Giulio Cesare Barozzi: **Primo Corso di Analisi Matematica**
Zanichelli (Bologna), 1998, ISBN 88-08-01169-0

Capitolo 4 DERIVATE

SOLUZIONE DEI PROBLEMI POSTI AL TERMINE DI ALCUNI PARAGRAFI

4.1 Nozione di derivata

4.1-1. Si ha
$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{x^2-x+1-1}{x-1}=\frac{x^2-x}{x-1}=x,$$
da cui $f'(1)=1$.
Analogamente si ha
$$\frac{g(t)-g(0)}{t}=\frac{\dfrac{t+1}{t-1}-(-1)}{t}=\frac{t+1+t-1}{t(t-1)}=\frac{2}{t-1},$$
da cui $g'(0)=-2$.
Infine
$$\frac{h(u)-h(1)}{u-1}=\frac{\dfrac{u^2}{u+1}-\dfrac{1}{2}}{u-1}=\frac{2u^2-u-1}{2(u-1)(u+1)}=\frac{2(u-1)(u+1/2)}{2(u-1)(u+1)}=\frac{u+1/2}{u+1},$$
da cui $h'(1)=3/4$.

4.1-2. Poiché la derivata della funzione $x\mapsto x^2$ è $2x$, e la derivata della funzione $x\mapsto 2x-1$, è 2, si trova che le derivate a sinistra e a destra della funzione f nel punto $x=1$ valgono entrambe 2: la funzione è derivabile.

Analogamente, per la funzione g si trova che le derivate a sinistra e a destra nell'origine valgono entrambe 0.

4.1-3. Per il rapporto incrementale si trova
$$\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}};$$
passando al limite per $h\to 0$ si ottiene $f'(x)=1/(2\sqrt{x})$.

4.1-4. Seguendo il suggerimento si trova

$$\frac{\sin^n (x+h) - \sin^n x}{h} =$$
$$= \frac{\sin (x+h) - \sin x}{h} [\sin^{n-1} (x+h) + \sin^{n-2} (x+h) \sin x + \ldots + \sin^{n-1} x],$$

dove la somma entro parentesi quadre contiene n addendi. Passando al limite per $h \to 0$ si trova $\cos x \, [n \sin^{n-1} x] = n \sin^{n-1} x \cos x$.

4.1-5. "Contro la stupidità, anche gli Dei lottano invano." – G.F. Schiller

4.1-6. Idem.

4.1-7. L'equazione è $y = f'(0) \cdot x + f(0) = x + 1$.

4.1-8. Si ha, per ogni $h \neq 0$,

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{f(-x-h) - f(-x)}{h} = -\frac{f(-x-h) - f(-x)}{-h};$$

passando al limite per $h \to 0$ si trova $f'(x) = -f'(-x)$.

4.2 Derivata della somma, del prodotto, del quoziente di due funzioni

4.2-1. Si trova, in base alle regole sulla derivazione della somma, del prodotto e del quoziente,

a) $f'(x) = 2x - 1$;

b) $g'(t) = -\dfrac{2}{(t-1)^2}$;

c) $h'(u) = \dfrac{u(u+2)}{(u+1)^2}$.

4.2-2. La formula $\mathrm{D}x^n = nx^{n-1}$ sussiste per $n = 1$. Se essa sussiste per un assegnato n, allora, in base alla regola per la derivazione del prodotto, si ha

$$\mathrm{D}x^{n+1} = \mathrm{D}\,(x \cdot x^n) = 1 \cdot x^n + x \cdot n \cdot x^{n-1} = (n+1)\, x^n.$$

4.2-3. In base alla regola per la derivazione del prodotto si trova

$$\mathrm{D}(\sin x \sin x) = \cos x \sin x + \sin x \cos x = 2 \sin x \cos x.$$

4.2-4. In base alle regole per la derivazione della somma e del prodotto si trova

$$\mathrm{D}(\sin^2 x + \cos^2 x) = 2 \sin x \cos x - 2 \sin x \cos x = 0.$$

4.2-5. Si trova

a) $f'(x) = e^x\,(1+x)$;

b) $f'(x) = \sin\,x + x\cos x$;

c) $f'(x) = \cos x - x\,\sin\,x$;

d) $f'(x) = \cos^2 x - \sin^2\,x$;

e) $f'(x) = \ln x$;

f) $f'(x) = 2e^{2x}$.

