Giulio Cesare Barozzi: **Primo Corso di Analisi Matematica**
Zanichelli (Bologna), 1998, ISBN 88-08-01169-0

Capitolo 3 LIMITI E CONTINUITÀ

Soluzione dei problemi posti al termine di alcuni paragrafi

3.1 Funzioni numeriche reali

3.1-1. Si hanno i grafici mostrati dalle figure 3.1 $a \div h$.

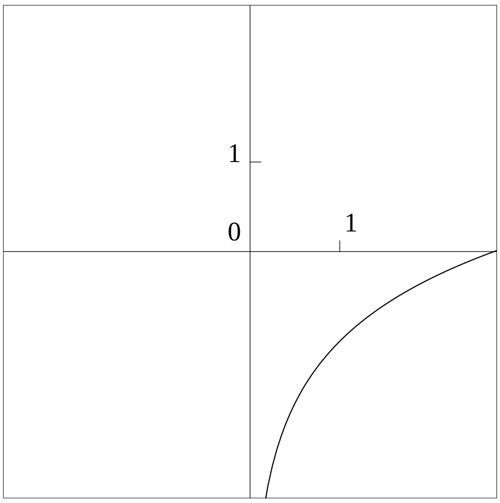

Figura 3.1a

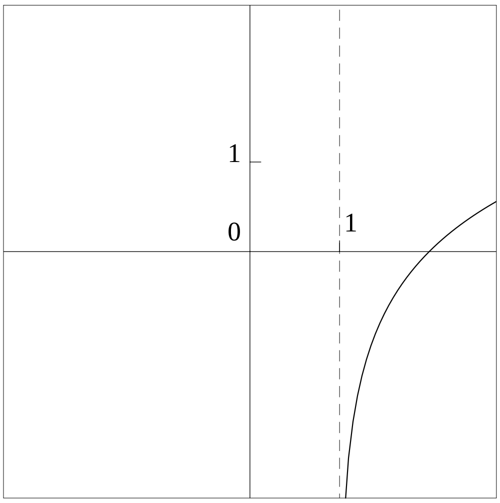

Figura 3.1b

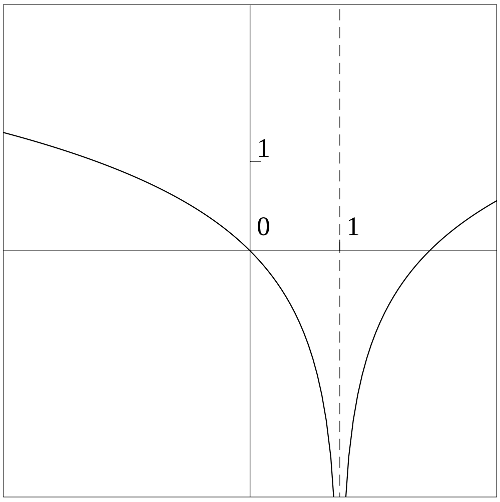

Figura 3.1c

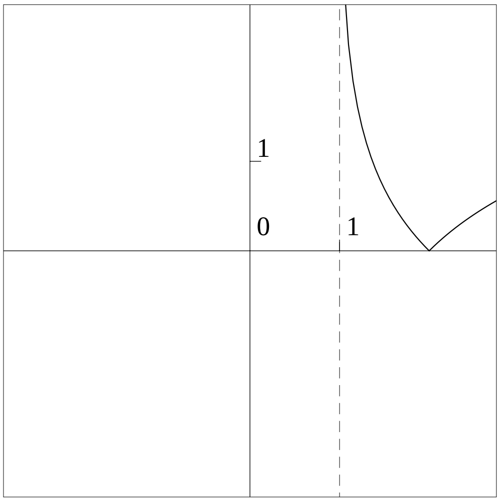

Figura 3.1d

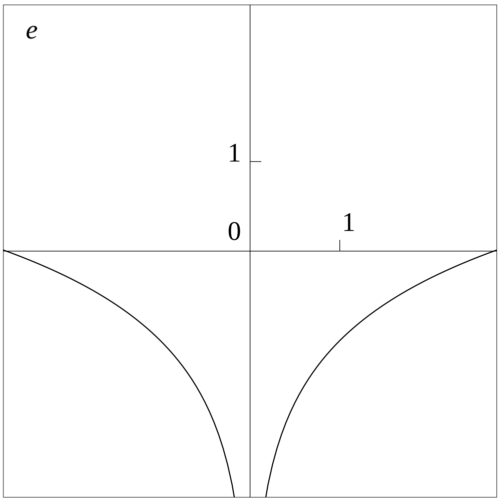

Figura 3.1e

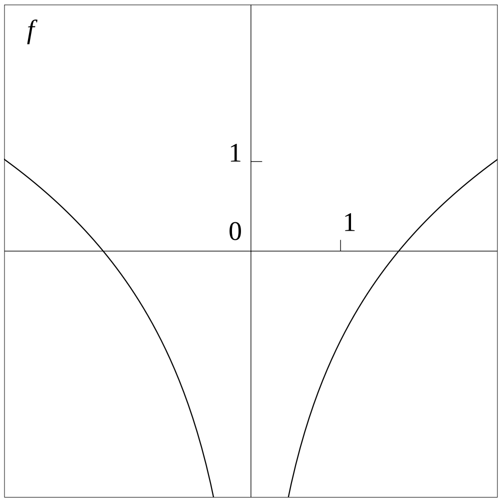

Figura 3.1f

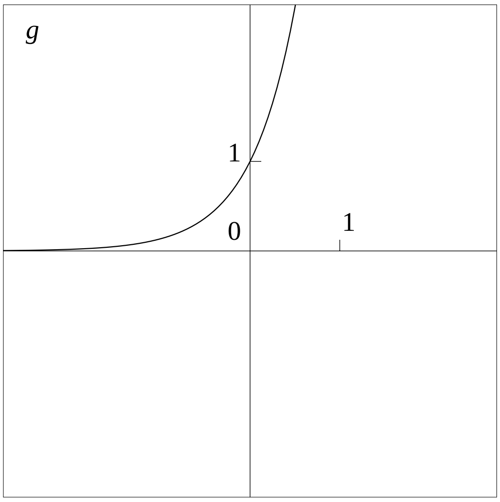

Figura 3.1g

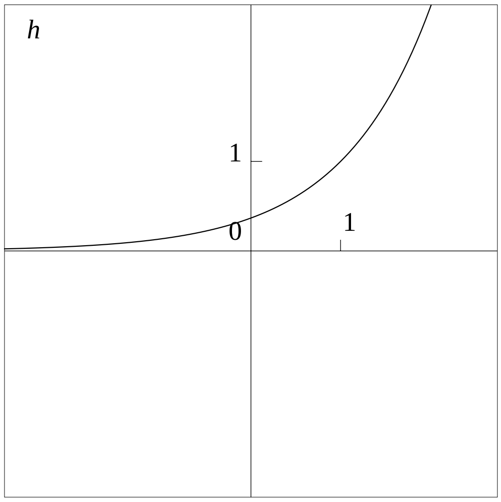

Figura 3.1h

3.1-2. Si hanno i grafici mostrati dalle figure 3.2 $a \div d$.

