$$\Big|\int_a^b f(x)\, e^{i\lambda x}\, dx\Big| \le \varepsilon + \Big|\sum_{k=1}^{n} c_k \int_{x_{k-1}}^{x_k} e^{i\lambda x}\, dx\Big|.$$

Ma

$$\Big|\int_{x_{k-1}}^{x_k} e^{i\lambda x}\, dx\Big| = \Big|\frac{e^{i\lambda x_k} - e^{i\lambda x_{k-1}}}{i\lambda}\Big| \le \frac{2}{|\lambda|},$$

quindi l'ultima somma non supera

$$\frac{2}{|\lambda|} \sum_{k=1}^{n} |c_k|,$$

quantità che tende a 0 per $|\lambda| \to \infty$. ◁ □

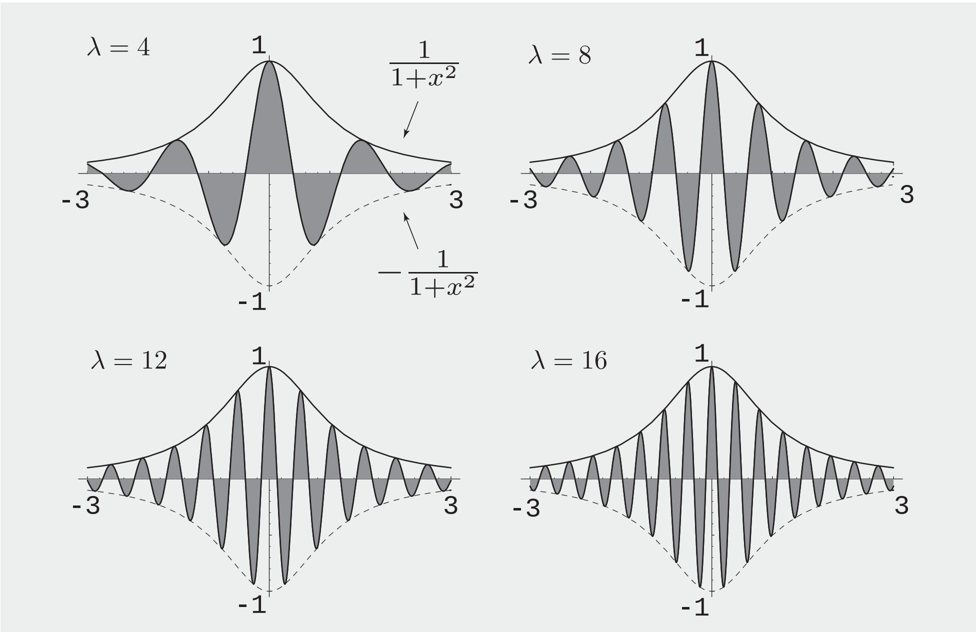

Figura 3.2-2. Da sinistra a destra e dall'alto al basso sono rappresentati i grafici delle funzioni $x \mapsto \cos \lambda x/(1+x^2)$ sull'intervallo $[-3, 3]$, per $\lambda = 4, 8, 12, 16$. Quanto più λ è grande e tanto più gli integrali sui tratti in cui la funzione è positiva si compensano con gli integrali sui tratti in cui essa è negativa.

Il risultato dimostrato ammette notevoli conseguenze. Per poterlo applicare allo studio del comportamento della serie di Fourier di un'assegnata funzione f, occorre innanzitutto scrivere le somme parziali di tale serie in una forma dovuta a Dirichlet.

Sia f una funzione sommabile sull'intervallo $[-\pi, \pi]$; possiamo prolungarla su tutto R in modo da ottenere una funzione periodica di periodo 2π (a rigor di termini, ciò può richiedere che f venga ridefinita in uno dei due punti $x = \pi$ oppure $x = -\pi$ in modo da soddisfare la condizione $f(\pi) = f(-\pi)$). Sostituiamo nella somma parziale di indice n della serie di Fourier di f l'espressione dei coefficienti fornita dalle formule (3) del paragrafo precedente; si ottiene

$$s_n(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^{n} \Big(\int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt}\, dt\Big)\, e^{ikx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \Big(\sum_{k=-n}^{n} e^{ik(x-t)}\Big)\, dt.$$

Cerchiamo un'altra espressione per una somma del tipo $\sum_{k=-n}^{n} e^{ikt}$, $t \in \mathbb{R}$. Se $t = 0$, o, più in generale, se t è congruo a 0 modulo 2π, $t \equiv 0 \pmod{2\pi}$, essa vale $2n + 1$. In caso contrario essa può scriversi