Giulio Cesare Barozzi: **Primo Corso di Analisi Matematica**
Zanichelli (Bologna), 1998, ISBN 88-08-01169-0

Capitolo 2 FUNZIONI

SOLUZIONE DEI PROBLEMI POSTI AL TERMINE DI ALCUNI PARAGRAFI

2.1 Richiami sul concetto di funzione

2.1-1. Soltanto le funzioni degli esempi c) ed e) sono iniettive. Quanto alla funzione $x \mapsto x + |x|$, si tenga presente che essa è nulla per $x \leq 0$.

2.1-2. Si trovano i risultati seguenti (la variabile indipendente viene indicata sempre con la lettera x):

a) $(f \circ g)(x) = 5 - 2x$, $\quad (g \circ f)(x) = -1 - 2x$;

b) $(f \circ g)(x) = \dfrac{x^4 + 2x^2 + 2}{(x^2+1)^2}$, $\quad (g \circ f)(x) = \dfrac{1}{1 + (x^2+1)^2}$;

c) $(f \circ g)(x) = x$, $\quad (g \circ f)(x) = x$;

d) $(f \circ g)(x) = -5$, $\quad (g \circ f)(x) = -2$;

e) $(f \circ g)(x) = 4 - x$, $\quad (g \circ f)(x) = -2 - x$.

2.1-3. L'equazione $1 - 2x = y$ ammette la soluzione $x = (1-y)/2$, dunque

$$f^{-1}(y) = \frac{1-y}{2},\ y \in \boldsymbol{R}.$$

Si ha poi

$$(f \circ f^{-1})(y) = 1 - 2\left(\frac{1-y}{2}\right) = 1 - 1 + y = y,$$

$$(f^{-1} \circ f)(x) = \frac{1}{2}(1 - 1 + 2x) = x.$$

2.1-4. Nel primo caso $f \circ g$ coincide con f, nel secondo con g.

2.1-5. Sia ha $(g \circ g)(x) = \sqrt[4]{x}$, mentre $g^2(x) = x$, per ogni $x \geq 0$.

2.1-6. a) $x \leq 1$; b) $x \leq 1$ e $x \geq 3$; c) $x < 1$; d) definita per ogni x reale.

2.1-7. Le affermazioni del testo corrispondono alle identità

$$-(-x) = x, \quad 1 - (1-x) = x; \quad \frac{1}{1/x} = x.$$

2.1-8. Il grafico è simmetrico rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante.

2.1-9. Funzioni accettabili:

a) $h(x) := x^3$, $g(t) := t + 1$;

b) $h(x) := 1 + x$, $g(t) := \sqrt{t}$;

c) $h(x) := x + 2$, $g(t) := t^4$;

d) $h(x) := x^2 + x + 1$, $g(t) := |t|$;

e) $h(x) := 1/x$, $g(t) := 1 + t + t^2$.

2.1-10. I valori di F_n per $n \leq 10$ sono: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55. Dividendo ambo i membri dell'uguaglianza $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ per F_{n+1}, si ottiene la formula ricorsiva richiesta. Poiché la successione dei numeri di Fibonacci è crescente, si ha $r_n \geq 1$ per ogni n. Per gli stessi n ne segue che

$$r_{n+1} = 1 + \frac{1}{r_n} \leq 1 + \frac{1}{1} = 2,$$

vale a dire $r_n \leq 2$ per $n \geq 2$. Analogamente, per $n \geq 2$ si avrà:

$$r_{n+1} = 1 + \frac{1}{r_n} \geq 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2},$$

vale a dire $r_n \geq 3/2$ per $n \geq 3$.

0.6 cm

2.2 Funzioni polinomiali

2.2-1. Basta osservare che

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) &= \\ = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) &= \\ = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{\Delta}{4a^2}\right), \end{aligned}$$

dove $\Delta = b^2 - 4ac$ è il *discriminante* del trinomio in esame. La quantità entro parentesi quadre assume il valore minimo, cioè $-\Delta/4a^2$, per $x = -b/2a$.

2.2-2. Basta eseguire il prodotto $a(x - x_1)(x - x_2)$, dopo aver sostituito al posto di x_1 e x_2 i rispettivi valori.

