valgono

$$h_1 = 1, \quad h_2 = r, \quad h_3 = 1.$$

e pertanto il gradiente si scrive

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial r} \mathbf{i}_1 + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \mathbf{i}_2 + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{i}_3.$$

Nel caso delle coordinate sferiche abbiamo la matrice jacobiana

$$J(r, \theta, \varphi) := \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(r, \theta, \varphi)} = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{bmatrix}$$

il cui determinante vale $r^2 \sin \theta$. I coefficienti metrici valgono

$$h_1 = 1, \quad h_2 = r, \quad h_3 = r \sin \theta.$$

e pertanto il gradiente si scrive

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial r} \mathbf{i}_1 + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \mathbf{i}_2 + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \mathbf{i}_3.$$

Occupiamoci ora della divergenza. Questo concetto nasce nell'ambito della dinamica dei fluidi. Se un fluido compressibile avente densità ρ (funzione del punto e del tempo) si muove con velocità \mathbf{v} in una regione in cui non vi siano né sorgenti né pozzi (cioè punti in cui il fluido viene prodotto o eliminato), deve valere un'equazione di continuità, cioè un'uguaglianza che esprima il fatto che la quantità di fluido che entra o esce in ogni fissata porzione dello spazio occupato dal fluido deve essere bilanciata dalla variazione di densità.

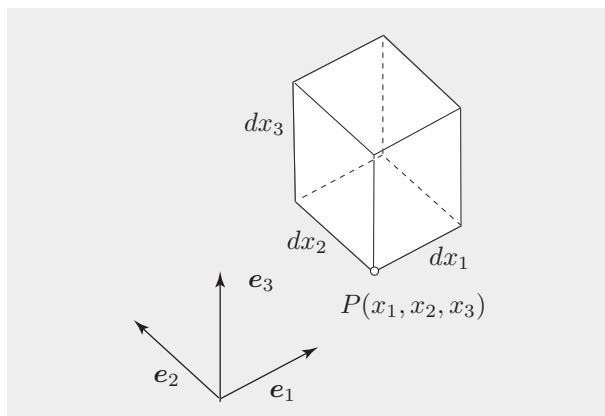


Figura 8.B-5.

Un parallelepipedo nello spazio a tre dimensioni.

Per ogni punto dello spazio, consideriamo il “cubo” C delimitato dalle coppie di piani paralleli $x_1 = \text{cost.}$, $x_1 + dx_1 = \text{cost.}$ e analogamente $x_2 = \text{cost.}$, $x_2 + dx_2 = \text{cost.}$, $x_3 = \text{cost.}$, $x_3 + dx_3 = \text{cost.}$ Sia $\mathbf{w} := \rho \mathbf{v} = (w_1, w_2, w_3)$. Consideriamo la variazione della massa contenuta in C dovuta al flusso attraverso la sua frontiera,

cioè la quantità di massa che entra o esce da C per unità di tempo. Il flusso entrante attraverso la faccia $x_1 = \text{cost.}$ è dato il prima approssimazione da

$$(\rho v_1)_{x_1=\text{cost.}} dx_2 dx_3 dt = (w_1)_{x_1=\text{cost.}} dx_2 dx_3 dt,$$

in quanto le componenti v_2 e v_3 della velocità sono parallele alla faccia che stiamo considerando. Per la stessa ragione il flusso uscente attraverso la faccia $x_1 + dx_1 = \text{cost.}$ vale

$$(\rho v_1)_{x_1+dx_1=\text{cost.}} dx_2 dx_3 dt = (w_1)_{x_1+dx_1=\text{cost.}} dx_2 dx_3 dt,$$

dunque la perdita di massa imputabile a queste due facce è data dalla differenza delle espressioni calcolate, che possiamo scrivere

$$\frac{(w_1)_{x_1+dx_1=\text{cost.}} - (w_1)_{x_1=\text{cost.}}}{dx_1} dx_1 dx_2 dx_3 dt,$$

essendo $dx_1 dx_2 dx_3 = dV$ il volume del cubo C .

Due espressioni analoghe valgono per le due restanti coppie di facce del cubo C , e la somma delle tre espressioni fornisce la perdita di massa entro C . Questa deve coincidere con la variazione nel tempo della densità ρ , riferita al volume dV e al tempo dt , cioè

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} dV dt.$$

Si uguagliano le due espressioni e si dividono per $dV dt$; facendo tendere a 0 gli incrementi dx_1, dx_2, dx_3 , otteniamo l'equazione di continuità nella forma

$$\text{div } \mathbf{w} = \text{div}(\rho \mathbf{v}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \iff \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0.$$

Vediamo che cosa cambia nel ragionamento precedente se invece delle coordinate cartesiane si utilizzano coordinate curvilinee ortogonali (q_1, q_2, q_3) . Chiamiamo direttamente \mathbf{v} il campo vettoriale di cui vogliamo calcolare la divergenza. Attualmente abbiamo un "cuboide" C delimitato dalle coppie superfici $q_1 = \text{cost.}, q_1 + dq_1 = \text{cost.}$ e analogamente $q_2 = \text{cost.}, q_2 + dq_2 = \text{cost.}, q_3 = \text{cost.}, q_3 + dq_3 = \text{cost.}$; il suo volume dV vale in prima approssimazione

$$ds_1 ds_2 ds_3 = (h_1 dq_1)(h_2 dq_2)(h_3 dq_3) = (h_1 h_2 h_3) dq_1 dq_2 dq_3,$$

dove s'intende che i coefficienti h_k sono calcolati nel punto di coordinate (q_1, q_2, q_3) .

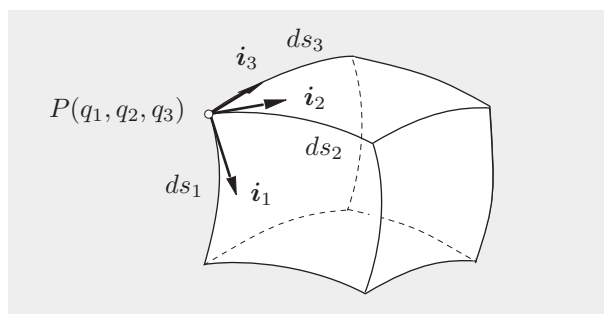


Figura 8.B-6.

Un cuboide nello spazio a tre dimensioni.

