Complemento al paragrafo 3.7: monotonia delle successioni convergenti al numero e.

Nell'esercizio 3.7-13 abbiamo indicato come dedurre la crescenza della successione $n \mapsto a_n := (1+1/n)^n$ dalla disuguaglianza tra media geometrica e media aritmetica (Prop. 1.6-2).

Indichiamo un procedimento analogo per dimostrare la decrescenza della successione $n \mapsto b_n := = (1+1/n)^{n+1}$. Supposto $n \geq 2$, scegliamo n numeri nel modo seguente

$$\underbrace{\Big(1+\frac{1}{n}\Big), \dots, \Big(1+\frac{1}{n}\Big)}_{n-1 \text{ termini}}, \quad \Big(1+\frac{1}{n}\Big)^2.$$

La loro media geometrica è

$$\sqrt[n]{\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^{n+1}} = \sqrt[n]{b_n};$$

la somma degli stessi numeri vale

$$n-1+\frac{n-1}{n}+\frac{n^2+2n+1}{n^2} = \frac{n^3+n^2+n+1}{n^2},$$

quindi la disuaguaglianza tra le due medie si scrive

$$\sqrt[n]{\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^{n+1}} < \frac{n^3+n^2+n+1}{n^3} = 1+\frac{n^2+n+1}{n^3}.$$

Se si verifica che l'ultima quantità scritta è minore di $1+1/(n-1)$, abbiamo ottenuto il nostro scopo: infatti dalla disuguaglianza

$$\sqrt[n]{\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^{n+1}} < 1+\frac{1}{n-1},$$

elevando entrambi i membri alla potenza n-sima, segue

$$\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^{n+1} < \Big(1+\frac{1}{n-1}\Big)^{n} \quad \Longleftrightarrow \quad b_n < b_{n-1}.$$

Resta dunque da dimostrare la disuguaglianza

$$\frac{n^2+n+1}{n^3} < \frac{1}{n-1} \quad \Longleftrightarrow \quad (n-1)(n^2+n+1) < n^3,$$

ovviamente soddisfatta in quanto il primo membro vale n^3-1. $\Longrightarrow$ $\square$