2.2-3. Stesso ragionamento del precedente esercizio.

2.2-4. Gli zeri (eventuali) della funzione $f(x)$ coincidono con quelli della funzione $k\,f(x)$, per ogni costante $k \neq 0$.

2.2-5. L'uguaglianza $x_1\,x_2 = q$ ci informa che le due radici sono concordi se $q > 0$, discordi in caso contrario. Nel caso di radici discordi, l'uguaglianza $x_1 + x_2 = -p$ ci informa che, delle due radici, ha modulo maggiore quella che ha segno contrario a quello di p.

2.2-6. Si hanno i risultati forniti dalla seguente tabella (i discriminanti sono tutti positivi):

	x_1	x_2
a)	$-$	$-$
b)	$-$	$+$
c)	$-$	$+$
d)	$+$	$+$
e)	$-$	$+$
f)	$-$	$-$

2.2-8. Il calcolo di $a_k\,x^k$ richiede k moltiplicazioni, dunque il calcolo di

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

richiede

$$n + (n-1) + \ldots + 2 + 1 = \frac{n(n+1)}{2}$$

moltiplicazioni e n addizioni. Il secondo algoritmo (implicito nella regola di Ruffini-Horner) è più vantaggioso, in quanto richiede n moltiplicazioni e altrettante addizioni.

Il primo algoritmo può essere migliorato memorizzando in un opportuno registro, diciamo m, i successivi valori delle potenze x^0, x^1, ..., x^n; è chiaro che, una volta calcolato x^k, la potenza x^{k+1} può essere calcolata con una sola moltiplicazione: $x^{k+1} = x \cdot x^k$.

L'algoritmo che si ottiene è descritto dallo schema seguente, dove p è la variabile che, al termine dell'algoritmo, contiene il valore del polinomio in esame:

0. $p \leftarrow a_0,\ m \leftarrow 1$
1. Per $k = 1, 2, \ldots, n$, ripetere:

 1.1 $m \leftarrow m \cdot x$

 1.2 $p \leftarrow p + a_k \cdot m$

Il tutto richiede $2n$ moltiplicazioni e n addizioni. Dunque ancora un algoritmo svantaggioso rispetto a quello di Ruffini-Horner.

2.2-9. $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$.

2.2-10. È un modo equivalente di formulare la definizione.

2.2-11. Se $p(x) = a_n\, x^n + \dots$, $a_n \neq 0$ e $b(x) = b_m\, x^m + \dots$, $b_m \neq 0$, dove i puntini stanno ad indicare termini di grado inferiore ad n ed m rispettivamente, allora $p(x)\, q(x) = a_n b_m\, x^{n+m} + \dots$, con $a_n b_m \neq 0$.

2.2-12. Il termine di grado massimo nello sviluppo di $p(x + k)$ proviene dal termine $a_n(x + k)^n = a_n(x^n + \dots)$ dove i puntini stanno ad indicare termini di grado inferiore a n. Dunque $p(x + k)$ ha lo stesso termine direttivo di $p(x)$ Quanto a $p(kx)$, il suo termine direttivo è $(a_n k^n)\, x^n$.

2.2-13. Si trova

a) $p(x + 1) = x^2 + 3x + 3$; b) $p(x - 1) = x^2 - x + 1$;

c) $p(2x) = 4x^2 + 2x + 1$; d) $p(x/2) = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x}{2} + 1$.

2.2-14. Vero: se al posto di x si scrive $\alpha t + \beta, \alpha \neq 0$, allora, per ogni k, $x^k = (\alpha t + \beta)^k$ è un polinomio di grado k in t in virtù della formula del binomio.

2.2-15. Diamo, nell'ordine, la somma, il prodotto, il quoziente e il resto della divisione di p per q:

a) $x^3 + 3x^2 - 3x + 6$;	$x^5 + 2x^4 - x^3 + 8x^2 - 6x + 8$;	$x + 2$;	$-5x$;
b) $2x^2 + \dfrac{3}{2}\, x$;	$x^4 + \dfrac{3}{2}\, x^3 + \dfrac{1}{2}\, x^2 - \dfrac{1}{2}\, x - 1$;	1;	$-\dfrac{1}{2}\, x - 2$;
c) $\dfrac{1}{2}\, x^2 + \dfrac{4}{3}\, x + \dfrac{2}{3}$;	$\dfrac{1}{6}\, x^3 + \dfrac{5}{6}\, x^2 + \dfrac{8}{9}\, x - \dfrac{1}{3}$;	$\dfrac{3}{2}\, x - \dfrac{3}{2}$;	$\dfrac{7}{6}$.