La perdita di massa imputabile alle due facce ortogonali al versore \mathbf{i}_1 è data da

$$\begin{aligned} & ((v_1 ds_2 ds_3)_{q_1+dq_1=\text{cost.}} - (v_1 ds_2 ds_3)_{q_1=\text{cost.}}) dt = \\ & = \frac{(v_1 h_2 h_3)_{q_1+dq_1=\text{cost.}} - (v_1 h_2 h_3)_{q_1=\text{cost.}}}{dq_1} dq_1 dq_2 dq_3 dt; \end{aligned}$$

se si divide per $dV dt$ e si fa il limite per $dq_1 \rightarrow 0$ si ottiene l'espressione

$$\frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial q_1} (h_2 h_3 v_1),$$

ed espressione analoghe per i contributi delle due altre facce del cuboide. In conclusione si ha la seguente espressione della divergenza:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (h_2 h_3 v_1) + \frac{\partial}{\partial q_2} (h_3 h_1 v_2) + \frac{\partial}{\partial q_3} (h_1 h_2 v_3) \right]. \quad (10')$$

In coordinate cilindriche, in base a quanto già sappiamo sui coefficienti h_k , si trova:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_1) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_2}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_3}{\partial z}.$$

Analogamente in coordinate sferiche abbiamo:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_1) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_2) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_3}{\partial \varphi}$$

Per ottenere l'espressione del laplaciano in coordinate (q_1, q_2, q_3) possiamo sfruttare il fatto che

$$\Delta u = \operatorname{div}(\operatorname{grad} u),$$

e sfruttare le espressioni che già conosciamo per la divergenza e il gradiente. Si trova, combinando la (9') con la (10')

$$\Delta u = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial u}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial u}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial u}{\partial q_3} \right) \right]. \quad (12')$$

In coordinate cilindriche troviamo:

$$\Delta u = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(r \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Per $z = 0$ si ritrova il risultato della precedente Appendice. In coordinate sferiche si trova

$$\begin{aligned} \Delta u &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \sin \theta \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}. \end{aligned}$$

Per quanto riguarda il rotore, sfruttando il fatto che lo si può esprimere mediante l'operatore ∇ e il prodotto vettoriale, come $\operatorname{rot} \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v}$, si trova l'espressione generale:

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \mathbf{i}_1 & h_2 \mathbf{i}_2 & h_3 \mathbf{i}_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 v_1 & h_2 v_2 & h_3 v_3 \end{vmatrix}.$$

Da questa seguono l'espressione in coordinate cilindriche

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_3}{\partial \varphi} - \frac{\partial v_2}{\partial z} \right) \mathbf{i}_1 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial z} \right) \mathbf{i}_2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial r v_2}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v_1}{\partial \varphi} \right) \mathbf{i}_3,$$

e quella in coordinate sferiche

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{v} &= \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_3) - \frac{\partial v_2}{\partial \varphi} \right] \mathbf{i}_1 + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_1}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r v_3) \right] \mathbf{i}_2 + \\ &+ \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r v_2) - \frac{\partial v_1}{\partial \theta} \right] \mathbf{i}_3. \end{aligned}$$

Chiudiamo questa Appendice con una tabella che mostra alcune utili identità per gli operatori considerati. Supporremo che i campi scalari e vettoriali indicati abbiano continue tutte le derivate prese in considerazione.

Utilizziamo la notazione ∇^2 per il laplaciano: $\Delta = \nabla^2$; da un punto di vista formale $\nabla \cdot \nabla u$ fornisce Δu se si interpretano i "prodotti" $\partial/\partial x \cdot \partial u/\partial x$ ecc. come derivate seconde.

Tabella 8.B-1. ALCUNE IDENTITÀ PER GLI OPERATORI DIFFERENZIALI IN \mathbb{R}^3

$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f,$	$\nabla(f/g) = (1/g^2)(g\nabla f - f\nabla g)$
$\operatorname{div}(f\mathbf{v}) = f \operatorname{div} \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla f,$	$\operatorname{div}(f \nabla g) = f \nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g$
$\nabla^2 f = \operatorname{div}(\nabla f),$	$\nabla^2(fg) = g \nabla^2 f + 2\nabla f \cdot \nabla g + f \nabla^2 g$
$\operatorname{rot}(f\mathbf{v}) = \nabla f \times \mathbf{v} + f \operatorname{rot} \mathbf{v},$	$\operatorname{div}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{v}$
$\operatorname{rot}(\nabla f) = \mathbf{0},$	$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{v}) = 0.$

Appendice 8-C. Polinomi ortogonali e formule di quadratura

In questa appendice vogliamo occuparci del calcolo approssimato di integrali del tipo

$$\int_I w(x) f(x) dx$$

dove I è un intervallo, limitato o meno, della retta reale e w un'assegnata *funzione peso*. Il problema si pone ogniqualvolta non sia possibile esprimere in termini elementari una primitiva della funzione integranda.

Faremo alcune ipotesi sulla funzione peso:

1. w è non negativa e sommabile su I , e non è identicamente nulla su alcun sottointervallo compatto $[\alpha, \beta] \subseteq I$, con $\alpha < \beta$;
2. tutti i "momenti" $\mu_k := \int_I x^k w(x) dx$, $k \in \mathbb{N}$, esistono finiti;
3. $\mu_0 := \int_I w(x) dx > 0$.

Non è difficile dimostrare che le ipotesi ammesse sulla funzione peso w implicano che $\int_I w(x) p(x) dx > 0$, per ogni polinomio non negativo p :

Lemma. Sia $p(x) \geq 0$ un polinomio non identicamente nullo; allora

$$\int_I w(x) p(x) dx > 0.$$

DIMOSTRAZIONE. Sia, per assurdo, $\int_I w(x) p(x) dx = 0$. Poiché gli zeri di p sono in numero finito, scegliamo un intervallo $[\alpha, \beta]$, con $\alpha < \beta$, su cui p sia positivo; sia $m := \min_{x \in [\alpha, \beta]} p(x) > 0$. Per la non-negatività del prodotto $w(x)p(x)$ avremmo

$$0 \leq m \int_{\alpha}^{\beta} w(x) dx \leq \int_{\alpha}^{\beta} w(x) p(x) dx \leq \int_I w(x) p(x) dx = 0,$$

e questo implicherebbe che w è identicamente nulla su $[\alpha, \beta]$. ◁ □

Riprendiamo in considerazione i polinomi ortogonali che abbiamo studiato nel paragrafo 8.2. Salvo fattori di normalizzazione, tutti sono stati ottenuti mediante ortogonalizzazione della successione dei monomi x^k , $k \in \mathbb{N}$, rispetto ad un prodotto scalare del tipo

$$(f | g)_w := \int_I w(x) f(x) g(x) dx,$$

dove I è un opportuno intervallo e w una funzione peso definita su di esso. La tabella seguente specifica le scelte fatte caso per caso.

Tabella 8.C-1. POLINOMI ORTOGONALI

I	$w(x)$	Simbolo	Denominazione
$[-1, 1]$	1	P_n	Polinomi di Legendre
$[-1, 1]$	$(1 - x^2)^{-1/2}$	T_n	Polinomi di Čebyšev
$\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$	e^{-x}	L_n	Polinomi di Laguerre
$\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$	e^{-x^2}	H_n	Polinomi di Hermite

È immediato verificare che la funzione peso w verifica, in ciascuno dei quattro casi considerati, le ipotesi ammesse all'inizio.

Nel seguito indichiamo genericamente col simbolo p_n il polinomio ortogonale di grado n , appartenente ad una qualunque delle quattro famiglie considerate. Poiché siamo esclusivamente interessati alle proprietà di ortogonalità e agli zeri di ciascun polinomio, possiamo supporre che i polinomi in esame siano *monici* (= aventi coefficiente direttivo uguale a 1); in particolare si ha $p_0(x) = 1$.

