Giulio Cesare Barozzi: **Primo Corso di Analisi Matematica**
Zanichelli (Bologna), 1998, ISBN 88-08-01169-0

Capitolo 1 NUMERI REALI

SOLUZIONE DEI PROBLEMI POSTI AL TERMINE DI ALCUNI PARAGRAFI

1.1 Numeri naturali, interi, razionali

1.1-1. Sono 1 e -1, reciproci di se stessi.

1.1-2. Tutte false tranne la e); per la f) si ha: $2 : (1/2) = 2 \cdot 2 = 4$.

1.1-3. No; se fosse $2/3 = 3/q$, si avrebbe $2q = 9$, uguaglianza impossibile perché il primo membro è pari, il secondo dispari.

1.1-4. No: si avrebbe $8 = 3p$. Si ha poi $2/3 = 6/9$.

1.1-5. Vero: la disuguaglianza scritta equivale alla seguente: $(m^2 + n^2)/mn \geq 2$, cioè $m^2 + n^2 \geq 2mn$, ed infine $m^2 + n^2 - 2mn = (m - n)^2 \geq 0$. Vale il segno di uguaglianza se e solo se $m = n$.

1.1-6. La disuguaglianza da dimostrare equivale a $n(n + 2) < (n + 1)^2$, cioè $n^2 + 2n < < n^2 + 2n + 1$, ed infine $0 < 1$.

1.1-7. La prima affermazione è vera. Altrettanto per la seconda: se $0 < p < q$, allora la tesi $x^2 = p^2/q^2 < x = p/q$, cioè $p^2q < pq^2$, sussiste in quanto quest'ultima disuguaglianza si scrive ancora $0 < pq^2 - p^2q = pq(q - p)$.

1.1-8. La tesi si scrive $p^2s^2 \leq r^2q^2$, cioè $r^2q^2 - p^2s^2 = (rq - ps)(rq + ps) \geq 0$; quest'ultima è vera in quanto $rq - ps \geq 0$ per ipotesi.

1.1-9. La relazione di $\leq$ è di ordine totale in $\boldsymbol{N}$ in virtù della legge di tricotomia; la relazione di divisibilità è di ordine parziale in $\boldsymbol{N}^*$: per i numeri 2 e 3 si ha che 2 non è divisore di 3, 3 non è divisore di 2.

1.1-10. Se $p_2 = 0$, allora $p_1q_2 = p_2q_1 = 0$, da cui $p_1 = 0$, essendo $q_2 \neq 0$ in quanto denominatore di una frazione. Analogamente, da $p_2q_3 = p_3q_2$ segue $p_3 = 0$, quindi l'uguaglianza da dimostrare, $p_1q_3 = p_3q_1$, si riduce all'uguaglianza $0 = 0$. Se poi $p_2 \neq 0$, moltiplicando membro a membro le due uguaglianze che costituiscono l'ipotesi, si ottiene $p_1p_2q_2q_3 = = p_2p_3q_2q_1$, da cui segue la tesi, dividendo entrambi i membri per $p_2q_2 \neq 0$.

1.1-11. Si ha $x = (x + x)/2 < (x + y)/2$; analogamente si ragiona per y. Evidentemente $(x + y)/2$ è razionale, in quanto ottenuto mediante somme e prodotti tra razionali, dunque tra due razionali ce n'è almeno un altro. Per concludere che ce ne sono infiniti, basta ripetere il ragionamento precedente sulla coppia di razionali x e $(x + y)/2$ e poi sulla coppia $(x + y)/2$ e y, e così via.

1.1-12. Entrambe le disuguaglianze equivalgono alla disuguaglianza tra interi $ps < qr$.