2.2-16. No; $\boldsymbol{Q}$ essendo un campo, le operazioni eseguite sui coefficienti non ci fanno uscire da $\boldsymbol{Q}$.

2.2-17. Vero, per le regioni spiegate nella soluzione del precedente problema.

2.2-18. Vero: l'unica operazione di divisione tra numeri richiesta dall'algoritmo di divisione tra polinomi (v. Unità 2.2-1 della terza parte, *Materiali per il Laboratorio di Matematica*) ha come divisore il termine direttivo del polinomio divisore. Se tale termine vale 1, non si esce dall'ambito di $\boldsymbol{Z}$.

2.2-19. Vero; basta calcolare il polinomio dividendo per $x = -1$ e per $x = 1$.

2.3 Funzioni esponenziali e logaritmiche

2.3-1. Il numero x è minore di $10^3 = 1000$ e maggiore di $10^2 = 100$, dunque la sua parte intera è rappresentata da uno sviluppo di tre cifre decimali. Se $\log x = -2.312$, il numero x è maggiore di $10^{-3} = 0.001$ e minore di $10^{-2} = 0.01$, dunque le prime due cifre dopo la virgola della sua rappresentazione decimale sono nulle, mentre la terza è > 0.

2.3-2. Si ha $\log 2^{200} = 200 \cdot \log 2 = 200 \cdot 0.3010\ldots = 60.2\ldots$; dunque il numero 2^{200} è rappresentato da un allineamento di 59 cifre decimali.

2.3-3. Se $x = y$ non c'è niente da dimostrare; se $0 < x < y$, prendendo, ad esempio, i logaritmi naturali, la disuguaglianza si scrive in forma equivalente

$$x \ln x + y \ln y > y \ln x + x \ln y \iff (y - x) \ln y > (y - x) \ln x,$$

che è evidentemente verificata, in quanto il logaritmo naturale è una funzione strettamente crescente.

2.3-4. Sia $t := \log_a b$, vale a dire sia $a^t = b$; allora, elevando entrambi i membri alla potenza n-esima si ha

$$(a^t)^n = a^{tn} = (a^n)^t = b^n,$$

che è la tesi.

2.3-5. Basta esprimere tutti i logaritmi in una stessa base, ad esempio in base e. Si trova infatti

$$\frac{\ln b}{\ln a} \frac{\ln c}{\ln b} \frac{\ln a}{\ln c} = 1.$$

2.3-6. Si ha infatti

$$\log_{\sqrt{2}} x = \frac{\log_2 x}{\log_2 \sqrt{2}} = 2 \log_2 x, \quad \log_{1/2} x = \frac{\log_2 x}{\log_2 \frac{1}{2}} = -\log_2 x.$$

2.3-7. Si ha

$$\log_{a^2} x = \frac{\log_a x}{\log_a a^2} = \frac{1}{2} \log_a x.$$

2.3-8. Dividendo entrambi i membri per il prodotto $\log_a x \log_b x \log_c x$, si ottiene

$$\frac{1}{\log_c x} + \frac{1}{\log_b x} + \frac{1}{\log_a x} = \frac{1}{\log_{abc} x},$$

che si scrive in forma equivalente

$$\log_x c + \log_x b + \log_x a = \log_x abc,$$

cioè un'uguaglianza evidentemente verificata.