4.2-6. Si trova

a) $f'(x) = -e^{-x}$;

b) $f'(x) = -\dfrac{x(x+2)}{(x^2+x+1)^2}$;

c) $f'(x) = \dfrac{2}{(1-x)^2}$;

d) $f'(x) = \dfrac{x(x+2)}{(x+1)^2}$.

4.3 Derivazione delle funzioni composte e delle funzioni inverse

4.3-1. Tale retta ha equazione $y - e^{x_0} = e^{x_0}(x - x_0)$, cioè $y = e^{x_0}(x - x_0 + 1)$. Si ha $y = 0$ per $x = x_0 - 1$.

4.3-2. Si ha $\mathrm{D}\ln x = 1/x$, per $x > 0$. Per $x < 0$ si ha $\ln|x| = \ln(-x)$, quindi, per il teorema sulla derivazione delle funzioni composte,

$$\mathrm{D}\ln|x| = \mathrm{D}\ln(-x) = \frac{1}{-x}\,(-1) = \frac{1}{x}.$$

4.3-3. Soltanto l'ultima formula richiede una dimostrazione. Essa sussiste per $n = 1$:

$$\mathrm{D}\,[f(x)g(x)] = \mathrm{D}f(x)\,g(x) + f(x)\,\mathrm{D}g(x).$$

(S'intende che la derivata di ordine zero è la funzione non derivata: $\mathrm{D}^0 f(x) = f(x)$.).

Se la formula sussiste per un assegnato n, allora

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}^{n+1}[f(x)g(x)] = \mathrm{D}\mathrm{D}^n[f(x)g(x)] = \mathrm{D}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathrm{D}^k f(x)\,\mathrm{D}^{n-k}g(x) = \\
= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}[\mathrm{D}^{k+1}f(x)\,\mathrm{D}^{n-k}g(x) + \mathrm{D}^k f(x)\,\mathrm{D}^{n-k+1}g(x)] = \\
= \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}[\mathrm{D}^k f(x)\,\mathrm{D}^{n+1-k}g(x)] + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}[\mathrm{D}^k f(x)\,\mathrm{D}^{n+1-k}g(x)].
\end{aligned}$$

Nella penultima somma abbiamo sostituito k con $k-1$ (se si preferisce: abbiamo posto $h := k-1$, e successivamente $k := h$.) Tenendo conto dell'identità

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k},$$

si ottiene

$$\mathrm{D}^{n+1}[f(x)g(x)] = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}\mathrm{D}^k f(x)\,\mathrm{D}^{n+1-k}g(x).$$

4.3-4. Consideriamo il rapporto incrementale nell'origine:

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{x^2 \sin 1/x - 0}{x} = x \sin\frac{1}{x}.$$

Dunque

$$\left|\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right| \le |x|,$$

dove l'ultima quantità tende a 0 per $x \to 0$. Dunque $f'(0) = 0$. D'altra parte, per $x \neq 0$ si ha

$$f'(x) = 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}.$$

Il primo addendo a secondo membro tende a 0 per $x \to 0$, il secondo addendo è privo di limite; dunque $f'(x)$ è priva di limite per $x \to 0$.

4.3-5. Si ha

$$f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ per } x \ge 0, \\ -x^2, \text{ per } x < 0. \end{cases}$$

Dunque

$$f'(x) = \begin{cases} 2x, \text{ per } x \ge 0, \\ -2x, \text{ per } x < 0. \end{cases}$$

In conclusione: $f'(x) = 2|x|$.

4.3-6. Sia $f(x) = ax + b$ per $x > 1$. Dunque

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = a + b, \qquad \lim_{x\to1^+} f'(x) = a.$$

Uguagliando i limiti a sinistra e a destra nel punto $x = 1$ per f e per f' si ottengono le uguaglianze $1 = a + b$, $2 = a$. Dunque $f(x) = 2x - 1$, per $x > 1$.

4.3-7. Si ha

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = c, \qquad \lim_{x\to0^+} f'(x) = b, \qquad \lim_{x\to0^+} f''(x) = 2a.$$

Analogamente

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to0^-} f'(x) = 1, \qquad \lim_{x\to0^-} f''(x) = 0.$$

Dunque scegliendo $c = 0$, $b \neq 1$, si ottiene una funzione continua ma non derivabile; scegliendo $c = 0$, $b = 1$, $a \neq 0$ si ottiene una funzione priva di derivata seconda nell'origine, ed infine la scelta $c = 0$, $b = 1$, $a = 0$ fornisce una funzione due volte derivabile sulla retta reale.