1.2 Rappresentazione decimale dei numeri razionali

1.2-1. Si trova $1/7 = 0.\overline{142857}$, $2/7 = 0.\overline{285714}$, $3/7 = 0.\overline{428571}$, $4/7 = 0.\overline{571428}$, $5/7 = 0.\overline{714285}$, $6/7 = 0.\overline{857142}$. Gli sviluppi ottenuti hanno tutti i periodi costituiti dalle stesse cifre decimali, permutate ciclicamente. Ciò è legato al fatto che i periodi hanno lunghezza 6, cioè la massima lunghezza possibile, tenuto conto del fatto che il resto 0 non può presentarsi nel procedimento di divisione, in quanto le frazioni in esame non sono decimali. Tutti i resti ammissibili, cioè gli interi compresi tra 1 e 6, si presentano: una volta determinato il primo resto, i resti successivi, e di conseguenza le cifre decimali, sono univocamente determinati. Ad esempio, il primo resto che si presenta nella divisione di 2 per 7 è 2, che è anche il terzo resto della divisione di 1 per 7: ecco perché le cifre della rappresentazione decimale di $2/7$ sono le stesse della reppresentazione di di $1/7$ spostate di due posizioni.

1.2-2. Falso; basta considerare che la lunghezza del periodo può essere maggiore di dieci, e in tal caso una cifra decimale deve necessariamente ripetersi.

1.2-3. a) $0.12\overline{3} = 37/300$; b) $12.\overline{8} = 116/9$; c) $0.06\overline{81} = 3/44$; d) $1.\overline{3} = 4/3$.

1.2-4. La sesta cifra decimale del primo numero è 2, mentre la sesta cifra del secondo numero è 3, dunque è maggiore il secondo. Un numero strettamente compreso tra i due numeri dati è, ad esempio, 0.412353.

1.2-5. Si trova, rispettivamente, 1 e 1.4.

1.2-6. Si trova $15/14 = 1.0\overline{714285}$. Poiché l'antiperiodo ha lunghezza 1, la 1000-esima cifra decimale occupa il 999-esimo posto a partire da 7. Poiché il resto della divisione di 999 per 6 (lunghezza del periodo) è 3, la cifra richiesta è la terza del periodo, vale a dire 4.

1.4 Completezza del campo reale

1.4-1. Entrambi i numeri sono irrazionali, in quanto le relative rappresentazioni decimali non sono periodiche.

1.4-2. Se a è razionale e b irrazionale, allora $c := a + b$ è irrazionale; in caso contrario si avrebbe che $b = c - a$ sarebbe razionale in quanto differenza tra numeri razionali. Ragionamento analogo per il prodotto. La somma degli irrazionali $\sqrt{2}$ e $1-\sqrt{2}$ è razionale; il quadrato dell'irrazionale $\sqrt{2}$ è razionale.

1.4-3. Si ha $ma + nb < mb + nb = (m + n)b$; si ha analogamente $ma + nb > ma + na = (m + n)a$. Dividendo per $m + n$ si ottiene la tesi.

1.4-4. Si ha

$$(a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2}) = a + c + (b + d)\sqrt{2},$$

$$(a + b\sqrt{2}) \cdot (c + d\sqrt{2}) = ac + 2bd + (ad + bc)\sqrt{2},$$

dunque somme e prodotti di numeri del tipo considerato sono ancora numeri dello stesso tipo. Gli elementi neutri, 0 e 1, si ottengono dall'espressione $a + b\sqrt{2}$ ponendo rispettivamente $a = b = 0$ e $a = 1, b = 0$. Si osservi che $a + b\sqrt{2} = 0$ se e solo se $a = b = 0$ (si riveda l'esercizio 1.4-2). L'opposto di $a + b\sqrt{2}$ è $-a - b\sqrt{2}$. Se $a + b\sqrt{2}$ è diverso da 0, dunque $a^2 \neq 2b^2$, il reciproco di $a + b\sqrt{2}$ in $\boldsymbol{R}$ è

$$\frac{1}{a + b\sqrt{2}} = \frac{a - b\sqrt{2}}{a^2 - 2b^2} = a' + b'\sqrt{2},$$

avendo posto $a' := a/(a^2 - 2b^2)$, $b' := -b/(a^2 - 2b^2)$.