3.1-3. Se $x_1 \neq x_2$ e $f(x_1) = f(x_2)$, dove x_1 e x_2 appartengono al dominio di f, cioè sono numeri diversi da $-d/c$, allora

$$\begin{aligned} \frac{ax_1+b}{cx_1+d} = \frac{ax_2+b}{cx_2+d} &\iff (ax_1+b)(cx_2+d) = (ax_2+b)(cx_1+d) \iff \\ &\iff (ad-bc)x_1 = (ad-bc)x_2 \iff \\ &\iff (ad-bc)(x_2-x_1) = 0. \end{aligned}$$

Per la legge di annullamento del prodotto si trova, in definitiva,

$$f(x_1) = f(x_2) \iff (ad-bc) = 0.$$

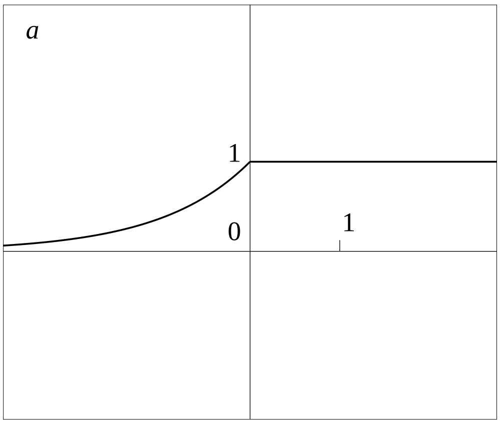

Figura 3.2a

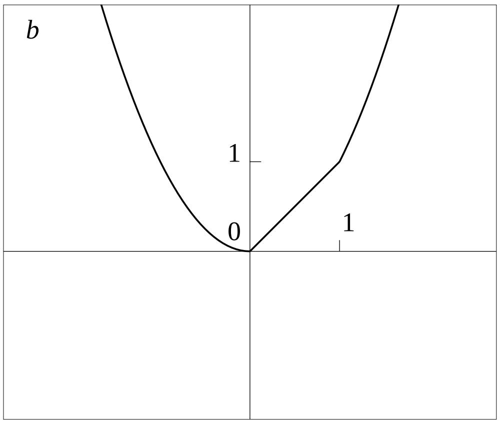

Figura 3.2b

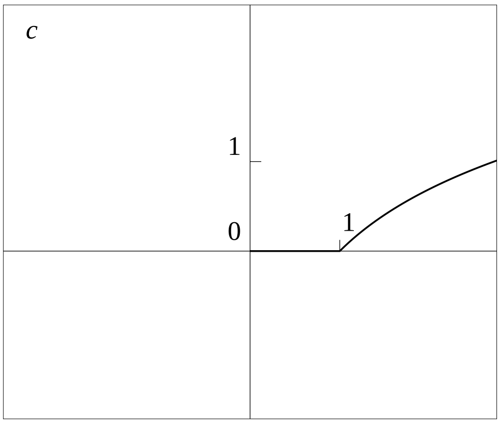

Figura 3.2c

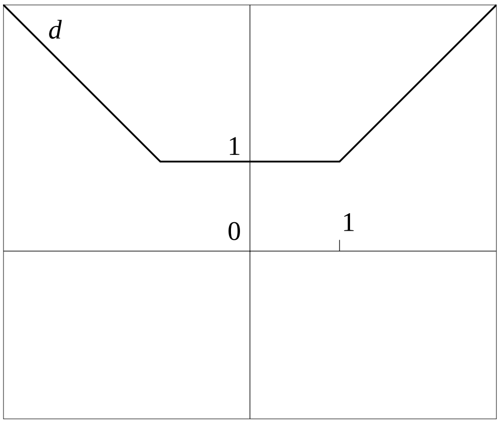

Figura 3.2d

Se dunque $ad - bc \neq 0$, la funzione f è iniettiva; per calcolarne l'inversa basta ricavare x dall'uguaglianza

$$y = \frac{ax+b}{cx+d};$$

si trova $x = (-dy+b)/(cy-a)$; dunque la funzione inversa, definita per $y \neq a/c$, si scrive

$$f^{-1} : y \mapsto \frac{-dy+b}{cy-a}.$$

Come si vede, la funzione inversa f^{-1} è un rapporto tra funzioni polinomiali di primo grado, come la funzione diretta f.

3.1-4. Si trovano i seguenti risultati:

a) $f^{-1}(y) = \dfrac{y-1}{3}$;

b) $f^{-1}(y) = 3y$;

c) $f^{-1}(y) = \exp(y-3)$;

d) $f^{-1}(y) = \exp(y-1) - 2$;

e) $f^{-1}(y) = \ln y - 1$;

f) $f^{-1}(y) = \ln(y-1)$.

3.1-5. Si trovano i seguenti risultati:

a) f è definita per $x \neq 0$, g è definita per $x > 0$;

b) f è definita per $x \geq 1$, g è definita per $|x| \geq 1$;

c) f è definita per ogni x reale, g è definita per $x \neq 2$;

d) f è definita per $x \geq 0$, g è definita per ogni x reale;

e) f è definita per ogni x reale, g è definita per $x > 0$;

f) f è definita per ogni x reale, g è definita per $x \geq 0$;

g) f è definita per $x \leq 1$, g è definita per ogni x reale;

h) f è definita per $x \neq 0$, g è definita per $x > 0$;

i) f è definita per ogni x reale, g è definita per $0 \leq x \leq 1$.

3.1-6. Si trova: a) dispari; b) né pari né dispari; c) dispari; d) pari; e) né pari né dispari; f) dispari.

