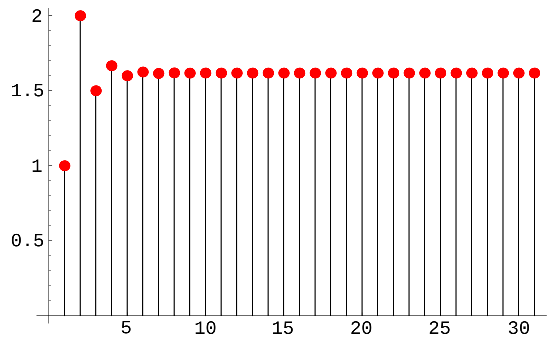
G.C. Barozzi: PRIMO CORSO DI ANALISI MATEMATICA, Zanichelli (Bologna), 1998
ISBN 88-08-01169-0

**Complemento al paragrafo 3.2: limite della successione dei rapporti tra numeri di Fibonacci consecutivi.**

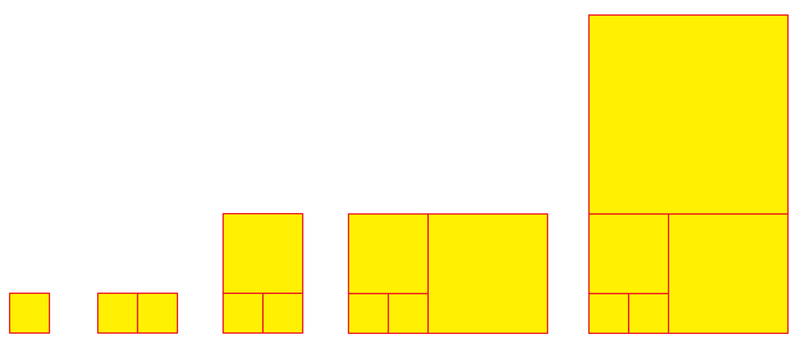
Nell'esempio 3.2-3 abbiamo studiato la successione $n \mapsto r_n = F_{n+1}/F_n, n \geq 1$, tra numeri di Fibonacci consecutivi. La discussione svolta ci ha indotto a ritenere (e nel problema 3.4-3 abbiamo dimostrato) che essa tende al limite

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618.$$




Possiamo dare un'interpretazione geometrica della successione $r_n$. Consideriamo un quadrato di lato unitario, e successivamente il rettangolo ottenuto accostandogli un quadrato uguale ad esso: otteniamo un rettangolo di lati 1 e 2. A questo punto procediamo accostando al rettangolo ottenuto un quadrato di lato uguale al lato maggiore, ottenendo un rettangolo di lati 2 e 3.

Proseguiamo sempre con il medesimo criterio, accostando al rettangolo ottenuto al passo $n$ un quadrato di lato uguale al lato maggiore del rettangolo stesso.



Non è difficile riconoscere che i lati del rettangolo $n$-simo misurano $F_n$ e $F_{n+1}$, dunque $r_n$ è il *coefficiente di forma* di tale rettangolo, cioè il rapporto tra lato maggiore e lato minore.

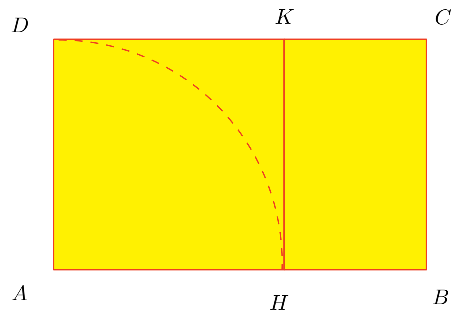
La *forma limite* è quella del "rettangolo aureo", il cui coefficiente di forma è il numero $\phi$ considerato all'inizio. In un rettangolo aureo il lato maggiore sta al lato minore come quest'ultimo sta alla differenza tra i due lati.

Posto infatti arbitrariamente uguale a 1 il lato minore, se $x$ è il lato maggiore, la proposizione precedente si traduce nell'uguaglianza

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{x-1} \qquad \Longleftrightarrow \qquad x^2 - x - 1 = 0;$$

la soluzione positiva dell'ultima equazione è $\phi$.

Con riferimento alla figura seguente, abbiamo che il rettangolo $ABCD$ è simile al rettangolo $HBCK$.


D
K
C
A
H
B