1.4-5. No.

1.4-6. Si consideri, ad esempio, il caso in cui $a = 1$, $b = 2$, $c = -1$, $d = -2$.

1.4-7. Abbiamo dimostrato nell'esercizio 1.1-4 che $n/m + m/n \geq 2$ per ogni coppia di interi positivi m e n. Dunque 2 è un minorante di A; anzi 2 è il minimo di A, in quanto esso appartiene a tale insieme: basta porre $m = n$. Per $m = 1$ si ottiene l'elemento $n + 1/n > n$, dunque A è illimitato superiormente, tale essendo $\boldsymbol{N}$ (si veda la Proposizione 1.6-3).

1.4-8. Per $m = 1$, si hanno elementi del tipo $n - 1/n$, ciascuno dei quali è maggiore di $n - 1$; dunque $\sup A = +\infty$. D'altra parte, per $m = n - 1$, si hanno elementi del tipo

$$\frac{n}{n-1} - \frac{n-1}{n} = \frac{2n-1}{(n-1)n} < \frac{2n}{(n-1)n} = \frac{2}{n-1}.$$

Dunque $\inf A = 0$.

1.4-9. Sono rispettivamente 1 e $1.\overline{1} = 10/9$; essi sono il minimo e il massimo di A.

1.4-10. Il numero 1 è un maggiorante di A. Scelto un numero positivo ad arbitrio, diciamo ϵ, il numero $1 - \varepsilon$ non è un maggiorante di A. Infatti è possibile trovare un n tale che sia $1 - 10^{-n} > 1 - \varepsilon$, vale a dire $10^{-n} < \epsilon$; se la prima cifra diversa da 0 nello sviluppo decimale di ε occupa il posto k, basta prendere $n > k$.

1.4-11. La somma in questione è, per definizione, l'estremo superiore dell'insieme costituito dai numeri

$$0.\underbrace{999\ldots9}_{n \text{ cifre}}\ ,$$

dove n assume tutti i valori interi positivi; ci siamo ricondotti all'esercizio precedente.

1.4-12. Se A è contenuto in B, ogni minorante di B è anche minorante di A, ogni maggiorante di B è anche maggiorante di A. D'altra parte ciascun minorante di A non supera ciascun maggiorante di A stesso.

1.4-13. Se A e B sono separati, gli elementi di A sono minoranti di B, gli elementi di B sono maggioranti di A. Se fosse $\sup A < \inf B$, posto $d := \inf B - \sup A$, per ogni coppia di elementi $a \in A$, $b \in B$ si avrebbe $b - a \geq d > 0$, dunque A e B non sarebbero contigui.

1.4-14. Basta attribuire a k successivamente i valori $1, 2$ e 3.

1.4-15. a) $\sum_{k=1}^{4} 1/k$; b) $\sum_{k=0}^{3} 2k + 1$; c) $\prod_{k=1}^{5} 2k$.

1.4-16. Entrambe vere.

1.4-17. La a) segue dalla proprietà commutativa dell'addizione, la b) dalla proprietà distributiva.

1.4-18. Falso per $n > 1$; il primo membro contiene n^2 prodotti, non n prodotti. Ad esempio:

$$(a_1 + a_2)(b_1 + b_2) = a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_2 b_2.$$

1.5 Disuguaglianze tra numeri reali

1.5-1. a) vera; b) e c) false; d) vera; e) vera se $a \geq 0$, falsa se $a < 0$; f) vera se $a \leq 0$, falsa se $a > 0$.

1.5-2. a) vera; b) e c) false.