Sappiamo che, per ogni n , i polinomi p_0, p_1, \dots, p_n costituiscono una base ortogonale dello spazio \mathcal{P}_n dei polinomi di grado $\leq n$, dove l'ortogonalità si riferisce all'appropriato prodotto scalare. Se q è un polinomio di grado $r < n$, esso può scriversi come combinazione lineare dei polinomi p_0, p_1, \dots, p_r : $q(x) = \sum_{k=0}^r c_k p_k(x)$; ne segue che esso è ortogonale a p_n :

$$(q | p_n)_w = 0. \quad (1)$$

Generalizziamo quanto già sappiamo sugli zeri dei polinomi di Legendre e di Čebyšev:

Proposizione 8.C-1. Gli zeri x_i , $i = 1, 2, \dots, n$, di p_n sono reali, semplici ed interni all'intervallo I .

DIMOSTRAZIONE. Siano x_1, x_2, \dots, x_r , $r \leq n$, gli zeri di p_n interni ad I e di molteplicità dispari, cioè quelli in corrispondenza dei quali p_n cambia segno. La nostra tesi sarà dimostrata se faremo vedere che $r = n$. Sia

$$q(x) := \prod_{k=1}^r (x - x_k);$$

il polinomio $p_n(x)q(x)$ non cambia segno su I (in quanto p_n e q cambiano segno negli stessi punti) e, salvo cambiare q in $-q$, possiamo supporre che sia $p_n(x)q(x) \geq 0$. Se fosse $r < n$, in virtù della (1) avremmo che q è ortogonale a p_n :

$$0 = (q | p_n)_w = \int_I w(x) p_n(x) q(x) dx,$$

in contraddizione con quanto ci assicura il lemma precedente. $\triangleleft \square$

La proposizione seguente ci assicura che, campionando i polinomi ortogonali p_0, p_1, \dots, p_{n-1} in n punti distinti dell'intervallo I , si ottiene una matrice invertibile.

Proposizione 8.C-2. Se i punti t_i , $i = 1, 2, \dots, n$, sono a due a due distinti, allora la matrice

$$\mathbf{A} := \begin{bmatrix} p_0(t_1) & p_0(t_2) & \dots & p_0(t_n) \\ p_1(t_1) & p_1(t_2) & \dots & p_1(t_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n-1}(t_1) & p_{n-1}(t_2) & \dots & p_{n-1}(t_n) \end{bmatrix}$$

è invertibile.

DIMOSTRAZIONE. Se \mathbf{A} fosse singolare, tale sarebbe anche la sua trasposta \mathbf{A}^T ; pertanto esisterebbe un vettore non nullo $\mathbf{c} = (c_0, c_1, \dots, c_{n-1})^T$ tale che $\mathbf{A}^T \mathbf{c} = \mathbf{0}$. Ciò significa che $\sum_{k=0}^{n-1} c_k p_k(t_i) = 0$ per $i = 1, 2, \dots, n$.

Allora il polinomio $q(x) := \sum_{k=0}^{n-1} c_k p_k(x)$, di grado $< n$, è identicamente nullo in quanto possiede n zeri distinti. Ciò è in contraddizione col fatto che i polinomi p_0, p_1, \dots, p_{n-1} sono linearmente indipendenti, in quanto ortogonali. $\triangleleft \square$

Il risultato seguente mostra che è possibile calcolare in modo approssimato un integrale del tipo considerato all'inizio, cioè $\int_I w(x) f(x) dx$, mediante una somma del tipo $\sum_{i=1}^n w_i f(x_i)$, dove i punti x_i sono gli zeri dell' n -esimo polinomio ortogonale p_n e i "pesi" w_i sono scelti in modo opportuno:

$$\int_I w(x) f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n w_i f(x_i).$$

La scelta dei punti base x_i e dei pesi ad essi relativi fa sì che la formula sia esatta ogniqualevolta f è una funzione polinomiale di grado $\leq 2n - 1$.

Proposizione 8.C-3. Siano $x_i, i = 1, 2, \dots, n$, gli zeri di p_n e sia (w_1, w_2, \dots, w_n) la soluzione del sistema

$$\sum_{i=1}^n p_k(x_i) w_i = \begin{cases} (p_0 | p_0) w, & \text{se } k = 0, \\ 0, & \text{se } k = 1, 2, \dots, n-1; \end{cases} \quad (2)$$

allora $w_i > 0$, e

$$\int_I w(x) p(x) dx = \sum_{i=1}^n w_i p(x_i) \quad (3)$$

per ogni polinomio p di grado $\leq 2n - 1$.

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo innanzitutto che la matrice del sistema (2), cioè

$$\mathbf{A} := \begin{bmatrix} p_0(x_1) & p_0(x_2) & \dots & p_0(x_n) \\ p_1(x_1) & p_1(x_2) & \dots & p_1(x_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n-1}(x_1) & p_{n-1}(x_2) & \dots & p_{n-1}(x_n) \end{bmatrix}$$

è invertibile in virtù delle due proposizioni appena dimostrate. Dunque tale sistema ammette una ed una sola soluzione. Sia p un arbitrario polinomio di grado $\leq 2n - 1$; calcoliamo il quoziente e il resto della divisione di p per p_n :

$$p(x) = q(x) p_n(x) + r(x),$$

dove q e r hanno grado $\leq n - 1$, quindi $q(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k p_k(x)$, $r(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k p_k(x)$. Allora, in base all'ortogonalità tra i polinomi p_k , si ha

$$\begin{aligned} \int_I w(x) p(x) dx &= \int_I w(x) q(x) p_n(x) dx + \int_I w(x) r(x) dx = \\ &= (q | p_n) + (r | p_0) = \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k (p_k | p_0) = \\ &= \beta_0 (p_0 | p_0). \end{aligned}$$

D'altra parte $p(x_i) = r(x_i)$, in quanto $p_n(x_i) = 0$ per ogni i , quindi, sfruttando il fatto che i pesi w_i sono soluzioni del sistema (3), si ha

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n w_i p(x_i) &= \sum_{i=1}^n w_i r(x_i) = \sum_{i=1}^n w_i \left(\sum_{k=0}^{n-1} \beta_k p_k(x_i) \right) = \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k \left(\sum_{i=1}^n p_k(x_i) w_i \right) = \\ &= \beta_0 (p_0 | p_0). \end{aligned}$$

La (3) è dunque dimostrata. Se $x_i, i = 1, 2, \dots, n$, sono n punti interni all'intervallo I e w_i sono pesi corrispondenti per cui valga la (3) per ogni polinomio p di grado $\leq 2n - 1$, allora necessariamente i pesi sono tutti positivi. Basta infatti considerare i polinomi di grado $2n - 2$

$$q_j(x) := \prod_{\substack{h=1 \\ h \neq j}}^n (x - x_h)^2.$$

In virtù del lemma iniziale e di quanto appena dimostrato si ha

$$0 < \int_I w(x) q_j(x) dx = \sum_{i=1}^n w_i q_j(x_i) = w_j q_j(x_j) = w_j \prod_{\substack{h=1 \\ h \neq j}}^n (x_j - x_h)^2,$$

dunque ciascun w_j è positivo in quanto rapporto tra quantità positive. $\triangleleft \square$

Osserviamo che le più semplici *formule di quadratura*, cioè la formula dei rettangoli, quella di trapezi e la formula di Simpson, approssimano l'integrale di f su un intervallo compatto $[a, b]$ mediante una somma del tipo $\sum_{i=1}^n w_i f(x_i)$, dove i punti x_i sono equispaziati nell'intervallo in questione. La scelta dei punti x_i come zeri del polinomio p_n (si tratta di punti non equispaziati) consente di ottenere una più elevata precisione rispetto alle formule citate.