3.1-7. Sono tutte periodiche di periodo 2π, ad eccezione della funzione c) che è periodica di periodo $2\pi/\omega$.

3.1-8. La tesi si scrive

$$a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} > a_{n+1} = \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} \iff 2\sqrt{n+1} > \sqrt{n} + \sqrt{n+2}.$$

Trattandosi di quantità non negative, possiamo confrontare i quadrati; la tesi diventa

$$4(n+1) > n + n + 2 + 2\sqrt{n(n+2)} \iff n+1 > \sqrt{n(n+2)}.$$

Un ulteriore elevamento al quadrato fornisce

$$n^2 + 2n + 1 > n^2 + 2n,$$

disuguaglianza ovviamente vera. Con gli strumenti introdotti nel capitolo quarto, si può osservare che, se si considera la funzione $f(x) := \sqrt{x}$, allora la disuguaglianza

$$2\sqrt{n+1} > \sqrt{n} + \sqrt{n+2}$$

diventa

$$f(n+1) > \frac{1}{2}\,[f(n) + f(n+2)].$$

Poiché $n+1$ è la media aritmetica dei valori n e $n+2$, l'ultima disuguaglianza scritta esprime la stretta concavità della funzione $x \mapsto \sqrt{x}$, proprietà immediatamente verificata, in quanto la derivata seconda della funzione stessa è negativa.

3.1-9. La tesi sussiste per $n = 0$: $a_0 = 2$, $a_1 = 3/2$. Supponiamo che, per un assegnato naturale n, sia $a_n > a_{n+1}$; allora

$$a_{n+2} = \frac{1}{2}(a_{n+1} + 1) < \frac{1}{2}(a_n + 1) = a_{n+1}.$$

La tesi è dimostrata per induzione.

3.1-10. Se $a = b$ la successione è costante. Supponiamo, per fissare le idee, che sia $a_0 = a < b = a_1$; si hanno le disuguaglianze

$$a_0 < a_2 < a_1,$$

$$a_2 < a_3 < a_1,$$

$$a_2 < a_4 < a_3,$$

e così via. Dunque la successione dei termini di indice pari è strettamente crescente, quella dei termini di indice dispari è strettamente decrescente.

3.1-11. a) Si ha $a_0 = 1$, $a_1 = \sqrt{2} - 1 = 0.41\ldots$, $a_2 = \sqrt{5} - 2 = 0.23\ldots$. Si è dunque indotti a congetturare che si tratti di una successione strettamente decrescente. Tale tesi si scrive

$$\sqrt{n^2+1} - n > \sqrt{(n+1)^2+1} - n - 1 \iff 1 + \sqrt{n^2+1} > \sqrt{n^2+2n+2}.$$

Trattandosi di quantità non negative possiamo confrontare i quadrati ottenendo

$$1 + 2\sqrt{n^2+1} + n^2 + 1 > n^2 + 2n + 2 \iff 2\sqrt{n^2+1} > 2n,$$

disuguaglianza evidentemente vera.

b) Si ha $b_n = e^n\,(e-1)$; si tratta dunque di una progressione geometrica di ragione $e-1 > 1$, e pertanto di una successione strettamente crescente.

c) La successione $n \mapsto n/(n+1)$ è strettamente crescente:

$$\frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{n+2} \iff n(n+2) < (n+1)^2.$$

La funzione $t \mapsto \sqrt{t}$ è anch'essa strettamente crescente. Ne segue che la successione in esame è strettamente crescente in quanto composta da due funzioni dello stesso tipo.

d) Strettamente crescente, in base allo stesso ragionamento del precedente esercizio.

3.3 Definizione di limite di una funzione in un punto

3.3-1. Se $x_0 > 1$, gli intorni di x_0 di raggio $r < x_0 - 1$ non intersecano l'intervallo $[0, 1]$, e dunque a più forte ragione non intersecano gli insiemi $[0, 1] - \mathbf{Q}$ e $[0, 1] \cap \mathbf{Q}$. Se ne conclude che i numeri maggiori di 1 e, per la stessa ragione, quelli minori di 0 non sono punti di accumulazione per gli insiemi in esame. Al contrario, se $0 \leq x_0 \leq 1$, comunque si scelga il raggio $r > 0$ l'intorno di centro x_0 e raggio r ha in comune con l'intervallo $[0, 1]$ un intervallo non ridotto ad un punto: tale intervallo contiene infiniti numeri razionali ed infiniti numeri irrazionali, come sappiamo dal corollario 2 della Proposizione 1.6-3 (v. paragrafo 1.6, pagina 51).

3.3-2. Per $n = m$ si ha $n/m+m/n = 2$, dunque 2 appartiene ad A. E' intuitivo supporre che se n ed m sono poco diversi tra loro, il numero $n/m + m/n$ sia poco diverso da 2. Consideriamo, ad esempio, i numeri per cui si ha $m = n + 1$:

$$\begin{aligned}\frac{n}{n+1} + \frac{n+1}{n} &= \frac{n^2 + n^2 + 2n + 1}{n^2 + n} = \\ &= \frac{2(n^2 + n) + 1}{n^2 + n} = \\ &= 2 + \frac{1}{n^2 + n}.\end{aligned}$$

Fissato un numero positivo r, il numero in esame differisce da 2 a meno di r a patto che sia

$$\frac{1}{n^2 + n} < r \iff n^2 + n > \frac{1}{r}.$$

Tutti i valori di n "abbastanza grandi" (ad esempio quelli $> 1/r$) verificano la disuguaglianza scritta.

3.3-3. Per $p = 1$ si ritrova l'esercizio precedente. Per ogni fissato $p \geq 1$, si ha

$$\frac{n}{n} + \frac{pn}{n} = 1 + p,$$

dunque tutti i numeri naturali ≥ 2 appartengono ad A. Esaminiamo, come nel precedente esercizio, i numeri che si ottengono per p fissato e $m = n + 1$. Si ha

$$\begin{aligned}\frac{n}{n+1} + \frac{p(n+1)}{n} &= \frac{n^2 + p(n^2 + 2n + 1)}{n^2 + n} = \\ &= \frac{(p+1)n^2 + (p+1)n + (p-1)n + p}{n^2 + n} = \\ &= p + 1 + \frac{(p-1)n + p}{n^2 + n}.\end{aligned}$$

Ora si ha

$$0 \leq \frac{(p-1)n + p}{n^2 + n} \leq \frac{pn + p}{n^2 + n} = \frac{p}{n}.$$

Dunque i numeri in esame differiscono da $1 + p$ a meno di r a patto che sia

$$\frac{p}{n} < r \iff n > \frac{p}{r}.$$

3.3-4. Si ha
$$\left|\,(-1)^n\,\frac{1}{n}\,\right| = \frac{1}{n},$$
dunque 0 è punto di accumulazione di A_1. Esso è anche l'unico punto di accumulazione: se x_0 è un numero diverso da 0, diciamo $x_0 > 0$, l'intorno di centro x_0 e raggio $r < x_0$ contiene al più un numero finito di elementi di A_1: tutti gli elementi per cui

$$\frac{1}{n} < x_0 - r \iff n > \frac{1}{x_0 - r},$$

sono certamente esterni all'intorno in questione.