1.5-3. Si tratta di confrontare i numeri $a(b + c)$ e $b(a + c)$, cioè ac con bc ed infine a con b, essendo $c > 0$. Dunque a/b è minore, uguale o maggiore di $(a + c)/(b + c)$ secondo che a è minore, uguale o maggiore di b. Si osservi la figura seguente, in cui a/b viene interpretato come coefficiente angolare della retta congiungente l'origine con il punto di coordinate cartesiane (b, a), e lo stesso per il numero $(a + c)/(b + c)$.

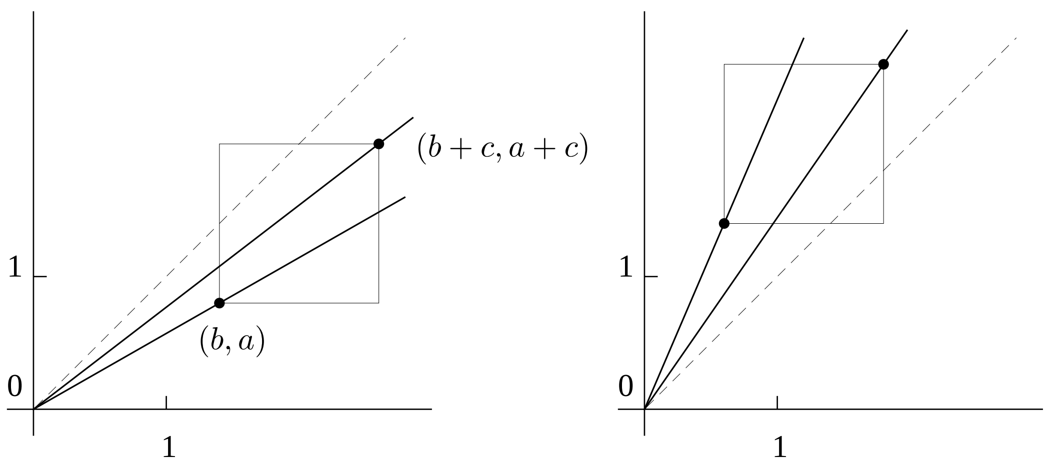

Figura 1.1- Confronto tra i numeri a/b e $(a + c)/(b + c)$.

1.5-4. Dimostriamo che $a/b \leq (a+c)/(b+d)$. Si tratta di verificare che $a(b+d) \leq b(a+c)$, cioè $ad \leq bc$, ma questa è precisamente l'ipotesi. Allo stesso modo si dimostra l'altra disuguaglianza.

1.5-5. a) $x < 3$;

b) $x < -9/7$;

c) $x \leq -5$;

d) $x \in \,]-\infty, 3\,[\, \cup \,]\,9/2, +\infty\,[$;

e) $x < 8$;

f) $x \in \,]-\infty, -2\,[\, \cup \,]\,2, +\infty\,[$, cioè $|x| > 2$;

g) $x \in \,]-\infty, -3\,[\, \cup \,]\,4, +\infty\,[$; h) $-4 < x < 3$.

1.5-6. a) $-5 < x < 3$;

b) $x \in \,]-\infty, -5\,[\, \cup \,]\,3, +\infty\,[$;

c) $x \in \,]-\infty, -1/4\,[\, \cup \,]\,0, +\infty\,[$;

d) $x \in \,]-2, -1\,[\cup]\,0, +\infty\,[$;

e) $0 < x < 5$;

f) $x \in \,]-\infty, 0\,[\, \cup \,]\,3/8, +\infty\,[$.

1.5-7. a) $|\, x \,| = 3$; b) $|\, x - 1 \,| > |\, x - 5 \,|$; c) $|\, x \,| > 2$; d) $|\, x - 6 \,| < 2$; e) $|\, x - 8 \,| = 2$.

1.5-8. Uno (almeno) dei tre numeri a, b, c è diverso da 0.