2.3-9. Basta scrivere la disuguaglianza da dimostrare nella forma

$$\ln(a + b) - \ln 2 \geq \frac{1}{2} \ln ab \iff \ln \frac{a + b}{2} \geq \ln \sqrt{ab}.$$

2.3-10. Valutiamo il denominatore; si ha

$$\begin{aligned}\log_{17} 34 - \log_{34} 68 &= 1 + \log_{17} 2 - 1 - \log_{34} 2 = \log_{17} 2 - \log_{34} 2 = \\ &= \frac{1}{\log_2 17} - \frac{1}{\log_2 34} = \frac{1}{\log_2 17} - \frac{1}{1 + \log_2 17} = \\ &= \frac{1}{\log_2 17\,(1 + \log_2 17)}.\end{aligned}$$

Ma

$$\log_2 17\,(1+\log_2 17) > \log_2 16\,(1+\log_2 16) = 4\cdot 5 = 20.$$

2.3-11. Ricordiamo il legame tra il periodo T e la costante di disintegrazione λ:

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda}.$$

Si hanno dunque le formule

$$m_1(t) = 800\exp(-\lambda_1 t), \quad T_1 = 1 = (\ln 2)/\lambda_1,$$

$$m_2(t) = 100\exp(-\lambda_2 t), \quad T_2 = 10 = (\ln 2)/\lambda_2,$$

dove t è misurato in giorni. Si ha dunque $\lambda_1 \approx 0.69135$, $\lambda_2 \approx 0.069135$. Pertanto

$$\ln m_1(t) = \ln 800 - \lambda_1 t \approx 6.68461 - (0.69135)t,$$

$$\ln m_2(t) = \ln 100 - \lambda_2 t \approx 4.60517 - (0.069135)t.$$

Imponiamo la condizione

$$\frac{m_1(t)}{m_1(t)+m_2(t)} = \frac{1}{1+m_2(t)/m_1(t)} = 0.8 = \frac{4}{5}.$$

Poiché $m_2(t)/m_1(t) = 8\exp[(\lambda_2-\lambda_1)t]$, la condizione imposta si scrive anche

$$1 + 8\exp[(\lambda_2-\lambda_1)t] = \frac{5}{4} \iff \exp[(\lambda_2-\lambda_1)t] = \frac{1}{32}.$$

Prendendo i logaritmi naturali si trova

$$(\lambda_2-\lambda_1)t = -\ln 32 \iff t = \frac{-3.46573\ldots}{-0.62383\ldots} = 5.55557\ldots.$$

2.3-12. Sia $m(t) = m_0\,\exp(-\lambda t)$ la legge di disintegrazione. Dopo quattro anni si ha $m(4) = (3/4)\,m_0$, cioè

$$m_0\exp(-4\lambda) = \frac{3}{4}\,m_0 \iff -4\lambda = \ln\frac{3}{4},$$

e quindi

$$\lambda = -\frac{1}{4}\,\ln\frac{3}{4} = 0.07192\ldots.$$

Per il tempo di dimezzamento si trova $T = (\ln 2)/\lambda = 9.63768\ldots$. Ponendo l'origine dei tempi, $t=0$, a quattro anni fa, la legge di decadimento si scrive $m(t) = 4\,\exp(-\lambda t)$; le domande poste nel testo equivalgono a calcolare $m(1)$, $m(-6)$, $m(14)$.

2.4 Funzioni circolari

2.4-1. Dall'uguaglianza

$$\tan(x_1 + x_2) = \frac{\sin(x_1 + x_2)}{\cos(x_1 + x_2)} = \frac{\sin x_1 \cos x_2 + \cos x_1 \sin x_2}{\cos x_1 \cos x_2 - \sin x_1 \sin x_2},$$

segue il risultato richiesto, dividendo numeratore e denominatore per $\cos x_1 \cos x_2$.

2.4-2. Basta porre $x_1 = x_2 = x$.

2.4-3. Scrivendo $x/2$ al posto di x nella formula di duplicazione del coseno, otteniamo le due uguaglianze

$$\cos x = 2\cos^2 \frac{x}{2} - 1 \iff \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2},$$
$$\cos x = 1 - 2\sin^2 \frac{x}{2} \iff \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}.$$

2.4-4. Posto, per brevità, $c := \cos x$, dall'uguaglianza

$$t^2 = \frac{1-c}{1+c} \iff t^2(1+c) = 1 - c,$$

segue

$$c = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Si ha poi

$$\sin^2 x = 1 - \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2 = \frac{4t^2}{(1+t^2)^2}.$$