Un integrale sull'intervallo compatto $I = [a, b]$ con peso $w(x) = 1$ può sempre essere riportato ad un integrale analogo su $[-1, 1]$ mediante il cambiamento di variabile

$$t = \frac{2x - a - b}{b - a}.$$

Siamo dunque nel caso dei polinomi di Legendre; i risultati che stiamo riportando sono dovuti a Gauss, e sono spesso citati come *formule di quadratura gaussiane*.

Nella Tabella seguente diamo alcuni valori dei punti x_i e dei relativi pesi w_i , per valori di n da 1 a 5.

Tabella 8.C-1. FORMULE DI QUADRATURA GAUSSIANE

n	w_i	x_i
1	$w_1 = 2$	$x_1 = 0$
2	$w_1 = w_2 = 1$	$x_2 = -x_1 = 0.577350\dots$
3	$w_1 = w_3 = 5/9$ $w_2 = 8/9$	$x_3 = -x_1 = 0.774596\dots$ $x_2 = 0$
4	$w_1 = w_4 = 0.347854\dots$ $w_2 = w_3 = 0.652145\dots$	$x_4 = -x_1 = 0.861136\dots$ $x_3 = -x_2 = 0.339981\dots$
5	$w_1 = w_5 = 0.236926\dots$ $w_2 = w_4 = 0.478628\dots$ $w_3 = 0.568888\dots$	$x_5 = -x_1 = 0.906179\dots$ $x_4 = -x_2 = 0.538469\dots$ $x_3 = 0$

Si osservi che la prima equazione del sistema (2) si scrive semplicemente

$$\sum_{i=1}^n w_i = \int_I w(x) dx;$$

essa corrisponde al fatto che la (3) è esatta per la funzione costante 1. Nel caso dei polinomi di Legendre l'ultimo integrale vale 2.

Appendice 8-D. Teoremi di confronto per equazioni differenziali lineari del secondo ordine

In questa appendice vogliamo fornire alcuni classici teoremi di confronto per le soluzioni di equazioni differenziali lineari omogenee del secondo ordine. Considereremo equazioni in forma auto-aggiunta, che scriveremo, per ragioni di comodità,

$$(py')' + qy = 0. \quad (1)$$

Ricordiamo innanzitutto che, per ogni punto x_0 appartenente all'intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$ dove la (1) è definita, esiste una ed una sola soluzione che verifichi le *condizioni iniziali*

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1,$$

comunque siano assegnati i valori y_0 e y_1 . Ne seguono due semplici conseguenze:

1. Se y è una soluzione dell'equazione (1) che possiede in un punto x_0 uno zero multiplo, dunque $y(x_0) = y'(x_0) = 0$, allora essa è identicamente nulla. In forma equivalente: le soluzioni non identicamente nulle della (1) ammettono al più zeri semplici, dunque zeri in corrispondenza dei quali esse cambiano segno.
2. Se due soluzioni y_1 e y_2 dell'equazione (1) si annullano in un medesimo punto x_0 , allora esse sono linearmente dipendenti, cioè tra loro proporzionali. Infatti la funzione $x \mapsto y_1'(x_0)y_2(x) - y_2'(x_0)y_1(x)$ è identicamente nulla in quanto si annulla in x_0 assieme alla sua derivata prima.

Consideriamo due equazioni del tipo (1) che abbiano gli stessi coefficienti per le derivate prima e seconda dell'incognita, e differiscano per il coefficiente q :

$$(py')' + q_1 y = 0, \quad (py')' + q_2 y = 0.$$

Vogliamo trarre informazioni sul comportamento qualitativo delle soluzioni dell'una equazione, note le soluzioni dell'altra. Cominciamo con un semplice esempio.

Esempio 8.D-1. Consideriamo due equazioni del tipo *oscillatore armonico*

$$y'' + \omega_1^2 y = 0, \quad y'' + \omega_2^2 y = 0,$$

unitamente a condizioni iniziali del tipo $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. Otteniamo le *risposte impulsive*

$$y_1(t) = \frac{1}{\omega_1} \sin(\omega_1 t), \quad y_2(t) = \frac{1}{\omega_2} \sin(\omega_2 t).$$

Si tratta di due funzioni periodiche di periodi rispettivamente $T_1 = 2\pi/\omega_1$, $T_2 = 2\pi/\omega_2$. Se $\omega_2 > \omega_1$, gli zeri di y_1 sono intervallati di T_1 , mentre quelli di y_2 sono intervallati di $T_2 < T_1$; dunque tra due zeri consecutivi di y_1 cade necessariamente uno zero di y_2 . $\triangleleft \square$

Il teorema seguente è dovuto a J. Sturm:

Proposizione 8.D-1. Siano date le equazioni differenziali

$$L_1[y] = (py')' + q_1 y = 0, \quad L_2[y] = (py')' + q_2 y = 0$$

su un intervallo I della retta reale, e sia $p(x) > 0$, $q_2(x) \geq q_1(x)$ per ogni $x \in I$. Se y_1 è una soluzione della prima equazione che ha due zeri consecutivi nei punti $a, b \in I$ (cioè $y_1(a) = y_1(b) = 0$, $y_1(x) \neq 0$, per $a < x < b$), allora ogni soluzione y_2 della seconda equazione si annulla in un punto (almeno) dell'intervallo (a, b) , a patto che sia $q_1 \neq q_2$. Se poi $q_1 = q_2$, dunque y_1 e y_2 sono soluzioni della stessa equazione, il risultato sussiste a patto che esse siano linearmente indipendenti.

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo osservato all'inizio che gli zeri di y_1 sono necessariamente semplici, dunque $y_1'(a) \neq 0$, $y_1'(b) \neq 0$. Cambiando, se necessario, y_1 in $-y_1$, possiamo supporre che y_1 sia > 0 tra a e b , dunque

$$y_1'(a) > 0, \quad y_1'(b) < 0.$$

Supponiamo, per assurdo, che y_2 sia diversa da 0 per ogni $x \in (a, b)$; possiamo supporre che essa sia > 0 in tale intervallo. Moltiplichiamo la prima equazione per y_2 , la seconda per y_1 , integriamo sull'intervallo $[a, b]$ e facciamo la differenza tra le uguaglianze ottenute. Abbiamo:

$$\begin{aligned} \int_a^b (q_2 - q_1) y_1 y_2 dx &= \int_a^b [(p y_1')' y_2 - (p y_2')' y_1] dx = \\ &= \int_a^b [p (y_1' y_2 - y_2' y_1)]' dx = \\ &= p(b) y_1'(b) y_2(b) - p(a) y_1'(a) y_2(a). \end{aligned}$$

Abbiamo sfruttato il fatto che $y_1(a) = y_1(b) = 0$.

Se $q_1 \neq q_2$ il primo integrale è > 0 , mentre l'ultima quantità è ≤ 0 , in quanto la condizione di positività di y_2 all'interno dell'intervallo $[a, b]$ implica che essa è non negativa agli estremi dello stesso intervallo. Abbiamo dunque una contraddizione.