4.3-8. Si ottiene

a) $f'(x) = e^{x+1}$;

b) $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$;

c) $f'(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$;

d) $f'(x) = 2x\cos x^2$;

e) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}$;

f) $f'(x) = 2x\, e^{x^2}$;

g) $f'(x) = \dfrac{2}{4+x^2}$.

4.3-9. Se si applica la regola dimostrata nell'esercizio 3, si ottiene il risultato. Infatti derivando h volte il prodotto $(x - x_0)^k\, q(x)$, con $h < k$, si ottiene una somma di addendi ciascuno dei quali contiene una derivata della funzione $x \mapsto (x - x_0)^k$ di ordine, al più, h. Una tale derivata, che è un polinomio in $x - x_0$ di grado pari a k meno l'ordine di derivazione, si annulla per $x = x_0$.

4.4 Massimi e minimi relativi

4.4-1. Si ha $p'(x) = 2ax + b$, quindi $p'(x) = 0$ per $x = -b/2a$. Si ha poi $p(-b/2a) = = -\Delta/4a$.

4.4-2. Si ha

$$p'(x) = 2\sum_{k=1}^{n}(x - x_k) = 2(nx - \sum_{k=1}^{n} x_k), \quad p''(x) = 2n > 0.$$

Il punto $x = (\sum_{k=1}^{n} x_k)/n$ è dunque punto di minimo assoluto.

4.4-3. Si ha

$$x^2 + y^2 = (x - y)^2 + 2xy = |x - y|^2 + 2p.$$

La funzione $t \mapsto t^2 + 2p$ ha minimo assoluto per $t = 0$.

Alternativamente si può osservare che per la funzione $f(x) := x^2 + p^2/x^2, x > 0$, si ha

$$f'(x) = 2x - \frac{2p^2}{x^3},$$

quindi $f'(x) < 0$ per $0 < x < \sqrt{p}$, $f'(\sqrt{p}) = 0$, $f'(x) > 0$ per $x > \sqrt{p}$. Dunque il punto $x = \sqrt{p}$ è punto di minimo assoluto.

4.4-4. Si ha

$$x^{1/x} = \exp\,(\frac{1}{x}\ \ln x).$$

Poiché la funzione esponenziale è strettamente crescente, la crescenza o decrescenza della funzione allo studio coincide con la crescenza o decrescenza dell'esponente. In altri termini possiamo studiare la funzione

$$g(x) := \frac{\ln x}{x}.$$

Si ha

$$g'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2},$$

dunque g è strettamente crescente per $0 < x < e$, strettamente decrescente per $x > e$. Restringendosi a valori interi di x, si ha che $f(3) = \sqrt[3]{3}$ è maggiore di $f(x_n) = \sqrt[n]{n}$ per ogni $n > 3$, mentre $f(2) = \sqrt{2}$ è maggiore di $f(1) = 1$. Il massimo termine della successione (a_n) è dunque il più grande tra $\sqrt{2}$ e $\sqrt[3]{3}$. Elevando entrambi i numeri alla sesta potenza si trova che $2^3 = 8 < 3^2 = 9$, dunque a_3 è il massimo termine della successione.

Il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

segue immediatamente dalla regola di L'Hôpital. Volendo evitare l'uso di tale regola, (che a questo punto del corso non è stata ancora presentata), possiamo osservare che dalla decrescenza della funzione $x \mapsto (\ln x)/x$ per $x > e$ segue che essa converge al proprio estremo inferiore:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = m := \inf \left\{ \frac{\ln x}{x} \,;\, x > e \right\}.$$

Dimostriamo che si ha necessariamente $m = 0$. In caso contrario si avrebbe, per $x > e$,

$$\frac{\ln x}{x} \geq m \iff \ln x \geq mx \iff x \geq e^{mx} = (e^m)^x,$$

con $e^m > 1$, diciamo $e^m = 1 + d$, con $d > 0$. Allora, per $n \geq 3$ si avrebbe

$$n \geq (1+d)^n,$$

mentre sappiamo dalla formula del binomio che

$$(1+d)^n > \frac{n(n+1)}{2}\, d^2,$$

cioè la successione $n \mapsto (1+d)^n$ cresce non più lentamente della successione $n \mapsto (d^2/2)\, n^2$.