1.5-9. Nella doppia diseguaglianza $-|\, x \,| \leq x \leq |\, x \,|$ vale il segno di $=$ a destra se x è positivo, a sinistra se x è negativo; lo stesso per la doppia disuguaglianza $-|\, y \,| \leq y \leq |\, y \,|$. Dunque se x e y sono entrambi positivi, si ha $x + y = |\, x \,| + |\, y \,|$, se sono entrambi negativi si ha $x + y = -(|\, x \,| + |\, y \,|)$.

1.5-10. Si ha $x = (x + y) - y$, da cui

$$|\, x \,| \leq |\, x + y \,| + |-y\,| = |\, x + y \,| + |\, y \,|,$$

ed infine $|\, x \,| - |\, y \,| \leq |\, x + y \,|$. Analogamente, partendo dall'uguaglianza $y = (y + x) - x$, si ottiene $|\, y \,| - |\, x \,| \leq |\, x + y \,|$, cioè $|\, x \,| - |\, y \,| \geq -|\, x + y \,|$. In definitiva

$$-|\, x + y \,| \leq |\, x \,| - |\, y \,| \leq |\, x + y \,|,$$

che è la tesi.

1.5-11. a) $-5 < x < 5$; b) $-10 < x < 10$; c) $-2 < x < 2$; d) $-2 < x < 10$.

1.5-12. a) $x \in \,]-\infty, -5/2\,[\, \cup \,]\,3/2, +\infty\,[$;

b) $x \in \,[-5, -1\,] \,\cup\, [\,1, 5\,]$;

c) $x \in \,]-\infty, -3/7\,[\, \cup \,]\,1/7, +\infty\,[$;

d) $x < 0$;

e) $x \in \,]-\infty, -5\,] \,\cup\, [-1, +\infty\,[$;

f) $x \in \,]-\infty, -5\,[\, \cup \,]\,1, +\infty\,[$.

1.5-13. a) Si ha $|\, 8x - 24 \,| = 8\,|\, x - 3 \,| \leq 8 \cdot 10^{-6} < 10 \cdot 10^{-6} = 10^{-5}$.

b) Si ha

$$\begin{aligned}|(x + y) - 5\,| &= |\, x - 2 + y - 3 \,| \leq |\, x - 2 \,| + |\, y - 3 \,| \leq \\ &\leq 10^{-6} + 10^{-6} = 2 \cdot 10^{-6} < 10 \cdot 10^{-6} = 10^{-5}.\end{aligned}$$

c) Si ha

$$\begin{aligned}|\, xy - 35 \,| &= |\, xy - 5y + 5y - 35 \,| \leq |\, y \,||\, x - 5 \,| + 5|\, y - 7 \,| \leq \\ &\leq |\, y \,| \cdot 10^{-6} + 5 \cdot 10^{-6} = (|\, y \,| + 5) \cdot 10^{-6};\end{aligned}$$

ma da $||\, y \,| - 7 \,| \leq |\, y - 7 \,| < 10^{-6}$, segue $|\, y \,| < 7 + 10^{-6} < 8$, dunque $(|\, y \,| + 5) \cdot 10^{-6} <$ $< 13 \cdot 10^{-6} < 20 \cdot 10^{-6} = 2 \cdot 10^{-5}$.

d) Si ha

$$| \, xy+1 \, | = | \, xy+y-y+1 \, | \leq | \, y \, || \, x+1 \, | + | \, y-1 \, | \leq$$
$$\leq | \, y \, | \cdot 10^{-5} + 10^{-5} = (| \, y \, | + 1) \cdot 10^{-5};$$

ma da $| \, y-1 \, | < 10^{-5}$ segue $| \, y \, | < 1+10^{-5} < 2$, dunque $(| \, y \, |+1) \cdot 10^{-5} < 3 \cdot 10^{-5}$.

