Un esempio di funzione integrabile secondo Riemann

Complemento all'esempio 2.1-2, pag. 47

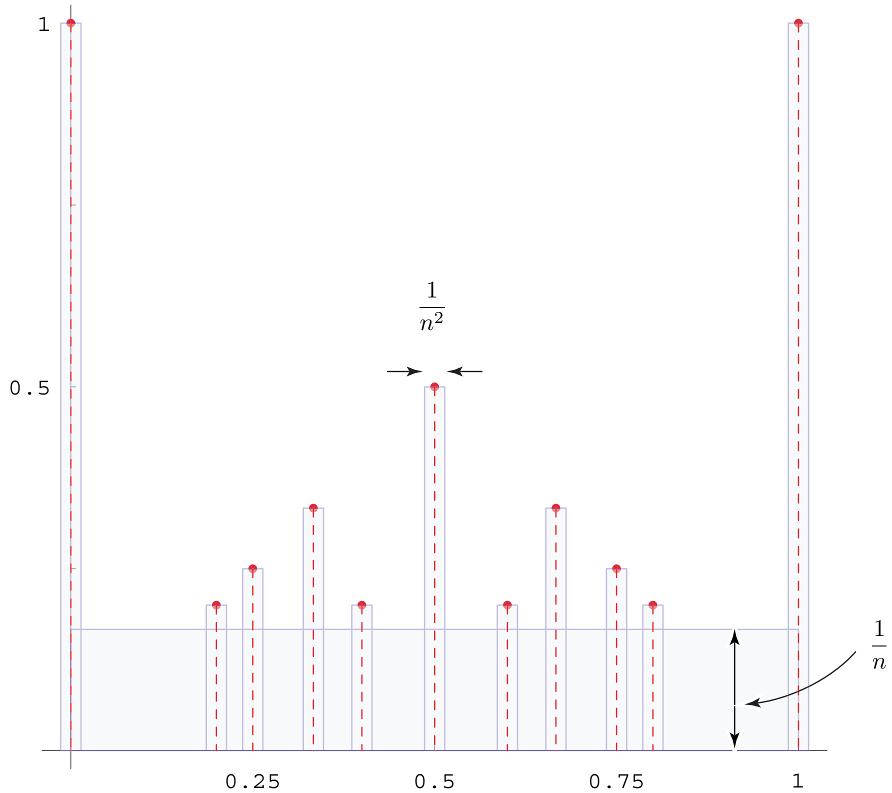
Riconsideriamo la funzione

$$g(x) := \begin{cases} 1/q, & \text{se } \big(x = p/q \in (\mathbb{Q} \cap [0,1])\big) \ \wedge \ \big(\mathrm{MCD}(p,q) = 1\big), \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

dove s'intende che $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}^*$.

Per ogni fissato $n > 1$, il rettangolo $[0,1] \times [0,1/n]$ contiene tutti i punti del grafico con ascissa irrazionale, ed i punti con ascissa razionale $x = p/q$ con $q \geq n$, nonché i segmenti verticali (appartenenti al trapezioide di g) che stanno al disotto di essi.

Nella figura seguente (relativa al caso $n = 6$) tali punti non vengono mostrati; vengono invece mostrati i punti che stanno al disopra del rettangolo considerato. Si tratta dei punti $(p/q, 1/q)$ con $q = 1, 2, 3, \ldots, n-1$, $1 \leq p \leq q$. Copriamo ciascun punto, ed il segmento sottostante, con un rettangolo di base $1/n^2$ e altezza uguale all'ordinata del punto.



Abbiamo due rettangoli di altezza 1 che coprono i punti $(0,1)$, e $(1,1)$; tenuto conto del fatto che, per ogni fissato $q \geq 2$, abbiamo al più $q - 1$ punti di ordinata $1/q$, l'area dei restanti rettangoli non supera

$$\frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \ldots + \frac{n-2}{n-1}\right) \leq \frac{n-2}{n^2}.$$

Conclusione: per ogni naturale positivo n il trapezioide di g è contenuto in un plurirettangolo, unione di un numero finito di rettangoli, di area complessiva non superiore a

$$\frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} + \frac{n-2}{n^2} = \frac{2}{n}.$$

La funzione g è dunque R-integrabile con integrale nullo.