4.4-5. Con riferimento alla figura 4.1, abbiamo che la tangente dal'angolo $O\widehat{P}A$ vale a/x, la tangente dell'angolo $O\widehat{P}B$ vale b/x, dunque

$$f(x) := \operatorname{tg} A\widehat{O}B = \frac{\dfrac{b}{x} - \dfrac{a}{x}}{1 + \dfrac{ab}{x^2}} = \frac{x(b-a)}{x^2 + ab}.$$

Si trova

$$f'(x) = (b-a)\, \frac{ab - x^2}{(x^2+ab)^2}.$$

Dunque $f'(x) = 0$ per $x = \sqrt{ab}$, la derivata essendo positiva per $x < \sqrt{ab}$, negativa per $x > \sqrt{ab}$. L'ascissa del punto che vede il segmento AB sotto l'angolo massimo è dunque $\sqrt{ab}$.

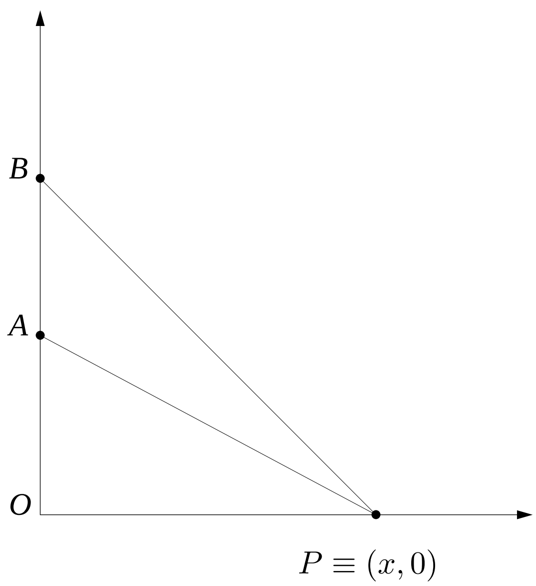

Figura 4.1

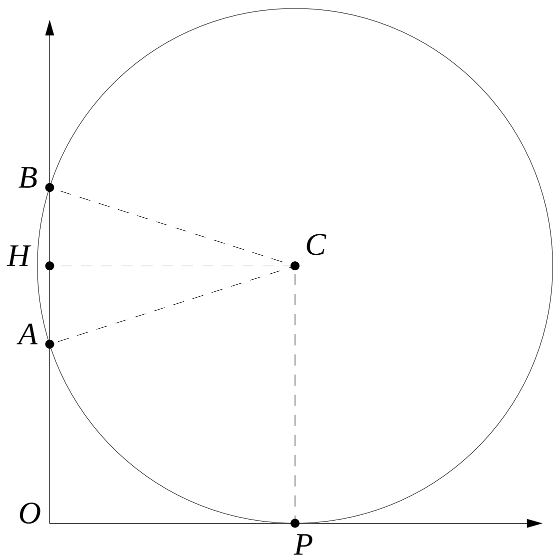

Figura 4.2

Alternativamente si può osservare che i punti del piano che vedono il segmento AB sotto un angolo costante sono tutti (e soltanto) quelli che appartengono ad una circonferenza avente come corda il segmento stesso, e che l'angolo in questione è tanto più grande quanto più piccolo è il raggio della circonferenza. Il problema è dunque quello di trovare, tra le circonferenze passanti per i due punti A e B, quella di raggio minimo che abbia punti in comune col semiasse positivo delle ascisse. Con riferimento alla figura 4.2, è chiaro che si tratta della circonferenza tangente al semiasse in questione. Mandando dal centro le perpendicolari agli assi, si trova che H è il punto medio di AB, dunque $(a+b)/2$ è l'ordinata del centro, e dunque il raggio della circonferenza; l'ascissa si può trovare applicando il teorema di Pitagora al triangolo CHA: si ottiene

$$\overline{HC} = \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b-a}{2}\right)^2} = \sqrt{ab}.$$

Se ne conclude che $P \equiv (\sqrt{ab}, 0)$ è il punto del semiasse positivo delle ascisse che vede il segmento AB sotto l'angolo di ampiezza massima.