2.4-5. Entrambe le funzioni $x \mapsto |x|$ e $x \mapsto |\sin x|$ sono pari, dunque ci si può limitare a considerare valori positivi di x. Per $x \geq 1$ la disuguaglianza $|\sin x| \leq x$ è ovvia in quanto la funzione seno non supera l'unità in valore assoluto; per $0 \leq x \leq 1$ essa segue dalla definizione stessa della funzione seno, e corrisponde al fatto che la lunghezza di una corda è inferiore a quella dell'arco corrispondente. Dunque l'affermazione è provata per $n = 1$. Supposto che essa sussista per un assegnato n, si ha

$$\begin{aligned} |\sin(n+1)x| &= |\sin nx \cos x + \cos nx \sin x| \leq \\ &\leq |\sin nx| + |\sin x| \leq n|\sin x| + |\sin x| = \\ &= (n+1)|\sin x|. \end{aligned}$$

2.4-6. Sia $x_1 < x_2$. Si tratta di dimostrare che

$$x_1 + \sin x_1 < x_2 + \sin x_2 \quad \iff \quad \sin x_1 - \sin x_2 < x_2 - x_1.$$

Valutiamo il valore assoluto del primo membro. In virtù delle formule di prostaferesi esso si scrive

$$2\cos\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \sin\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right),$$

quantità che, in valore assoluto non supera

$$2 \cdot 1 \cdot \frac{|x_1 - x_2|}{2} = |x_1 - x_2| = x_2 - x_1.$$

Anzi, poiché $|x_1 - x_2| > 0$ vale la disugualianza “stretta”

$$\left|\sin\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)\right| < \frac{|x_1 - x_2|}{2}.$$

In generale, la funzione $x \mapsto mx + \sin x$ è strettamente crescente per $m \geq 1$; strettamente decrescente per $m \leq -1$.

2.4-7. Segue direttamente dall'esame della figura 2.4-23.

2.4-8. La formula sussiste per $n = 1$:

$$\sqrt{2} = 2\cos\frac{\pi}{4} \iff \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Poniamo, per brevità

$$\alpha_n := \frac{\pi}{2^{n+1}};$$

si osservi che $\alpha_{n+1} = \alpha_n/2$. Allora

$$\cos\alpha_{n+1} = \cos\frac{\alpha_n}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos\alpha_n}{2}} \iff 2\cos\alpha_{n+1} = \sqrt{2 + 2\cos\alpha_n}.$$

Se, per l'ipotesi induttiva, si ha

$$2\cos\alpha_n = \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}} \quad (n \text{ radici quadrate}),$$

allora

$$2\cos\alpha_{n+1} = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}} \quad (n+1 \text{ radici quadrate}).$$

2.4-9. Occupiamoci della prima uguaglianza. Si ha

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\ \sin\beta,$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\ \sin\beta;$$

sottraendo membro a membro si ottiene la formula voluta.

2.4-10. Si ha

$$\cos(n+1)\alpha = \cos n\alpha\cos\alpha - \sin n\alpha\ \sin\alpha;$$

ma

$$-\sin n\alpha \sin \alpha = \frac{1}{2}[\cos(n+1)\alpha - \cos(n-1)\alpha],$$

quindi, sostituendo nella formula precedente, si ottiene

$$\cos(n+1)\alpha = \cos n\alpha \cos\alpha + \frac{1}{2}[\cos(n+1)\alpha - \cos(n-1)\alpha],$$

che è la formula richiesta, salvo portare a primo membro il termine contenente il coseno di $(n+1)\alpha$.

2.4-11. Per $n = 1$ si ha l'identità $\cos\alpha = \cos\alpha$, per $n = 2$ si ha

