Complemento al paragrafo 7.5: la notazione di Steinmetz

Nel corso di questo esempio indicheremo l'unità immaginaria con la lettera j, com'è d'uso nella letteratura tecnica.

Consideriamo, per $\omega > 0$ fissato, la famiglia di funzioni

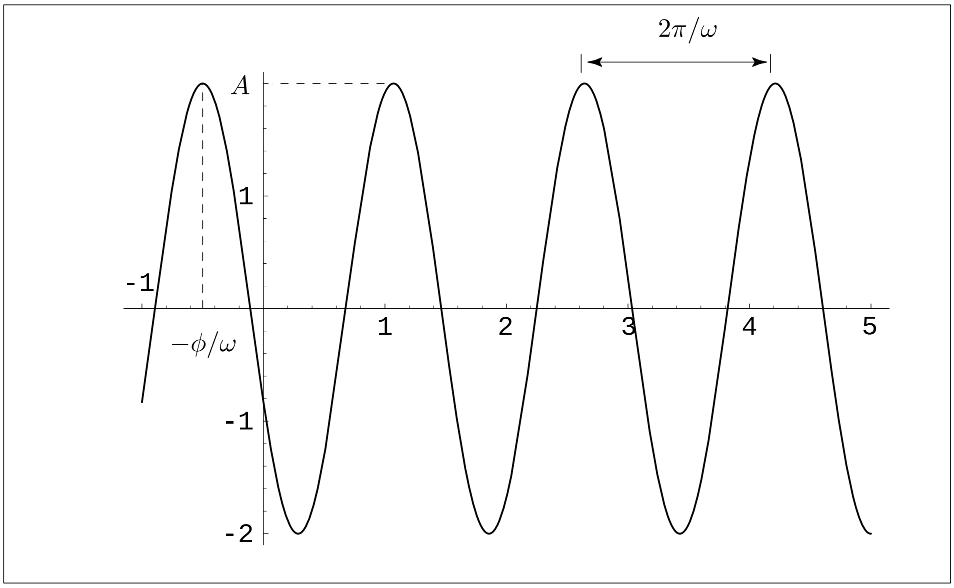
$$u(t) = A\cos(\omega t + \phi). \qquad (*)$$

Non è restrittivo supporre $A \geq 0$; in caso contrario, in base all'identità $\cos(t + \pi) = -\cos t$, possiamo scrivere

$$A\cos(\omega t + \phi) = -A\cos(\omega t + \phi + \pi) = A^* \cos(\omega t + \phi^*),$$

avendo posto $A^* := -A > 0$, $\phi^* := \phi + \pi$.

La (*) rappresenta un'oscillazione elementare, di ampiezza A, pulsazione ω, periodo $T = 2\pi/\omega$ e fase iniziale ϕ.



La famiglia di funzioni (*) è "stabile" rispetto alla formazione di combinazioni lineari. È sufficiente mostrare che la somma di due funzioni del tipo (*) è ancora una funzione dello stesso tipo. A tale scopo è utile osservare che $A\cos(\omega t + \phi)$ è la parte reale della funzione $Ae^{j(\omega t + \phi)}$:

$$A\cos(\omega t + \phi) = \mathrm{Re}\big[Ae^{j(\omega t+\phi)}\big] = A\,\mathrm{Re}\big[e^{j(\omega t+\phi)}\big].$$

Se sono date le funzioni

$$u_1(t) = A_1\cos(\omega t + \phi_1) = \mathrm{Re}\big[A_1 e^{j(\omega t+\phi_1)}\big], \quad u_2(t) = A_2\cos(\omega t + \phi_2) = \mathrm{Re}\big[A_2 e^{j(\omega t+\phi_2)}\big],$$

la loro somma si scrive

$$\begin{aligned} u_1(t) + u_2(t) &= \mathrm{Re}\big[A_1 e^{j(\omega t+\phi_1)} + A_2 e^{j(\omega t+\phi_2)}\big] = \\ &= \mathrm{Re}\big[\big(A_1 e^{j\phi_1} + A_2 e^{j\phi_2}\big)\, e^{j\omega t}\big] = \\ &= \mathrm{Re}\big[Ae^{j(\omega t+\phi)}\big], \end{aligned}$$

avendo posto $Ae^{j\phi} := A_1 e^{j\phi_1} + A_2 e^{j\phi_2}$.

Il ragionamento precedente suggerisce di rappresentare la funzione $u(t) = A\cos(\omega t + \phi)$ mediante il numero complesso $z := Ae^{j\phi}$, di modulo A e argomento (= fase) ϕ; lo stesso ragionamento ci assicura che la corrispondenza

$$u(t) = A\cos(\omega t + \phi) \mapsto z = Ae^{j\phi}$$

conserva le combinazioni lineari. L'idea di una tale rappresentazione è dovuta all'ingegnere americano C.P. Steinmetz (1865-1923).

È interessante osservare che la famiglia di funzioni (*) è "stabile" rispetto alla derivazione; infatti se $u(t) = A\cos(\omega t + \phi)$, allora (in base alla formula di addizione del coseno)

$$
\begin{aligned}
u'(t) &= -\omega A \sin(\omega t + \phi) = \omega A \cos(\omega t + \phi + \pi/2) = \\
&= \omega A \,\mathrm{Re}\big[e^{j(\omega t + \phi + \pi/2)}\big] = \omega A \,\mathrm{Re}\big[j\, e^{j(\omega t + \phi)}\big],
\end{aligned}
$$

dove abbiamo tenuto conto del fatto che $e^{j\pi/2} = j$.

Dunque se la funzione $u(t)$ è rappresentata dal numero complesso $z = Ae^{j\phi}$, $u'(t)$ è rappresentata dal numero $z' = j\omega A e^{j\phi} = j\omega z$.

Il vettore rappresentativo di z' individua nel piano complesso una semiretta ruotata di un angolo retto in senso positivo rispetto alla semiretta analoga individuata dal vettore rappresentativo di z, mentre il modulo di z' si ottiene da quello di z moltiplicandolo per il fattore ω. $\square$