e) Si ha $| \, x^2-4 \, | = | \, x-2 \, || \, x+2 \, |$; ma da $| \, x-2 \, | < 10^{-6}$, segue $| \, x \, | < 2+10^{-6} < 3$, dunque $| \, x+2 \, | < 5$. In definitiva

$$| \, x^2-4 \, | < 5 \cdot 10^{-6} < 10^{-5}.$$

f) Si ha $1-10^{-5} < x < 1+10^{-5}$, quindi

$$\left| \frac{1}{x} - 1 \right| = \frac{| \, x-1 \, |}{| \, x \, |} < \frac{10^{-5}}{1-10^{-5}} < 1.1 \cdot 10^{-5}.$$

Abbiamo utilizzato la disuguaglianza $1 < 1.1 \cdot (1-10^{-5})$; infatti

$$1.1 \cdot (1-10^{-5}) = 1.1 - 0.000011 = 1.099989.$$

1.5-14. La disuguaglianza $0 \leq x^2+y^2-2xy$ è ovviamente vera, in quanto essa si scrive anche $0 \leq (x-y)^2$. Vale il segno di $=$ se e solo se $x=y$. I due triangoli in figura hanno aree rispettivamente $x^2/2$ e $y^2/2$, mentre il rettangolo ha come area xy.

1.5-15. Elevando al quadrato si ottiene la disuguaglianza $xy \leq (x^2+y^2+2xy)/4$, cioè $4xy \leq x^2+y^2+2xy$ e finalmente $0 \leq x^2+y^2-2xy$. L'altezza del triangolo inscritto nella semicirconferenza di raggio $(x+y)/2$ vale $\sqrt{xy}$ in virtù del secondo teorema di Euclide.

1.5-16. Seguendo il suggerimento: per $n=2$ si ha $(a/c)^2+(b/c)^2=1$, in virtù del teorema di Pitagora; poichè i rapporti scritti sono entrambi <1, per $n>2$ si ha $(a/c)^n < (a/c)^2$, $(b/c)^n < (b/c)^2$. In definitiva, per $n>2$ si ha $(a/c)^n+(b/c)^n < 1$, cioè $a^n+b^n<c^n$.

1.5-17. Per quanto dimostrato nell'esercizio 15, tutti gli elementi di A_1 sono ≥ 0. D'altra parte si ha

$$\frac{n+1}{2} - \sqrt{n} > \frac{n}{2} - \sqrt{n} = \sqrt{n}\left(\frac{\sqrt{n}}{2} - 1\right),$$

e l'ultima quantità è maggiore o uguale a $\sqrt{n}$ per $n \geq 4$. Se ne conclude che $\sup A_1 = +\infty$. Se si osserva che

$$\frac{\sqrt{nm}}{n+m} = \frac{1}{2}\,\frac{2}{n+m}\,\sqrt{nm},$$

si riconosce che gli elementi di A_2 sono maggiori di 0 e minori o uguali a $1/2$, dove vale il segno di uguaglianza per $n=m$. Per $m=1$ si hanno elementi del tipo

$$\frac{\sqrt{n}}{n+1} < \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}}\,;$$

se ne conclude che $\sup A_2 = \max A_2 = 1/2$, $\inf A_2 = 0$.

1.6 Ulteriori proprietà dei numeri naturali, razionali, reali

1.6-1. Se $n = 0$, basta porre $q := r := 0$. Sia poi, per un assegnato n, $n = qm + r$, con $0 \leq r < m$. Ne segue, sommando 1 ad entrambi i membri, $n + 1 = qm + r + 1$. Se $r + 1 < m$, basta porre $q' := q$, $r' := r + 1$ per avere la decomposizione cercata del numero $n + 1$; se invece $r + 1 = m$, allora si ha $n + 1 = qm + m = (q + 1)m$, dunque basta porre $q' := q + 1$, $r' := 0$.

1.6-2. Per $n = 1$, si ha $1! = 1$, $2^0 = 1$; se per un assegnato $n \geq 1$ si ha $n! \geq 2^{n-1}$, moltiplicando entrambi i membri per $n + 1$ si ha $(n + 1)! \geq (n + 1)2^{n-1} \geq 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$.