Se poi $q_1 = q_2$, il primo integrale è nullo, mentre si ha necessariamente $y_2(a) > 0$ e $y_2(b) > 0$; dunque l'ultima quantità è maggiore di 0: ancora una contraddizione. Si tenga presente che y_2 e y_1 sono soluzioni della stessa equazione e dunque, in quanto linearmente indipendenti, non possono avere zeri in comune. $\triangleleft \square$

Possiamo ulteriormente precisare quanto accade nel caso di due soluzioni linearmente indipendenti, siano y_1 e y_2 , di una medesima equazione $L[y] = (p y')' + q y = 0$. Tra due zeri consecutivi di y_1 cade uno ed un solo zero di y_2 . In caso contrario, cioè ove cadessero due zeri di y_2 , tra tali zeri cadrebbe uno zero di y_1 (potendosi scambiare i ruoli di y_1 e y_2), in contraddizione col fatto che abbiamo considerato zeri *consecutivi* di y_1 .

In breve: *gli zeri di due soluzioni linearmente indipendenti di una medesima equazione differenziale omogenea del secondo ordine si separano mutuamente.*

Si pensi alle soluzioni $y_1(x) = \sin \omega x$ e $y_2(x) = \cos \omega x$ dell'equazione dell'oscillatore armonico $y'' + \omega^2 y = 0$.

Nella restante parte di questa Appendice consideriamo equazioni del tipo

$$y''(x) + q(x)y(x) = 0,$$

dove q è una funzione continua su un assegnato intervallo I della retta reale, illimitato superiormente. Supponiamo che q sia strettamente positiva su I , nel senso che esistono due costanti positive m e M per cui si abbia

$$m^2 \leq q(x) \leq M^2$$

per ogni $x \in I$. Applichiamo innanzitutto il teorema di Sturm alle equazioni

$$L_1[y] = y'' + m^2 y = 0, \quad L_2[y] = y'' + q y = 0.$$

Sia y una soluzione (non nulla) della seconda equazione, e sia x_0 un punto ad arbitrio di I . Nell'intervallo $[x_0, x_0 + \pi/m]$ cade almeno uno zero di y in quanto x_0 e $x_1 := x_0 + \pi/m$ sono zeri consecutivi della funzione $x \mapsto \sin[m(x - x_0)]$, che è soluzione della prima equazione.

Dall'arbitrarietà di x_0 segue che y ha "carattere oscillatorio", cioè essa possiede un'infinità numerabile di zeri semplici, in corrispondenza di ciascuno dei quali essa cambia segno. Tale zeri sono "abbastanza fitti", nel senso che la distanza tra due zeri consecutivi, sia δ , non supera π/m . Infatti se \bar{x}_0 e \bar{x}_1 fossero due zeri consecutivi di y per cui si avesse

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_0 > \pi/m$$

potremmo scegliere x_0 in modo da avere

$$\bar{x}_0 < x_0 < x_1 < \bar{x}_1,$$

e l'intervallo $[x_0, x_1]$ non conterrebbe alcuno zero di y , in contraddizione con quanto appena dimostrato.

Ma gli zeri di y non sono “troppo fitti”, nel senso che la distanza tra due di essi, tra loro consecutivi, non può scendere al disotto di π/M . Se infatti esistessero due zeri consecutivi \bar{x}_0 e \bar{x}_1 di y per cui si avesse

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_0 < \pi/M$$

potremmo scegliere x_0 in modo da avere

$$x_0 < \bar{x}_0 < \bar{x}_1 < x_1 := x_0 + \pi/M,$$

e l'intervallo $[\bar{x}_0, \bar{x}_1]$ non conterrebbe alcuno zero della funzione $x \mapsto \sin[M(x - x_0)]$ che è soluzione dell'equazione $y'' + M^2 y = 0$. Ciò è in contraddizione col teorema di Sturm applicato alle equazioni

$$L_1[y] = y'' + qy = 0, \quad L_2[y] = y'' + M^2 y = 0.$$

È dunque dimostrata la

Proposizione 8.D-2. Sia data l'equazione $y''(x) + q(x)y(x) = 0$, nell'intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$, illimitato superiormente. Se esistono due costanti positive m e M per cui si abbia

$$0 < m^2 \leq q(x) \leq M^2$$

per ogni $x \in I$, ogni soluzione (non nulla) y dell'equazione data ha carattere oscillatorio su I e la distanza δ tra due zeri consecutivi di y verifica le limitazioni

$$\frac{\pi}{M} \leq \delta \leq \frac{\pi}{m}. \quad (2)$$

Una notevole applicazione della proposizione precedente ci consente di dimostrare il carattere oscillatorio delle funzioni di Bessel. Consideriamo l'equazione di Bessel in forma auto-aggiunta

$$xy'' + y' + \left(x - \frac{\nu}{x}\right)y = 0 \quad \iff \quad (xy')' + \left(x - \frac{\nu}{x}\right)y = 0.$$

Operiamo il cambiamento di funzione

$$z(x) = \sqrt{x}y(x) \quad \iff \quad y(x) = \frac{z(x)}{\sqrt{x}}, \quad x > 0.$$

Gli zeri di y coincidono con quelli di z . Una derivazione fornisce

$$z'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}y(x) + \sqrt{x}y'(x) \quad \iff \quad \sqrt{x}z'(x) = \frac{1}{2}y(x) + xy'(x)$$

cioè

$$xy'(x) = \sqrt{x}z'(x) - \frac{1}{2}y(x) = \sqrt{x}z'(x) - \frac{1}{2\sqrt{x}}z(x).$$

Un'ulteriore derivazione fornisce

$$\begin{aligned} (xy'(x))' &= \frac{1}{2\sqrt{x}}z'(x) + \sqrt{x}z''(x) + \frac{1}{4x\sqrt{x}}z(x) - \frac{1}{2\sqrt{x}}z'(x) = \\ &= \sqrt{x}z''(x) + \frac{1}{4x\sqrt{x}}z(x). \end{aligned}$$

Sostituendo nell'equazione di Bessel si ottiene in definitiva l'equazione

$$z''(x) + \left(1 + \frac{1 - 4\nu^2}{4x^2}\right)z(x) = 0,$$

dunque un'equazione del tipo $z'' + qz = 0$, dove

$$q(x) = 1 + \frac{1 - 4\nu^2}{4x^2}.$$

Osserviamo innanzitutto che se $\nu^2 = 1/4$, q si riduce alla costante 1, e la nostra equazione si scrive $z'' + z = 0$. Le soluzioni non nulle di tale equazione possiedono zeri equispaziati della quantità π . Ciò è in accordo con quanto sappiamo sull'equazione di Bessel per $\nu = 1/2$: la sua soluzione generale si scrive

$$c_1 J_{1/2}(x) + c_2 J_{-1/2}(x) = c_1 \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x + c_2 \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x.$$

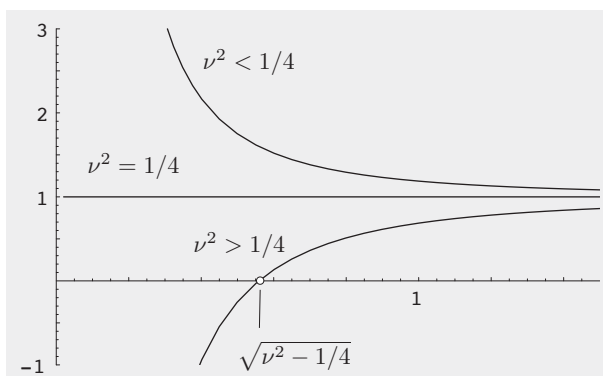


Figura 8.D-1.
Andamento della
funzione q .