Per A_2 si trova analogamente che sono punti di accumulazione i numeri 1 e -1 ed essi soltanto; si tenga presente che
$$\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}.$$

3.3-5. Si ha
$$f(x) - f(x_0) = ax + b - (ax_0 + b) = a(x - x_0).$$
Dunque la condizione $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ è verificata se e solo se $|x - x_0| < \varepsilon/|a|$. Si può dunque scegliere $\delta_\varepsilon = \varepsilon/|a|$. Geometricamente l'interpretazione è semplice: a parità di ε il numero δ_ε è tanto più piccolo quanto più grande è $|a|$, cioè la pendenza della retta grafico di f.

3.3-6. Sia $0 \le x_1 \le x_2$; la tesi si scrive

$$\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1} \le \sqrt{x_2 - x_1} \iff \sqrt{x_2} \le \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2 - x_1}.$$

Elevando al quadrato si ottiene

$$x_2 \le x_1 + x_2 - x_1 + 2\sqrt{x_1}\,\sqrt{x_2 - x_1} \iff 0 \le 2\sqrt{x_1}\,\sqrt{x_2 - x_1}.$$

L'ultima disuguaglianza è evidentemente verificata: essa è "stretta" se $0 < x_1 < x_2$.

Perché sia $\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1} < \varepsilon$ è dunque sufficiente che sia

$$\sqrt{x_2 - x_1} < \varepsilon \iff x_2 - x_1 < \varepsilon^2.$$

In altri termini, si può scegliere $\delta_\varepsilon = \varepsilon^2$. Come si vede, il numero δ_ε dipende solo da ε e non dalla collocazione dei punti x_1 e x_2 sul semiasse reale positivo. La funzione in esame è *uniformemente continua* sul proprio dominio.

3.3-7. Se $x_0 > 0$, possiamo limitarci a considerare gli x appartenenti ad un intorno convenientemente piccolo di x_0 stesso, ad esempio quello di raggio $r = (3/4)\,x_0$, dimodoché per gli x in questione si ha
$$x > \frac{x_0}{4} \Rightarrow \sqrt{x} > \frac{\sqrt{x_0}}{2}.$$

Per gli stessi x si ha allora

$$|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| = \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} < \frac{2}{3}\,\frac{|x - x_0|}{\sqrt{x_0}}.$$

Affinché risulti $|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| < \varepsilon$ è sufficiente che sia

$$\frac{2}{3}\,\frac{|x - x_0|}{\sqrt{x_0}} < \varepsilon \iff |x - x_0| < \frac{3\sqrt{x_0}}{2}\,\varepsilon.$$

3.3-8. Si ha $f(x) - f(0) = f(x)$, quindi

$$|f(x) - f(0)| \leq |x|.$$

Se $|x| < \varepsilon$ si ha allora $|f(x) - f(0)| \leq \varepsilon$. In altri termini, la continuità nell'origine è verificata ponendo $\delta_\varepsilon = \varepsilon$. Se x_0 è un numero diverso da 0, ad esempio $x_0 > 0$, l'immagine dell'intorno di centro x_0 e raggio r è costituita dallo 0 e dai numeri razionali dell'intervallo stesso. Se x_0 è razionale, dunque $f(x_0) = x_0$, gli intorni di $f(x_0)$ e raggio abbastanza piccolo (diciamo $r < x_0$) non contengono lo 0, se invece x_0 è irrazionale, dunque $f(x_0) = 0$, gli intorni di $f(x_0)$ e raggio abbastanza piccolo non contengono i razionali precedentemente considerati. In entrambi i casi, fissato un intorno di $f(x_0)$ di raggio abbastanza piccolo, non è possibile trovare un intorno di x_0 la cui immagine mediante f sia contenuta nell'intorno precedentemente fissato.

3.4 Estensione della nozione di limite. Limite delle successioni

3.4-1. Dividendo numeratore e denominatore per n si ottiene

$$\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}, \quad \frac{2n+1}{n} = 2 + \frac{1}{n}, \quad \frac{n}{2n+3} = \frac{1}{2 + 3/n}.$$

I limiti sono, nell'ordine, 1, 2, 1/2.

3.4-2. Per ogni fissato $M > 0$ si ha

$$(n > M) \Rightarrow (n^k > M),$$

quindi, per ogni fissato $\varepsilon > 0$,

$$(n > \frac{1}{\varepsilon}) \Rightarrow (\frac{1}{n^k} < \varepsilon).$$

Dividendo numeratore e denominatore per n^2 si ottiene

$$\frac{n^2}{n^2+1} = \frac{1}{1 + 1/n^2}, \quad \frac{2n^2+1}{n^2} = 2 + \frac{1}{n^2}, \quad \frac{n^2+n+1}{n^2+1} = \frac{1 + 1/n + 1/n^2}{1 + 1/n^2}.$$

I limiti sono, nell'ordine, 1, 2, 1.

3.4-3. Dalle formule

$$r_{n+2} = 1 + \frac{1}{r_{n+1}},$$

$$r_{n+1} = 1 + \frac{1}{r_n},$$

sottraendo membro a membro segue

$$r_{n+2} - r_{n+1} = \frac{1}{r_{n+1} r_n}\,(r_n - r_{n+1}).$$

Per $n \geq 3$, si ha poi $r_{n+1} r_n \geq 9/4$, da cui

$$|r_{n+2} - r_{n+1}| \leq \frac{4}{9}\,|r_n - r_{n+1}|.$$

La successione delle differenze $|r_n - r_{n+1}|$ è dunque strettamente decrescente e tende a 0. Ne segue che gli intervalli $[r_{2n-1}, r_{2n}]$, $n \geq 1$, sono incapsulati.