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1.$$

Ponendo, per brevità, $c := \cos\alpha$, si ha dunque $\cos 2\alpha = p_2(c) := 2c^2 - 1$, mentre per $n = 1$ si ha, evidentemente, $\cos\alpha = p_1(c) := c$.
Procediamo per induzione, supponendo che, per tutti gli indici positivi k minori o uguali di un assegnato $n \geq 1$, si abbia $\cos k\alpha = p_k(c)$, dove p_k è un polinomio di grado k nella variabile c. Allora

$$\cos(n+1)\alpha = 2c\,p_n(c) - p_{n-1}(c) \iff \cos(n+1)\alpha = p_{n+1}(c),$$

avendo posto $p_{n+1}(c) := 2c\,p_n(c) - p_{n-1}(c)$. Abbiamo dunque anche la formula ricorsiva per la generazione dei polinomi in esame. Ad esempio si ha

$$p_3(c) = 2c\,p_2(c) - p_1(c) = 2c\,(2c^2 - 1) - c = 4c^3 - 3c.$$

2.4-12. Basta osservare che se $x \geq r$ (la cisterna è piena oltre la metà), l'area del segmento circolare delimitato dalla corda CD si ottiene come somma tra l'area del settore circolare delimitato dai raggi OC e OD e l'area del triangolo OCD.

2.4-13. Si tratta di un risultato generale: se $x \mapsto f(x)$ è periodica di (minimo) periodo T, $x \mapsto f(kx)$ è periodica di (minimo) periodo T/k.

2.4-14. Il minimo periodo di $x \mapsto \sin ht$, è $2\pi/h$, il minimo periodo di $x \mapsto \cos kt$, è $2\pi/k$; se h e k sono primi tra loro, 2π è il minimo periodo comune ad entrambe le funzioni.

2.5 Numeri complessi

2.5-1. Si hanno gli insiemi rappresentati nelle figure sotto riportate.

2.5-2. Siano $z := a + bi$, $w := c + di$. Se $z + w$ è reale, allora $b + d = 0 \iff b = -d$, e $b \neq 0$ per ipotesi. Ma anche zw è reale, dunque $ad + bc = -ab + bc = b(c - a) = 0$, da cui $a = c$.

2.5-3. Si trovano i seguenti risultati:

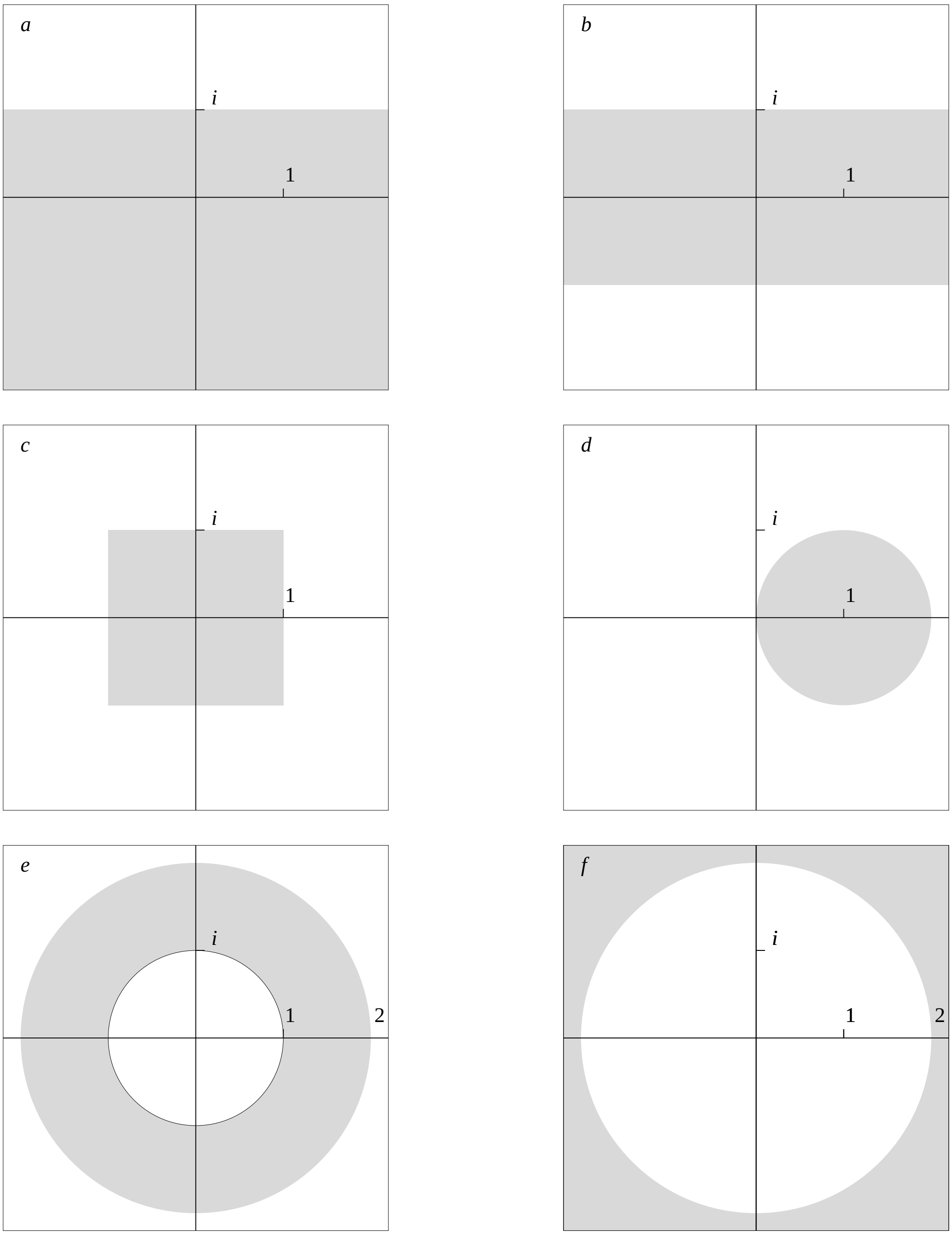

Figura 2.5-1

a) $1 + (\sqrt{5} - 3)i$; b) -1; c) $-\dfrac{i}{2}$;

d) i; e) $\dfrac{1}{4} + \dfrac{\sqrt{3}}{4}\, i$; f) $2i$.

2.5-4. Si trovano i seguenti risultati:

a) $\quad 3-2i, \qquad 37-9i, \qquad 1+12i, \qquad -\dfrac{33}{50}+\dfrac{19}{50}\,i;$

b) $\quad 2\sqrt{2}, \qquad 5, \qquad -2\sqrt{3}\,i, \qquad -\dfrac{1}{5}-\dfrac{2}{5}\sqrt{6}\,i.$

2.5-5. Si ha

$$\begin{aligned}|z+w|^2+|z-w|^2 &= (z+w)(z+w)^*+(z-w)(z-w)^* = \\ &= zz^*+ww^*+zw^*+z^*w+zz^*+ww^*-zw^*-z^*w = \\ &= 2(|z|^2+|w|^2).\end{aligned}$$

Nel parallelogramma costruito sui vettori che rappresentano z e w la somma dei quadrati delle lunghezze delle diagonali è eguale alla somma dei quadrati delle lunghezze dei quattro lati.

2.5-6. Sia ha $i^2=-1$, $i^3=-i$, $i^4=1$. Se $n>4$, sia $n=4q+r$, $0\le r<4$, dunque q e r sono il quoziente e il resto della divisione intera di n per 4. Allora

$$i^n = i^{4q+r} = (i^4)^q\, i^r = i^r.$$

Dunque i quattro valori $i, -1, -i, 1$ si ripetono ciclicamente.

2.5-7. Dal sistema di equazioni

$$x^2-y^2=u$$
$$4x^2y^2=v^2,$$

ricavando l'espressione $y^2=x^2-u$, dalla prima equazione e sostituendo nella seconda si ottiene l'equazione di secondo grado (in x^2) $4x^4-4ux^2-v^2=0$. Poiché x^2 è ≥ 0, si ottiene la soluzione

$$x^2=\frac{u+\sqrt{u^2+v^2}}{2}=\frac{u+|w|}{2}.$$

Il valore di y^2 si può ottenere dalla formula $y^2=x^2-u$, sostituendo il valore ottenuto per x^2, tenendo conto del fatto che y e v hanno lo stesso segno, in quanto x è positivo.

2.5-8. Si trovano i seguenti risultati:

a) modulo $=4$, argomento $=\pi/6$;

b) modulo $=2$, argomento $=-\pi/3$;

c) modulo $=\sqrt{2}$, argomento $=\pi/4$;

d) modulo $=3$, argomento $=\pi/2$.