Sia $\nu^2 < 1/4$; la funzione q è strettamente decrescente e > 1 . Scelto un $x_0 > 0$ ad arbitrio, per $x \geq x_0$ abbiamo

$$1 \leq q(x) \leq q(x_0) = 1 + \frac{1 - 4\nu^2}{4x_0^2};$$

la (2) diventa dunque

$$\frac{\pi}{\sqrt{1 + (1 - 4\nu^2)/(4x_0^2)}} \leq \delta \leq \pi.$$

Se invece $\nu^2 > 1/4$ la funzione

$$q(x) = 1 - \frac{4\nu^2 - 1}{4x^2}$$

è strettamente crescente e < 1 ; essa si annulla per $x = \sqrt{\nu^2 - 1/4}$. Scelto ad arbitrio $x_0 > \sqrt{\nu^2 - 1/4}$, per $x \geq x_0$ abbiamo

$$1 - \frac{4\nu^2 - 1}{4x_0^2} = q(x_0) \leq q(x) \leq 1;$$

la (2) diventa dunque

$$\pi \leq \delta \leq \frac{\pi}{\sqrt{1 - (4\nu^2 - 1)/(4x_0^2)}}.$$

Resta dunque dimostrato che ogni funzione di Bessel J_ν ammette una successione di zeri, diciamo $\xi_{\nu,1}, \xi_{\nu,2}, \xi_{\nu,3}, \dots$, dove $0 < \xi_{\nu,1} < \xi_{\nu,2} < \xi_{\nu,3} < \dots$, e

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \xi_{\nu,k} = +\infty.$$

Per valutare il limite per $k \rightarrow \infty$ della distanza

$$\delta_{\nu,k} := \xi_{\nu,k+1} - \xi_{\nu,k},$$

possiamo scegliere x_0 arbitrariamente grande. Poiché $q(x_0)$ tende a 1 per $x_0 \rightarrow \infty$, quale che sia ν , ne concludiamo che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \delta_{\nu, k} = \pi.$$

A parole: la distanza tra due zeri consecutivi di J_ν tende a π .

Appendice 8-E. La funzione ipergeometrica

Si chiama equazione *ipergeometrica* l'equazione differenziale

$$x(1-x)y'' + [c - (a+b+1)x]y' - aby = 0, \quad (1)$$

dove a , b e c sono parametri reali. Il metodo delle serie di potenze applicato a tale equazione conduce alla formula ricorsiva

$$a_{k+1} = \frac{(a+k)(b+k)}{(1+k)(c+k)} a_k,$$

a patto che c non sia un intero ≤ 0 . Pertanto, se si pone $a_0 = 1$, si perviene alla serie *ipergeometrica*

$$1 + \sum_{k \geq 1} \frac{a(a+1) \dots (a+k-1) b(b+1) \dots (b+k-1)}{k! c(c+1) \dots (c+k-1)} x^k. \quad (2)$$

Se $a = 1$, $b = c$, essa si riduce all'ordinaria serie geometrica. Altre serie di uso corrente si ottengono per opportune scelte dei parametri a , b e c , come vedremo negli esercizi al termine di questa Appendice. Se si introduce il simbolo $(x)^k := x(x+1)(x+2) \dots (x+k-1)$, $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}^*$, con la convenzione $(x)^0 := 1$, allora si può scrivere la serie ipergeometrica nella forma

$$\sum_{k \geq 0} \frac{(a)^k (b)^k}{k! (c)^k} x^k. \quad (2')$$

Applicando il criterio del rapporto (\uparrow pag. 137) si dimostra che il raggio di convergenza della serie scritta è 1. La somma di tale serie è la *funzione ipergeometrica* di parametri a , b e c :

$$F(a, b, c; x) = \sum_{k \geq 0} \frac{(a)^k (b)^k}{k! (c)^k} x^k. \quad (3)$$

Si osservi che se a , oppure b , è intero negativo, F si riduce ad un polinomio.

Oltre al simbolo $(x)^k$, detto *fattoriale crescente* di indici x e k , si introduce il *fattoriale decrescente*

$$(x)_k := x(x-1)(x-2) \dots (x-k+1), \quad (4)$$

con la convenzione $(x)_0 := 1$. Si ha facilmente l'uguaglianza

$$(x)_k = (x-k+1)^k; \quad (5)$$

in particolare, per ogni $n \in \mathbb{N}^*$, $(n)_n = (1)^n = n!$. Si ha anche subito, per ogni coppia di naturali n e k

$$\binom{n}{k} = \frac{(n)_k}{k!}, \quad (6)$$

formula che fornisce il valore 0 per $k > n$, in accordo con l'interpretazione combinatoria dei coefficienti binomiali. Infine

$$(x)_k = (-1)^k (-x)^k. \quad (7)$$

In Calcolo delle Probabilità si considera l'estrazione (senza reimmissione) di n individui da una popolazione costituita da n_1 individui di tipo 1 ed n_2 individui di tipo 2, con $n \leq n_1 + n_2$. Si considera la variabile aleatoria X che conta il numero di individui di tipo 1 su n estratti; la distribuzione corrispondente viene detta *ipergeometrica*.

La probabilità di avere k elementi di tipo 1 su n estratti vale

$$p_k = \frac{\binom{n_1}{k} \binom{n_2}{n-k}}{\binom{n_1+n_2}{n}} = \frac{(n_1)_k (n_2)_{n-k}}{k! (n-k)! (n_1+n_2)_n} = \frac{(n_1)_k (n_2)_{n-k} (n)_k}{k! (n_1+n_2)_n}.$$

Abbiamo sfruttato il fatto che $n!/(n-k)! = (n)_k$. Se $n \leq n_2$ possiamo moltiplicare e dividere per $(n_2)_n$; poiché tale quantità è il prodotto di n interi consecutivi, in ordine decrescente da n_2 a $n_2 - n + 1$, mentre $(n_2)_{n-k}$ è l'analogo prodotto di $n - k$ interi consecutivi a partire da n_2 , il quoziente $(n_2)_n/(n_2)_{n-k}$ vale $(n_2 - n + 1)^k$. Dunque

$$p_k = \frac{(n_2)_n}{(n_1+n_2)_n} \frac{(n_1)_k (n)_k}{k! (n_2 - n + 1)^k} = \frac{(n_2)_n}{(n_1+n_2)_n} \frac{(-n_1)^k (-n)^k}{k! (n_2 - n + 1)^k};$$

l'ultimo passaggio segue da una doppia applicazione della (7).

Possiamo allora scrivere la funzione generatrice della variabile aleatoria ipergeometrica:

$$\begin{aligned} \psi(x) &:= \sum_{k=0}^n p_k x^k = \frac{(n_2)_n}{(n_1+n_2)_n} \sum_{k=0}^n \frac{(-n_1)^k (-n)^k}{k! (n_2 - n + 1)^k} x^k = \\ &= \frac{(n_2)_n}{(n_1+n_2)_n} F(-n_1, -n, n_2 - n + 1; x). \end{aligned} \tag{8}$$

Si tratta di un polinomio avente come grado il minimo tra n_1 e n . Ad esempio, se $n_1 = 4, n_2 = 6$, per n da 1 a 6 abbiamo le funzioni generatrici mostrate nella Tabella 8.D-1.