3.4-4. Sia $L \in \boldsymbol{R}$ il limite della successione (a_n); dunque, fissato $\varepsilon > 0$, sia

$$|a_n - L| < \varepsilon$$

per ogni $n > n_\varepsilon$. Poiché la successione $k \mapsto n_k$ diverge positivamente, esiste un indice k_ε tale che

$$k > k_\varepsilon \Rightarrow n_k > n_\varepsilon.$$

Per gli stessi k si ha allora $|a_{n_k} - L| < \varepsilon$.

3.4-5. Vero: le due sottosuccessioni, nel loro complesso, esauriscono tutti i termini della successione di partenza.

3.4-6. Vero. Se la successione $n \mapsto a_{2n+1} - a_{2n}$ è decrescente e tende a 0, essa assume soltanto valori ≥ 0. Ne segue che gli intervalli $[a_{2n}, a_{2n+1}]$ costituiscono una successisone incapsulata, con lunghezze che tendono a 0.

3.4-7. Scelto $\varepsilon > 0$ ad arbitrio, determiniamo $\overline{n}$ (dipendente da ε) tale che per $n > \overline{n}$ si abbia $|x_n| < \varepsilon/2$. Per tali n si ha

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{\overline{n}} x_k + \sum_{k=\overline{n}+1}^{n} x_k,$$

dove l'ultima somma, in valore assoluto, non supera $(n - \overline{n})\varepsilon/2$, trattandosi della somma di $n - \overline{n}$ termini, ciascuno in valore assoluto minore di $\varepsilon/2$. Dividendo per n otteniamo

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\overline{n}} x_k + \frac{1}{n}\sum_{k=\overline{n}+1}^{n} x_k,$$

da cui, prendendo i valori assoluti,

$$|m_n| \le \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{\overline{n}} x_k\right| + \frac{n-\overline{n}}{n}\,\frac{\varepsilon}{2} \le \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{\overline{n}} x_k\right| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Per n abbastanza grande la quantità $|\sum_{k=1}^{\overline{n}} x_k|/n$ è minore di $\varepsilon/2$, e dunque, per gli stessi n, $|m_n|$ è minore di ε.

3.4-8. La figura 3.3 mostra il grafico della funzione f. Essa vale x per $0 \le x < 1$, mentre vale 0 per $x = 1$. L'immagine della funzione è l'intervallo $[0, 1[$; il minimo è dunque 0, l'estremo superiore (che non è massimo) è 1.

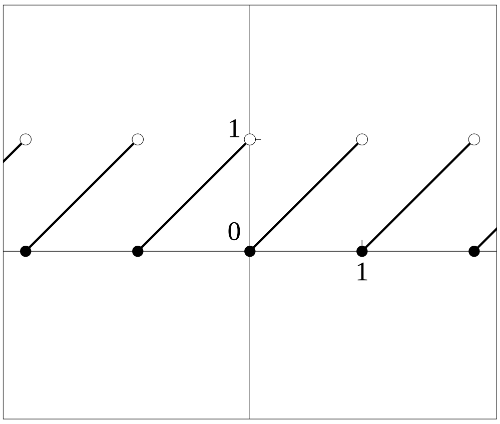

Figura 3.3 - Grafico della funzione $x \mapsto x - [\,x\,]$.

3.5 Alcuni teoremi sui limiti

3.5-1. Per $x > 0$ si ha

$$0 < \sqrt{x^2+1} - x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} < \frac{1}{2x},$$

dove l'ultima funzione scritta tende a 0 per $x \to +\infty$.
Se $a = 0$, la funzione $x \mapsto \sqrt{x^2+a} - x$ è nulla per ogni $x \ge 0$. Se $a \ne 0$ si ha

$$\sqrt{x^2+a} - x = \frac{a}{\sqrt{x^2+a}+x} = \frac{a}{x\,[\sqrt{1+a/x}+1]};$$

poiché la quantità entro parentesi quadre tende a 2, il limite della funzione assegnata è ancora 0.

3.5-2. Per $x > 0$ si ha tanto $x + 1/x > x$ quanto $x + 1/x > 1/x$; la funzione $x \mapsto x$ tende a $+\infty$ per $x \to +\infty$, la funzione $x \mapsto 1/x$ tende a $+\infty$ per $x \to 0$.

3.5-3. Sappiamo che la funzione $x \mapsto a^x$ è continua e strettamente crescente per $a > 0$, avendo come immagine l'intervallo $]0, +\infty[$. Dunque entrambe le funzioni allo studio valgono 1 per $x = 0$, mentre la prima diverge positivamente per $x \to +\infty$, la seconda tende a 0.

3.5-4. Sappiamo che

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2 + n}{2};$$

dunque

$$\frac{1 + 2 + 3 + \ldots + n}{n^2} = \frac{n^2 + n}{2n^2},$$

successione che ha come limite 1/2.

Analogamente si ha

$$2 + 4 + \ldots + 2n = 2(1 + 2 + 3 + \ldots + n) = n^2 + n,$$

mentre

$$1 + 3 + 5 + \ldots + 2n + 1 = (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1.$$

Il rapporto scritto tende dunque a 1

3.5-5. La funzione f assume valori minori di 1 per $0 \leq x < 1$, dunque $g(f(x)) = 0$ per gli stessi valori. Al contrario, per $x \geq 1$ la funzione f vale 1, e dunque anche $g(f(x)) = 1$. In conclusione:

$$g(f(x)) = \begin{cases} 0, \text{ per } 0 \leq x < 1 \\ 1, \text{ per } x \geq 1. \end{cases}$$