2.5-9. Utilizzando le cosiddette *formule di Werner*, si trova

$$\begin{aligned}z_1+z_2 &= \cos t_1+\cos t_2+i(\sin\, t_1+\sin\, t_2) = \\ &= 2\cos\frac{t_1-t_2}{2}\left(\cos\frac{t_1+t_2}{2}+i\,\sin\,\frac{t_1+t_2}{2}\right).\end{aligned}$$

Dunque $z_1 + z_2$ ha come modulo $2\cos[(t_1 - t_2)/2]$ e come argomento $(t_1 + t_2)/2$. La diagonale del parallelogramma costruito sui vettori z_1 e z_2, entrambi di lunghezza 1, è anche la bisettrice dell'angolo formato dagli stessi vettori.

2.5-10. Occupiamoci di a). Utilizzando la formula del binomio, si trova

$$(1+i)^4 = 1 + 4i + 6i^2 + 4i^3 + i^4 = 1 + 4i - 6 - 4i + 1 = -4.$$

Allo stesso risultato si perviene osservando che $1 + i$ ha modulo $\sqrt{2}$ ed argomento $\pi/4$. Calcolo analogo per $(1 - i)^4$.

b) Utilizziamo ancora la formula del binomio; si trova

$$\begin{aligned}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 &= -\frac{1}{8} + 3\,\frac{1}{4}\,i\,\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}(-\frac{3}{4}) + i^3\,\frac{3}{8}\sqrt{3} = \\ &= -\frac{1}{8} + \frac{3\sqrt{3}}{8}\,i + \frac{9}{8} - \frac{3\sqrt{3}}{8}i = 1.\end{aligned}$$

Allo stesso risultato si perviene osservando che $-1/2 + i\sqrt{3}/2$ ha modulo 1 ed argomento $(2/3)\pi$.

2.5-11. Si trovano i seguenti risultati:

a) $2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = \sqrt{3} + i;$

b) $-1 + i0 = -1;$

c) $3(0 - i) = -3i;$

d) $5(1 + i0) = 5.$

2.5-12. Da $(c + is)^2 = i$, segue $c^2 - s^2 = 0$, $2cs = 1$; dalla prima eguaglianza segue dunque $c = s$ (tenuto conto che c ed s sono positivi), ed infine dalla seconda $2c^2 = 1 \iff c = s = 1/\sqrt{2}$.

2.5-13. Attualmente abbiamo $(c + is)^3 = i$, dunque $c^3 + i3c^2s - 3cs^2 - is^3 = i$, da cui, eguagliando le parti reali, $c^3 - 3cs^2 = 0$, che si scrive anche, $4c^3 - 3c = 0$. L'ultima equazione ammette come unica radice positiva $c = \sqrt{3}/2$, da cui $s = 1/2$, sempre tenendo presente che s è > 0.

2.5-14. Si ha

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2},$$

dunque $\cos(\pi/3) = 1/2$, $\sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$.

2.5-15. Si ha

$$(c + is)^n = \sum_{0 \le j \le n} \binom{n}{j} c^{n-j}\,(is)^j.$$

Evidentemente, solo i termini per cui j è pari, $j = 2k$, sono reali; eguagliando la parti reali a primo e secondo membro si ottiene la formula richiesta. In particolare, scrivendo per brevità c ed s al posto di $\cos t$ e $\sin t$ rispettivamente, risulta:

$$\cos 2t = c^2 - s^2 = 2c^2 - 1;$$

$$\cos 3t = c^3 - 3cs^2 = 4c^3 - 3c;$$

$$\cos 4t = c^4 - 6c^2s^2 + s^4 = 8c^4 - 8c^2 + 1.$$

Si trova analogamente

$$\sin nt = \sum_{0 \le k < n/2} \binom{n}{2k+1} (-1)^k c^{n-2k-1} s^{2k+1};$$

raccogliendo s a fattor comune, si trova la possibilità di esprimere $\sin nt$ come prodotto di s per un polinomio in c. Se n è dispari, gli esponenti del coseno, $2n - k - 1$, sono tutti pari, dunque si può sostituire c^2 con $1 - s^2$. In conclusione: se n è dispari, $\sin nt$ si può esprimere come polinomio di grado n in s.