Tabella 8.D-1. ALCUNE FUNZIONI GENERATRICI DELLA V.A. IPERGEOMETRICA

n	$\psi(x)$	$n_1 = 4, n_2 = 6$
1	$3/5 + (2x)/5$	
2	$1/3 + 8x/15 + 2x^2/15$	
3	$1/6 + x/2 + 3x^2/10 + x^3/30$	
4	$1/14 + 8x/21 + 3x^2/7 + 4x^3/35 + x^4/210$	
5	$1/42 + 5x/21 + 10x^2/21 + 5x^3/21 + x^4/42$	
6	$1/210 + 4x/35 + 3x^2/7 + 8x^3/21 + x^4/14$	

Dall'uguaglianza $\psi(1) := \sum_{k=0}^n p_k = 1$, deduciamo l'identità

$$F(-n_1, -n, n_2 - n + 1; 1) = \frac{(n_1+n_2)_n}{(n_2)_n}. \tag{9}$$

Ponendo

$$\begin{cases} a = -n_1 \\ b = -n \\ c = n_2 - n + 1 \end{cases} \iff \begin{cases} n_1 = -a \\ n_2 = c - b - 1 \\ n = -b \end{cases}$$

essa può scriversi in forma equivalente

$$F(a, b, c; 1) = \frac{(c - a - b - 1)_{-b}}{(c - b - 1)_{-b}}. \tag{9'}$$

La funzione generatrice può essere utilizzata per il calcolo della media e della varianza della v.a. X , analogamente a quanto abbiamo mostrato nell'Appendice 4-B. Si trovano i valori

$$E[X] = np, \quad \text{Var}[x] = np(1-p) \frac{n_1 + n_2 - n}{n_1 + n_2 - 1} = np(1-p) \left(1 - \frac{n-1}{n_1 + n_2 - 1} \right),$$

dove abbiamo utilizzato il parametro

$$p := \frac{n_1}{n_1 + n_2}.$$

Esso può essere interpretato come la probabilità di ottenere un individuo di tipo 1 alla prima estrazione.

Il calcolo è piuttosto laborioso; agli stessi risultati si perviene più agevolmente considerando X come somma di n v.a.: $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, tra loro *non indipendenti*, dove ciascuna X_k segue una legge di Bernoulli di parametro p .

Limitiamoci a mostrare l'utilizzo della funzione generatrice per il calcolo della media. Derivando termine a termine la serie ipergeometrica si ottiene la relazione

$$\begin{aligned} F'(a, b, c; x) &= \sum_{k \geq 1} \frac{(a)^k (b)^k}{k! (c)^k} k x^{k-1} = \frac{ab}{c} \sum_{k \geq 1} \frac{(a+1)^{k-1} (b+1)^{k-1}}{(k-1)! (c+1)^{k-1}} x^{k-1} = \\ &= \frac{ab}{c} \sum_{k \geq 0} \frac{(a+1)^k (b+1)^k}{k! (c+1)^k} x^k = \frac{ab}{c} F(a+1, b+1, c+1; x); \end{aligned}$$

abbiamo sfruttato il fatto che $(x)^k = x(x+1)^{k-1}$.

Abbiamo allora

$$\psi'(x) = \frac{(n_2)_n}{(n_1 + n_2)_n} \frac{n_1 \cdot n}{n_2 - n + 1} F(-n_1 + 1, -n + 1, n_2 - n + 2; x).$$

A questo punto possiamo utilizzare la (9'), ottenendo

$$E[X] = \psi'(1) = \frac{(n_2)_n}{(n_1 + n_2)_n} \frac{n_1 \cdot n}{n_2 - n + 1} \frac{(n_1 + n_2 - 1)_n}{(n_2)_{n-1}} = n \frac{n_1}{n_1 + n_2}.$$

Abbiamo sfruttato il fatto che $(n_2 - n + 1) \cdot (n_2)_{n-1} = (n_2)_n$.

Se si considera un'estrazione *con reimmissione* di n individui da una popolazione costituita da n_1 individui di tipo 1 e n_2 individui di tipo 2, la v.a. Y che conta gli individui di tipo 1 segue una legge binomiale di parametri n e p , a cui compete una media uguale a np ed una varianza uguale a $np(1-p)$ (↑ Appendice 4-B). Dunque le v.a. X e Y hanno la stessa media, mentre la varianza di X tende alla varianza di Y se n_1 e n_2 tendono all'infinito mantenendosi proporzionali tra loro, in modo che p resti costante.

Intuitivamente: se la popolazione è "molto grande", l'estrazione senza reimmissione non differisce dall'estrazione con reimmissione.

Esercizi

8.E-1. Verificare le identità:

$$F(1, 1, 1; x) = 1 + x + \dots + x^n + \dots = \frac{1}{1-x}, \quad |x| < 1,$$

$$F(-n, 1, 1; x) = (1+x)^n.$$

8.E-1. Verificare che, per $|x| < 1$,

$$\ln(1+x) = x F(1, 1, 2; x), \quad \ln \frac{1+x}{1-x} = 2x F(1/2, 1, 3/2; x).$$

8.E-3. Verificare che, per $|x| < 1$,

$$\arctan x = x F(1/2, 1, 3/2; -x^2), \quad \arcsin x = x F(1/2, 1/2, 3/2; x^2).$$

Bibliografia

- [1] J. Bass, *Cours de Mathématiques*, 3 voll., Masson (Paris), 1978;
- [2] E. De Castro, *Complementi di Analisi Matematica*, Zanichelli (Bologna), 1961;
- [3] G.C. Dorner, J.M. Ferrard, H. Lemberg, *Visual Mathematics, Illustrated by the TI-92 and the TI-89*, Springer (New York), 2000;
- [4] G.B. Folland, *Fourier Analysis*, Wadsworth & Brooks/Cole, 1992;
- [5] A. Ghizzetti, F. Mazzarella, A. Ossicini, *Lezioni di complementi di matematica*, Editoriale Veschi (Milano), 1989;
- [6] G. Gilardi, *Analisi tre*, McGraw-Hill Libri Italia (Milano), 1994;
- [7] E. Hairer, G. Wanner, *Analysis by Its History*, Springer (New York), 1996;
- [8] A.N. Kolmogorov, S.V. Fomin, *Elementi di teoria delle funzioni e analisi funzionale* [in russo], Nauka (Mosca), 1972;
- [9] E. Kreyszig, *Advanced Engineering Mathematics*, J: Wiley (New York), 1988;
- [10] T. Needham, *Visual Complex Analysis*, Oxford University Press (Oxford), 1998;
- [11] A.N. Tikhonov, A.A. Samarskij, *Equazioni della fisica matematica* [in russo], Nauka (Mosca), 1972;
- [12] V.S. Vladimirov, *Equazioni della fisica matematica*, Edizioni Mir (Mosca), 1987.