1.6-3. Per $n = 1$ si ha $1 = 1^2$. Se per un assegnato $n \geq 1$ si ha

$$1 + 3 + 5 + \cdots + 2n - 1 = n^2,$$

sommando ad entrambi i membri $2n + 1$ si ottiene

$$1 + 3 + 5 + \cdots + 2n - 1 + 2n + 1 = n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2.$$

1.6-4. Per $n = 1$, si ha $1^2 = 1(1+1)(2+1)/6$. Se per un assegnato $n \geq 1$ vale l'uguaglianza indicata, sommando ad entrambi i membri $(n + 1)^2$, si ottiene a primo membro la somma dei quadrati dei numeri non superiori a $n + 1$, a secondo membro

$$\frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6} + (n + 1)^2 = \frac{(n + 1)\,[n(2n + 1) + 6(n + 1)]}{6}.$$

La quantità entro parentesi quadre si scrive anche $2n^2 + 7n + 6 = (n + 2)(2n + 3)$, dunque il numeratore dell'ultima frazione si scrive $(n + 1)(n + 2)(2n + 3)$.

1.6-5. Per $n = 1$, il primo membro vale $1/2$, il secondo $1 - 1/2 = 1/2$. Se l'uguaglianza scritta vale per un assegnato $n \geq 1$, sommando la quantità $1/[(n + 1)(n + 2)]$ si ottiene a secondo membro

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{n + 1} + \frac{1}{(n + 1)(n + 2)} &= 1 + \frac{-n - 2 + 1}{(n + 1)(n + 2)} \\ &= 1 - \frac{1}{(n + 2)}. \end{aligned}$$

1.6-6. L'uguaglianza $a_n = a + nd$, per ogni naturale n, si ottiene subito per induzione. La somma dei termini di indici non superiori ad n si può scrivere

$$\begin{aligned} a + a + d + a + 2d + \cdots + a + nd &= (n + 1)a + d(1 + 2 + 3 + \cdots + n) = \\ &= (n + 1)a + \frac{dn(n + 1)}{2} = \\ &= (n + 1)\left(a + \frac{nd}{2}\right). \end{aligned}$$

La semisomma tra il primo e l'ultimo termine considerato vale

$$\frac{a + a + nd}{2} = a + \frac{nd}{2}.$$

1.6-7. Posto $d := \sqrt[n]{a} - 1$, cioè $\sqrt[n]{a} = 1 + d$, elevando entrambi i membri alla potenza n-esima si ottiene $a = (1+d)^n > 1+nd$, in virtù della disuguaglianza di Bernoulli, tenendo presente che $d > 0$. Ma allora si ha $nd < a - 1$, da cui segue $d < (a - 1)/n$, ed infine

$$1 + d = \sqrt[n]{a} < 1 + \frac{a-1}{n}.$$

1.6-8. Seguendo il suggerimento del testo, si ha

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} = \sqrt[n]{1 + nx} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1 + nx + n - 1}{n} = 1 + x,$$

da cui segue la diseguaglianza di Bernoulli elevando entrmabi i mebri alla n.

1.6-9. Da $n \geq n + 1$ segue $n + 1 \geq n + 2$ semplicemente sommando 1 ad entrambi i membri.

1.6-10. Sia A l'insieme dei naturali per cui $P(n)$ è falsa; se, per assurdo, A non è vuoto, allora esso è dotato di un elemento minimo, per quanto dimostrato nel Teorema 1.3, punto 1. Tale minimo non può essere 0, perchè avremmo una contraddizione con l'ipotesi 1), secondo cui $P(0)$ è vera. Se dunque $m > 0$ è il minimo di A, tutti i naturali minori di m non appartengono ad A, dunque per essi la proposizione P è vera: ma allora, in contraddizione con la definizione di m, $P(m)$ sarebbe vera in virtù dell'ipotesi 2).