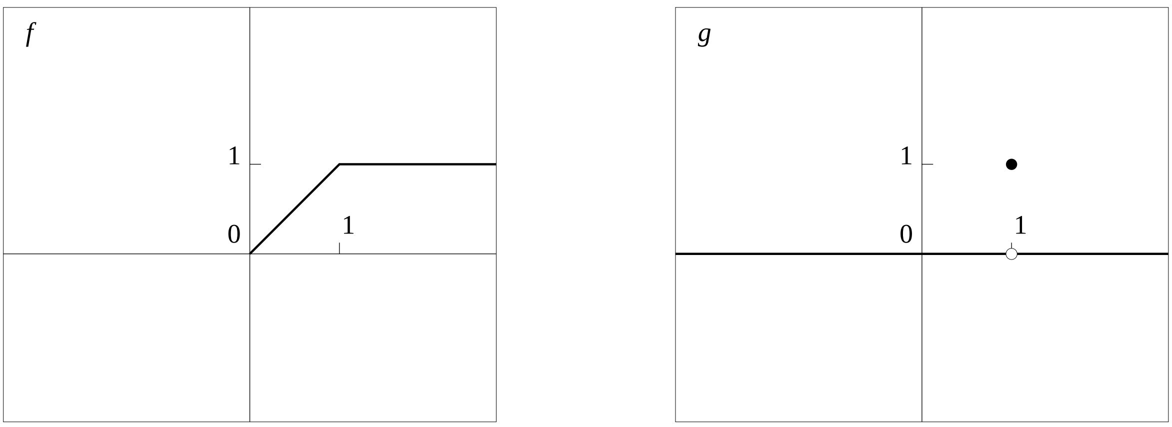

Figura 3.4 - Grafici delle funzioni f e g dell'esercizio 3.5-5.

3.6 Teoremi di confronto

3.6-1. Occupiamoci, ad esempio, della prima affermazione. Fissato $M > 0$ ad arbitrio, esiste $r > 0$ tale che

$$0 < |x - x_0| < r \Rightarrow f(x) > M.$$

Per gli x tali che $0 < |x - x_0| < \min\{r, \delta\}$ si ha

$$f(x) + g(x) > M + c,$$

e questo dimostra che la funzione $f + g$ diverge positivamente.

Esaminiamo la quarta affermazione. Fissato $\varepsilon > 0$ ad arbitrio, esiste $r > 0$ tale che

$$0 < |x - x_0| < r \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon.$$

Per gli x tali che $0 < |x - x_0| < \min\{r, \delta\}$ si ha

$$|f(x)g(x)| < c\,\varepsilon,$$

dove $c\,\varepsilon$ è una quantità positiva ad arbitrio al pari di ε. Questo dimostra che la funzione fg tende a 0.

3.6-2. Basta osservare che $\sin x \geq -1$.

3.6-3. Si possono scegliere le seguenti funzioni:

i) $f(x) := 2x,\ g(x) := x$;

ii) $f(x) := x + L,\ g(x) := x$;

iii) $f(x) := x + \sin x,\ g(x) := x$;

iv) $f(x) := x,\ g(x) := 2x$.

3.6-4. Basta osservare che

$$\frac{x^3 + x + 1}{x^2 + 1} = x\,\frac{x^2 + 1 + 1/x}{x^2 + 1};$$

la funzione identità $x \mapsto x$ diverge positivamente, l'ultimo fattore scritto tende a 1.

3.6-5. Si ha $|\sin x| \leq 1$, mentre la funzione $x \mapsto 1/x$ tende a 0.

3.6-6. Siano f e g due funzioni positivamente divergenti per $x \to x_0$. Fissato $M > 0$ ad arbitrio, esistono r_1, $r_2 > 0$ tali che

$$0 < |x - x_0| < r_1 \Rightarrow f(x) > M, \quad 0 < |x - x_0| < r_2 \Rightarrow g(x) > M.$$

Per gli x tali che $0 < |x - x_0| < \min\{r_1, r_2\}$ si ha

$$f(x)\,g(x) > M^2,$$

e questo dimostra che la funzione fg diverge positivamente.

3.6-7. Si ha

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n = a_nx^n \left[\frac{a_0}{a_nx^n} + \frac{a_1}{a_nx^{n-1}} + \ldots + 1\right];$$

la funzione entro parentesi quadre tende a 1 tanto per $x \to +\infty$ quanto per $x \to -\infty$.

3.6-8. Si ha

$$\frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + a_2x^2 + \ldots + b_mx^m} = \frac{a_nx^n}{b_mx^m}\,\frac{\left[\dfrac{a_0}{a_nx^n} + \dfrac{a_1}{a_nx^{n-1}} + \ldots + 1\right]}{\left[\dfrac{b_0}{b_mx^m} + \dfrac{b_1}{a_mx^{m-1}} + \ldots + 1\right]}.$$

Le quantità entro parentesi quadre tendono a 1 tanto per $x \to +\infty$ quanto per $x \to -\infty$.

3.6-9. Se $a = b = 0$ la funzione assegnata è identicamente nulla per $x > 0$. In ogni caso si ha, per x positivo abbastanza grande,

$$\sqrt{x^2 + ax + b} - x = \frac{ax + b}{\sqrt{x^2 + ax + b} + x} = \frac{a + b/x}{\sqrt{1 + a/x + b/x^2} + 1},$$

dove l'ultima uguaglianza è stata ottenuta dividendo numeratore e denominatore per x. L'ultimo rapporto scritto tende al limite $a/2$.

3.6-10. Se $-1 < a < 0$ si ha $|a^n| = |a|^n$, con $0 < |a| < 1$. Si è dunque ricondotti a studiare la successione $n \mapsto |a|^n$, vale a dire una progressione geometrica con ragione compresa tra 0 e 1. Se poi $a \le -1$, si ha $a^n \ge 1$ se n è pari, $a^n \le -1$ se n è dispari; la successione è priva di limite.

3.6-11. La successione proposta tende a 1 in quanto minorata e maggiorata da due successioni aventi 1 come limite.

3.6-12. Tutti i rapporti $1/n, 2/n, \ldots, (n-1)/n$ sono minori di 1. Ne segue che la successione

$$n \mapsto \frac{n!}{n^n}$$

tende a 0, mentre la successione

$$n \mapsto \frac{n^n}{n!},$$

che ha come termini i reciproci dei termini della precedente, diverge positivamente.

3.6-13. Abbiamo già osservato che la radice n-esima di un numero ≥ 1 è essa stessa ≥ 1. Allora

$$x_n := \sqrt[n]{n} - 1 \iff 1 + x_n = \sqrt[n]{n} \iff (1 + x_n)^n = n.$$

Tutte le quantità in gioco sono positive. Sviluppando la potenza $(1+x_n)^n$ con la formula del binomio, e trascurando tutti i termini tranne quello contenente x_n^2, si ottiene

$$n = (1+x_n)^n > \frac{n(n-1)}{2}\, x_n^2,$$

da cui, estraendo le radici quadrate,

$$0 \le x_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}},$$

per $n \ge 2$. L'ultima quantità scritta tende evidentemente a 0, da cui la tesi.