Indice analitico

A

argomento in \mathbb{C} , 110
 armonica fondamentale, 105
 ascissa di convergenza, 197
 autofunzione, 291
 autovalore, 291

B

base, 5
 Bessel F.W., 34
 –, funzioni di, 335 ss.

C

campo, 1
 campo complesso, 109
 – finito, 39
 Čebyšev P.L., 134, 296
 circuito, 143
 condizione di integrabilità di Riemann, 45
 condizioni di Cauchy-Riemann, 123, 126
 confronto tra norme, 13
 congruenza, 38
 coniugato di un numero complesso, 109
 convergenza dominata, 62
 – monotona, 63
 – nello spazio \mathcal{D} , 270
 – – – \mathcal{D}' , 277
 – – – \mathcal{S} , 281
 – secondo Cesàro, 92
 – totale, 90
 – uniforme, 12
 – – delle serie di Fourier, 90
 convoluzione, 142, 212, 251
 coordinate polari nel piano, 349
 – ortogonali nello spazio, 350
 corona circolare, 171
 criterio di Dini, 84
 – – Dirichlet, 86
 curva regolare, 143

D

delta di Dirac, 199, 271
 derivata della L -trasformata, 202
 – di una distribuzione, 278
 – in \mathbb{C} , 121
 derivazione termine a termine di una serie di potenze, 137
 differenziale, 122

dimensione, 5
 Dini U., 84
 disuguaglianza di Bessel, 33, 75
 – – Cauchy, 166
 – – Schwarz, 23
 distanza, 9
 distribuzione, 270 ss.
 – dispari, 277
 – pari, 277
 – omogenea, 277
 – temperata, 282
 Dirichlet, P.G., 46
 –, nucleo di, 83

E

equazione del calore, 319
 – delle onde, 327
 – di Bessel, 336
 equazioni differenziali ordinarie, 225 ss.
 – normali, 42

F

famiglia ortogonale, 25
 fenomeno di Gibbs, 106
 formula di Cauchy, 155
 – – De Moivre, 111
 – – dualità per la F -trasformata, 243
 – – Rodrigues, 300
 – – sommazione di Poisson, 288
 formule di quadratura, 358
 Fourier, J.B., 35
 frequenza fondamentale, 102
 funzione a crescita lenta, 282
 – – decrescenza rapida, 253
 – analitica, 158
 – armonica, 160
 – assolutamente continua, 66
 – beta di Eulero, 218
 – continua, 15
 – degli errori, 72
 – di Dirichlet, 46
 – – Green, 315
 – – tipo esponenziale, 198
 – – Heaviside, 198
 – – trasferimento, 229
 – esponenziale in \mathbb{C} , 125
 – gamma di Eulero, 215
 – gaussiana, 65, 249
 – generatrice, 185
 – ipergeometrica, 366

funzione localmente sommabile, 269

- logaritmo in \mathbb{C} , 128
- misurabile, 53
- olomorfa, 124
- periodica, 101
- potenza in \mathbb{C} , 129
- R -integrabile, 45
- semplice, 54
- sinc, 237, 260
- sommabile, 56
- test, 269

funzioni circolari in \mathbb{C} , 130

- di Bessel, 335 ss.
- – Hankel, 341
- iperboliche in \mathbb{C} , 132

G

Gauss C.F., 110
gradino unitario, 198

H

Hilbert D., 28

I

identità del parallelogramma, 24

- di Lagrange, 292
- – Parseval, 77, 99

indice di avvolgimento, 157

insieme aperto, 111

- – connesso, 115
- – semplicemente connesso, 144
- misurabile, 52

intorno in \mathbb{C} , 111

integrale di Lebesgue, 56

- in \mathbb{C} , 144
- per funzioni semplici, 55

integralseno, 58

intervallo in \mathbb{R}^n , 50

inversa generalizzata, 42

inversione della L -trasformata, 219

- – F -trasformata, 241

isomorfismo (tra s.v.), 7

L

lemma di Abel, 135

- – Jordan, 182
- – Riemann-Lebesgue, 81

limite in \mathbb{C} , 115

lineare indipendenza, 4

M

matrice di Gram, 32

metodo dei coefficienti indeterminati, 176

- delle serie di potenze, 331
- di D'Alembert, 330

misura di Lebesgue, 50

- esterna, 51

N

norma, 7

norma indotta da un prodotto scalare, 23

nucleo di Fejér, 94

- – Dirichlet, 83

O

ordine esponenziale, 198

ortogonalità delle autofunzioni, 294

P

palla, 11

parte caratteristica, 171

- regolare, 171

pluri-intervallo, 50

polinomi di Legendre, 37, 295, 299

- – Čebyšev, 134, 296, 307

– ortogonali, 299 ss.

poligonale, 144

polinomio caratteristico, 226

- di Fejér, 93
- – Fourier, 35, 74 ss.

– irriducibile, 40

– trigonometrico, 27, 73

polo, 168

primitiva, 146

principio di identità, 164

- – sovrapposizione, 328

problema di Sturm-Liouville, 291

– lineare dei minimi quadrati, 41 ss.

procedimento di Gram-Schmidt, 36

prodotto scalare, 22

prolungamento analitico, 165

proiezione ortogonale, 31

proprietà delle autofunzioni, 292, 297

punto singolare isolato, 167

Q

quasi ovunque (q.o.), 61

R

radice n -esima in \mathbb{C} , 119

raggio di convergenza, 136

rappresentazione conforme, 133

- stereografica dei numeri complessi, 113, 187

regione fondamentale, 111

residuo, 169

Riemann B., 45

ripetizione periodica di una funzione, 287

risposta impulsiva, 225

S

segnale, 201

separazione delle variabili, 320 ss.

serie bilatera, 171

– di Fourier, 74 ss.

serie di Fourier-Bessel, 346

serie di Laurent, 172

– ipergeometrica, 366

sfera di Riemann, 112

singolarità eliminabile, 168

– essenziale, 169

soluzione fondamentale, 229

somma inferiore, 45

– superiore, 45

sottospazio, 3

spazio di Banach, 17

– di Hilbert, 28

– euclideo, 26

– metrico, 9

– \mathcal{D} , 269

– \mathcal{S} , 253, 281

– vettoriale, 2

spettro di ampiezza, 104

– fase, 104

successione ortonormale totale, 97

T

teorema dell'alternativa, 6

– dei residui, 179

– del valore finale, 210

– dell'indice logaritmico, 180

– di B. Levi, 64

– Cauchy-Hadamard, 136

– Fubini, 64

– Goursat, 161

– Lebesgue, 62

– Liouville, 166

teorema di localizzazione di Riemann, 84

– Morera, 160

– Pitagora, 25

– Plancherel, 258

– Riesz-Fischer, 96

– Shannon, 260

– Tonelli, 65

– fondamentale dell'algebra, 166

– integrale di Cauchy, 152

teoremi di confronto per equazioni

differenziali del secondo ordine, 362

trasformata di Fourier, 235 ss.

– di una distribuzione temperata, 283

– Laplace, 197 ss.

– discreta di Fourier, 263

trasformazione lineare, 6

– continua, 16

U

uniforme convergenza, 12

V

valore assoluto in \mathbb{C} , 110

vettori ortogonali, 25

W

Weierstrass K., 167

Z

zeri di una funzione analitica, 164