Sia $X(f)$ la sua trasformata di Fourier:

$$X(f) = \int_{-a}^{a} e^{-i2\pi f t}\, x(t)\, dt;$$

un confronto con l'espressione di c_n mostra che vale l'uguaglianza

$$c_n = \frac{1}{2a}\, X\Big(\frac{n}{2a}\Big) = f_0\, X(nf_0), \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{3}$$

Sia y una funzione analoga alla x e sia y_0 la funzione ottenuta da y annullandola fuori dell'intervallo $[-a, a]$. Indichiamo con Y la trasformata di Fourier di y_0 e calcoliamo i coefficienti di Fourier della funzione periodica di periodo $2a$ che vale $e^{i2\pi f t} y(t)$ per $t \in [-a, a]$. Per ogni $f \in \mathbb{R}$ si trova, con un calcolo analogo a quello che ha condotto alla (3), l'uguaglianza

$$\gamma_n = \frac{1}{2a}\, Y\Big(\frac{n}{2a} - f\Big) = f_0\, Y(nf_0 - f), \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{3'}$$

Applichiamo ora alle due funzioni considerate l'identità di Parseval (2); otteniamo

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} x(t)\, e^{-i2\pi f t}\, y(t)\, dt &= 2a \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2a}\, X\Big(\frac{n}{2a}\Big)\, \frac{1}{2a}\, \overline{Y\Big(\frac{n}{2a}\Big)} = \\ &= \frac{1}{2a} \sum_{n\in\mathbb{Z}} X\Big(\frac{n}{2a}\Big)\, \overline{Y\Big(\frac{n}{2a}\Big)}.\end{aligned} \tag{4}$$

Scegliamo infine come y la costante 1, quindi y_0 è la funzione caratteristica dell'intervallo $[-a, a]$, la cui F-trasformata abbiamo ricordato all'inizio di questo paragrafo. A primo membro della (4) troviamo la F-trasformata di x_0, dunque

$$X(f) = \frac{1}{2a} \sum_{n\in\mathbb{Z}} X\Big(\frac{n}{2a}\Big)\, 2a\,\mathrm{sinc}\Big(2a\,\Big(\frac{n}{2a} - f\Big)\Big) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} X\Big(\frac{n}{2a}\Big)\,\mathrm{sinc}(2af - n).$$

il teorema di Shannon

Nell'ultimo passaggio abbiamo sfruttato il fatto che la funzione sinc è pari. A questo punto possiamo scambiare i ruoli di x_0 e della sua F-trasformata X: possiamo considerare un segnale $x(t)$ la cui F-trasformata sia nulla fuori dell'intervallo $[-a, a]$:

$$|f| > a \quad \Longrightarrow \quad X(f) = 0,$$

e sia di quadrato sommabile sullo stesso intervallo. La formula precedente si scrive

$$x(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x\Big(\frac{n}{2a}\Big)\,\mathrm{sinc}(2at - n). \tag{5}$$

Si osservi che la funzione $t \mapsto \mathrm{sinc}(2at - n)$ vale 1 per $t = n/(2a)$, e vale 0 in tutti gli altri punti del tipo $t = (n + k)/(2a)$ con k intero non nullo. Le funzioni sinc in esame, per $n \in \mathbb{Z}$, sono a due a due ortogonali su $\mathbb{R}$: basta operare un cambiamento di variabile per riportarsi a quanto abbiamo dimostrato nell'esempio 6.3-3.

Dunque la (5) è una formula di interpolazione. Essa afferma che se il segnale x non ha componenti di frequenza superiore ad a, esso può essere ricostruito mediante campionamento su una successione di punti distanziati della quantità 1/(2a).

La formula (5) costituisce il *teorema di Shannon*, dovuto all'americano Claude Shannon (1916-2001).

Esempio 6.4-1. Sappiamo (↑ Tabella 6.2-1) che il segnale

$$x(t) = \frac{4\sin^2(t/2)}{t^2}$$

ha una F-trasformata che ha come supporto l'intervallo $[-1, 1]$, se si utilizza la Definizione 6.1-1: dunque essa ha come supporto l'intervallo $[-1/(2\pi), 1/(2\pi)]$ se si utilizza la Definizione 6.1-1'.