Se $a < n$ si ha $1 < \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{n}$, dunque il risultato dell'esercizio 11 può essere dedotto da quello appena ottenuto.

3.6-14. Il prodotto di n fattori di cui 2 uguali a $\sqrt{n}$ ed i restanti uguali a 1 vale n, mentre la loro somma vale $n-2+2\sqrt{n}$. Scrivendo la disuguaglianza tra media geometrica e media aritmetica si ottiene esattamente quanto proposto nel testo dell'esercizio. Infine si osserva che le due successioni

$$n \mapsto \frac{n-2}{n}, \quad n \mapsto \frac{2}{\sqrt{n}}$$

tendono rispettivamente a 1 e a 0.

3.7 Proprietà delle funzioni monotone

3.7-1. Sia $x \mapsto g(f(x))$ una funzione composta mediante due funzioni crescenti:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2), \quad y_1 < y_2 \Rightarrow g(y_1) \le g(y_2).$$

Ponendo $y_1 := f(x_1)$ e $y_2 := f(x_2)$ si ottiene $g(f(x_1)) \le g(f(x_2))$.

3.7-2. Siano f e g entrambe crescenti:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2), \quad g(x_1) \le g(x_2);$$

sommando membro a membro le due ultime disuguaglianze si ottiene

$$f(x_1) + g(x_1) \le f(x_2) + g(x_2).$$

3.7-3. Supponiamo f crescente; in particolare, essendo crescente su $[0,a]$, si avrà

$$0 \le x_1 < x_2 \le a \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2).$$

Ma allora

$$-a \le -x_2 < -x_1 \le 0 \;\Rightarrow\; f(-x_2) = f(x_2) \ge f(-x_1) = f(x_1),$$

vale a dire f è decrescente sull'intervallo $[-a, 0]$. Ne segue che f è costante sullo stesso intervallo, in quanto al tempo stesso crescente e decrescente, ed essendo pari, è costante su tutto il dominio iniziale.

3.7-4. L'uguaglianza $f(x) = -f(-x)$, scritta per $x = 0$, implica che $f(0)$ è l'opposto di se stesso, dunque è necessariamente 0. Se f è crescente su $[0, a]$, ne segue che

$$0 < x \Rightarrow 0 = f(0) \leq f(x),$$

vale a dire f è crescente e non negativa sullo stesso intervallo. Le restanti affermazioni seguono dalla disparità della funzione; ad esempio

$$x < 0 \Rightarrow f(x) \leq f(0) = 0,$$

in quanto $f(x) = -f(|x|)$, e $f(|x|) \geq 0$.

3.7-5. Basta osservare che, se $g(x) > 0$, si ha

$$g(x_1) \leq g(x_2) \iff \frac{1}{g(x_1)} \geq \frac{1}{g(x_2)}.$$

3.7-6. Sappiamo dal precedente esercizio che la funzione $x \mapsto 1/g(x)$ è crescente. Si tratta allora di dimostrare che il prodotto di due funzioni non negative e crescenti è una funzione dello stesso tipo. Siano f e g entrambe crescenti e non negative:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow 0 \leq f(x_1) \leq f(x_2), \quad 0 \leq g(x_1) \leq g(x_2);$$

moltiplicando membro a membro le due ultime disuguaglianze si ottiene

$$0 \leq f(x_1)\, g(x_1) \leq f(x_2)\, g(x_2).$$

3.7-7. La funzione $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \geq 0$ è strettamente crescente, e da ciò segue l'affermazione fatta al punto i). Inoltre il quadrato di un numero maggiore di 1 è maggiore del numero stesso, e da ciò segue l'affermazione del punto ii). D'altra parte, la disuguaglianza (12') del paragrafo 1.6, scritta per $n = 2$, fornisce

$$1 < \sqrt{a} < \frac{1+a}{2},$$

dunque, nel nostro caso

$$1 < x_{n+1} < \frac{1+x_n}{2}.$$

Ne segue, passando al limite

$$1 \leq L \leq \frac{1+L}{2} \quad \Rightarrow \quad (2L \leq 1 + L \iff L \leq 1),$$

da cui finalmente $L = 1$.

3.7-8. Se $a = b > 0$ non c'è niente da dimostrare. Sia dunque $0 < a < b$. In base alla disuguaglianza tra media geometrica e media aritmetica si ha

$$\sqrt{ab} < \frac{a+b}{2},$$

cioè $x_1 < y_1$. Se $x_n < y_n$ per un assegnato n, allora

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n\, y_n} < \frac{x_n + y_n}{2} = y_{n+1},$$

sempre in virtù della disuguaglianza tra media geometrica e media aritmetica. D'altra parte

$$0 < x_n < y_n \Rightarrow x_n = \sqrt{x_n^2} < \sqrt{x_n\, y_n} = x_{n+1},$$

$$0 < x_n < y_n \Rightarrow y_n = \frac{y_n + y_n}{2} > \frac{x_n + y_n}{2} = y_{n+1}.$$

Infine

$$y_{n+1} - x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} - \sqrt{x_n\, y_n} < \frac{1}{2}\,(y_n - x_n) \iff x_n < \sqrt{x_n\, y_n},$$

che è la disuguaglianza già dimostrata $x_n < x_{n+1}$.

3.7-9. Ricordiamo che abbiamo scelto $x_0 > \sqrt{a}$ (ad esempio $x_0 = a$, se $a > 1$), e successivamente abbiamo posto

$$x_{n+1} := \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right), \quad n \geq 1.$$

Allora

$$e_{n+1} = x_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) - \sqrt{a},$$

mentre

$$\frac{e_n^2}{2x_n} = \frac{(x_n - \sqrt{a})^2}{2x_n} = \frac{x_n^2 + a - 2\sqrt{a}\,x_n}{2x_n} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) - \sqrt{a}.$$

Dunque

$$e_{n+1} = \frac{e_n^2}{2x_n} < \frac{e_n^2}{2\sqrt{a}},$$

dove l'ultima disuguaglianza segue dal fatto, dimostrato nel testo, che $x_n > \sqrt{a}$, per ogni n.

3.7-10. Passando al limite si ottiene la relazione $L = aL \iff L(1-a) = 0$. Dunque si ha $a = 1$ (nel qual caso la successione vale costantemente 1), oppure $L = 0$.