Si tenga presente che se il segnale che viene trasformato non ha componenti di pulsazione superiore ad a, esso non ha componenti di frequenza superiore ad $a/(2\pi)$.

Deve dunque valere la formula (5) con $a = 1/(2\pi) \iff 2a = 1/\pi$, cioè

$$x(t) = \frac{4\sin^2(t/2)}{t^2} = 4\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\sin^2(n\pi/2)}{n^2\pi^2}\,\mathrm{sinc}(t/\pi - n).$$

La figura 6.4-1 mostra il segnale $x(t)$ (in grigio) e la somma parziale della serie a secondo membro nell'ultima formula per n che varia da -3 a 3. ◁ □

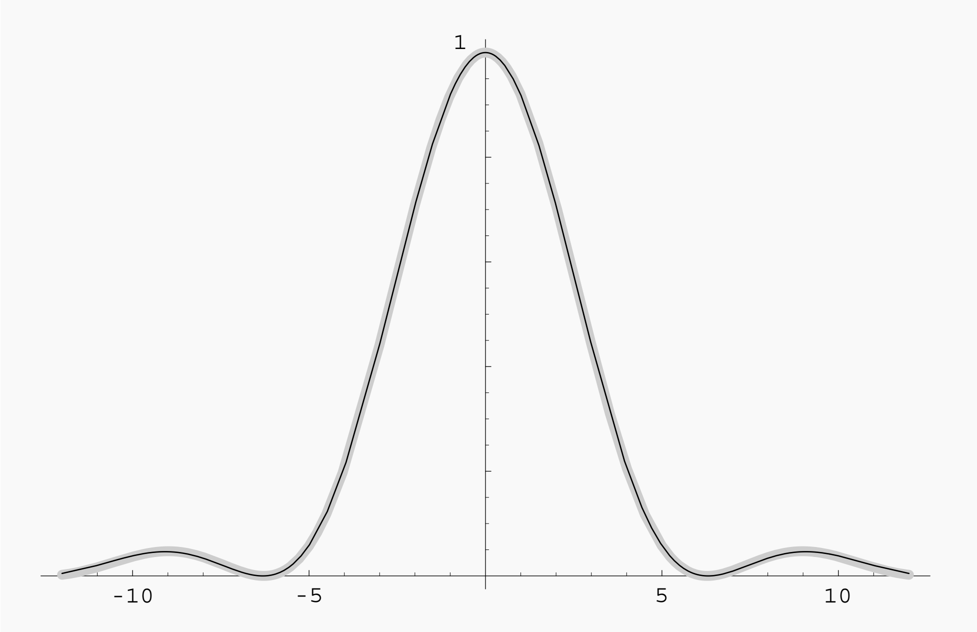

Figura 6.4-1. Il segnale $4\sin^2(t/2)/t^2$ (in grigio) e la somma parziale della serie a secondo membro di (5) per n che varia da -3 a 3.

Appendice 6-A. La trasformata discreta di Fourier

Sia f una funzione continua, periodica di periodo 2π e abbastanza regolare perché essa sia puntualmente sviluppabile in serie di Fourier:

$$f(x) = \sum_{n\,\in\,\mathbb{Z}} c_n\, e^{inx}.$$

Supponiamo che f sia nota soltanto in N punti equispaziati su ciascun intervallo di periodicità, siano i punti

$$\frac{2k\pi}{N}, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Supponiamo per semplicità che N sia un numero pari; più oltre vedremo che la scelta più conveniente dal punto di vista dei calcoli si ha quando N è una potenza di 2: $N = 2^p$, $p \in \mathbb{N}^*$. Ci poniamo il problema di calcolare in modo approssimato alcuni coefficienti della serie di Fourier, diciamo i coefficienti c_n, con

$$-N/2 \le n < N/2.$$

Applicando il metodo dei trapezi (→PCAM, par. 5.7) alla formula

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-int}\, dt$$

(↑ formula (3) del par. 3.1) si ottengono i valori approssimati