3.7-11. Per $0 \leq a \leq 1$ si ha, per $n \geq 1$,

$$0 \leq \frac{a^n}{n!} \leq \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{n},$$

dunque la successione tende a 0. La disuguaglianza $x_n \le x_{n-1}$ diventa

$$\frac{a}{n}\, x_{n-1} \le x_{n-1} \iff \frac{a}{n} \le 1 \iff n \ge a.$$

Dunque la successione in esame è monotona decrescente, per ogni fissato a, a partire dal minimo indice $n \ge a$. Dalla relazione ricorsiva segue poi, passando al limite, $L = 0 \cdot L$, da cui $L = 0$.

3.7-12. Si ha $a_1 = \sqrt{2} < 2$. Se per un assegnato n si ha $a_n < 2$, allora

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} < \sqrt{2+2} = 2.$$

Dunque $a_n < 2$ per ogni n. Si ha poi

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} > \sqrt{a_n + a_n} = \sqrt{2a_n} > \sqrt{a_n a_n} = a_n.$$

Alternativamente, seguendo il suggerimento del testo, si ha

$$2 + a_n \ge 2\sqrt{2a_n} > 2\sqrt{a_n a_n} = 2a_n > a_n^2,$$

da cui la tesi estraendo le radici quadrate di ambo i membri.
Passando al limite nella formula definitoria si ottiene poi

$$L = \sqrt{2 + L} \iff L^2 = 2 + L \iff L = 2,$$

in quanto L è necessariamente positivo (si ha $a_1 = \sqrt{2} < L$.)

3.7-13. La somma dei numeri assegnati vale

$$1 + n\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 + n + 1,$$

il loro prodotto vale

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Per le medie geometrica e aritmetica si ha allora

$$\sqrt[n+1]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} < 1 + \frac{1}{n+1},$$

da cui la tesi, elevando entrambi i membri all'esponente $n + 1$.

3.7-14. Basta eseguire i calcoli suggeriti nel testo.

3.8 Proprietà delle funzioni continue su un intervallo

3.8-1. Si ha

$$\sin\frac{1}{x} = 1 \iff \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi = \frac{(4k+1)\pi}{2} \iff x = \frac{2}{(4k+1)\pi},\ k \in \boldsymbol{Z},$$

$$\sin\frac{1}{x} = -1 \iff \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi = \frac{(4k-1)\pi}{2} \iff x = \frac{2}{(4k-1)\pi},\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

Gli insiemi

$$\left\{\frac{2}{(4k+1)\pi};\ k \in \boldsymbol{Z}\right\}, \quad \left\{\frac{2}{(4k-1)\pi};\ k \in \boldsymbol{Z}\right\}$$

hanno entrambi 0 come punto di accumulazione.

3.8-2. Per $x \neq 0$ si tratta di una funzione continua in quanto composta mediante funzioni continue. Per $x = 0$ si ha

$$|f(x) - f(0)| = |\, x \sin\frac{1}{x}\,| \leq |x|,$$

dunque $|f(x) - f(0)| < \varepsilon$ per $|x| < \varepsilon$.

Ragionando come nel precedente esercizio, limitatamente agli $x > 0$, si trova che f vale x nei punti

$$x_k = \frac{2}{(4k+1)\pi},\ k \in \boldsymbol{N},$$

vale $-x$ nei punti

$$y_k = \frac{2}{(4k-1)\pi},\ k \in \boldsymbol{N}^*,$$

ed infine f s'annulla nei punti

$$z_k = \frac{1}{k\pi},\ k \in \boldsymbol{N}^*.$$

Si tratta di tre successioni monotone decrescenti, convergenti a 0. Inoltre si ha $x_k < z_{2k} < y_k$, per ogni $k \geq 1$, e la funzione è monotona decrescente nell'intervallo $[x_k, z_{2k}]$, monotona crescente nell'intervallo $[z_{2k}, y_k]$. E' dunque impossibile scomporre l'intervallo $[0,1]$ in un numero finito di sottointervalli su cui f è monotona.

3.8-3. La continuità nell'origine è ovvia: $\sqrt{x} < \varepsilon \iff x < \varepsilon^2$. Supposto $0 < x_1 < x_2$ si ha

$$0 < f(x_2) - f(x_1) = \sqrt{x_2} - \sqrt{x_1} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1}} < \frac{x_2 - x_1}{2\sqrt{x_1}}.$$

Dunque $0 < f(x_2) - f(x_1) < \varepsilon \iff 0 < x_2 - x_1 < \varepsilon/(2\sqrt{x_1})$. Ciò prova la continuità a destra della funzione f nel punto x_1. Allo stesso modo si ragiona a sinistra.

3.8-4. Sia, per fissare le idee, $a_n > 0$. Allora

$$\lim_{x\to+\infty} p(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} p(x) = -\infty.$$

Si riveda in proposito l'esercizio 3.6-7. Fissato $M > 0$ ad arbitrio, si ha dunque $p(x) > M$ per tutti gli x positivi abbastanza grandi, $p(x) < -M$ per tutti gli x negativi, abbastanza grandi in valore assoluto. Esiste dunque un $R > 0$ tale che sia $p(-R) < 0 < p(R)$. Nell'intervallo $[-R, R]$ la funzione continua p ammette almeno uno zero.

3.8-5. L'immagine di $\boldsymbol{R}$ mediante la funzione continua p è un intervallo avente $-\infty$ come estremo inferiore, e $+\infty$ come estremo superiore: tale intervallo non può essere che $\boldsymbol{R}$ stesso.

3.8-6. Sia ancora $a_n > 0$; allora

$$\lim_{x \to +\infty} p(x) = \lim_{x \to -\infty} p(x) = +\infty.$$

Fissato ad arbitrio un numero $L > p(0)$, si ha certamente $p(x) > L$ per $|x|$ abbastanza grande, diciamo per tutti gli x non appartenenti all'intervallo $[-R, R]$, con R numero positivo, dipendente dalla scelta di L. Sia m il minimo di p nell'intervallo $[-R, R]$; sarà necessariamente $m \leq p(0)$. Poiché fuori dell'intervallo in questione la funzione p assume soltanto valori maggiori di $p(0)$, ne viene che m è il minimo assoluto di p, vale a dire il minimo valore che p assume in $\boldsymbol{R}$. L'immagine di $\boldsymbol{R}$ mediante la funzione continua p è un intervallo avente m come minimo, e $+\infty$ come estremo superiore: si tratta dunque dell'intervallo $[m, +\infty[$.