4.4-6. Con riferimento alla figura 4.3 (che mostra la sezione con un piano passante per l'asse di rotazione dei due solidi), se x è il raggio del cilindro inscritto, per l'altezza si trova, in base a semplici considerazioni sulla similitudine dei triangoli,

$$h(x) := \frac{h}{r}\,(r-x),\ \ 0 \le x \le r.$$

Per il volume e l'area laterale del cilindro in esame si trovano dunque le espressioni

$$V(x) := \pi x^2\, h(x) = \frac{\pi h}{r}\, x^2\,(r-x), \quad A(x) := 2\pi x\, h(x) = \frac{2\pi h}{r}\, x(r-x),\ \ 0 \le x \le r.$$

I valori massimi sono raggiunti rispettivamente per $x = 2r/3$ e per $x = r/2$.

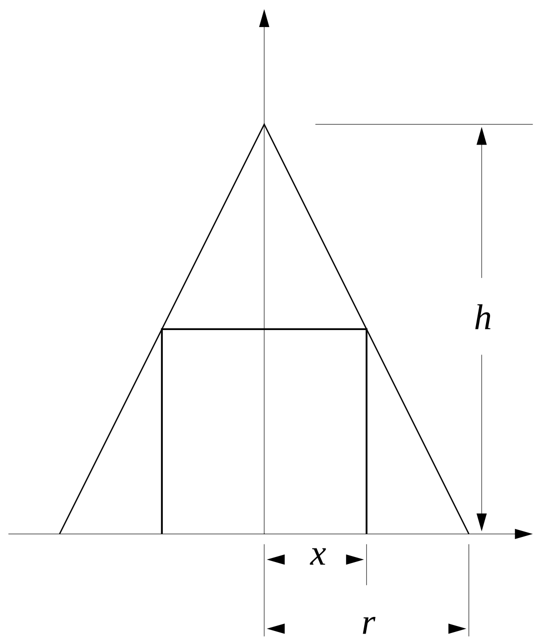

Figura 4.3

4.5 Il teorema del valor medio

4.5-1. a) Sì. b) No: la funzione non è derivabile per $x = 0$. c) No: la funzione non assume valori uguali nei punti $x = -1$ e $x = 2$. d) Sì.

4.5-2. La condizione $1/x = k\pi$ equivale a $x = 1/(k\pi)$. Su ciascuno degli intervalli

$$\left[\frac{1}{(k+1)\pi}, \frac{1}{k\pi}\right]$$

è applicabile il teorema di Rolle.

4.5-3. Si hanno i seguenti risultati: a) $\xi = 1$; b) $\xi = 3$; c) $\xi = 3/2$; d) $\xi = 0$. In ogni caso si tratta del punto medio dell'intervallo considerato. Si veda il seguente esercizio.

4.5-4. Si ha $p'(x) = 2ax + b$, quindi

$$p'\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = a(x_1 + x_2) + b.$$

Analogamente

$$\begin{aligned} p(x_2) - p(x_1) &= ax_2^2 + bx_2 + c - (ax_1^2 + bx_1 + c) = a(x_2^2 - x_1^2) + b(x_2 - x_2) = \\ &= (x_2 - x_1)\,[a(x_1 + x_2) + b], \end{aligned}$$

da cui subito la tesi, dividendo per $x_2 - x_1$. Data la parabola di equazione $y = p(x)$, la secante nei punti di ascisse x_1 e x_2 è parallela alla tangente nel punto di ascissa $(x_1+x_2)/2$.

4.5-5. Si trova

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{1}{b - a}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) = \frac{-1}{ab};$$

$f'(x) = -1/x^2$. Si è dunque condotti all'equazione

$$\frac{1}{x^2} = \frac{1}{ab},$$

da cui segue il risultato.

4.5-6. Basta scrivere $x + h$ al posto di x_2 e $x - h$ al posto di x_1.

4.5-7. Si ha

$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = \frac{1}{2}\left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{f(x-h) - f(x)}{-h}\right];$$

passando al limite per $h \to 0$ segue il risultato.

Per la funzione $f(x) := |x|$, il rapporto incrementale bilaterale, scritto per $x = 0$, vale 0, ma la derivata della funzione in tale punto non esiste.

4.5-8. Si ha

$$\begin{aligned} r(h/2) &= \frac{a^{h/2} - a^{-h/2}}{h} = \frac{a^{h/2} - a^{-h/2}}{h} \, \frac{a^{h/2} + a^{-h/2}}{a^{h/2} + a^{-h/2}} = \\ &= \frac{a^h - a^{-h}}{h(a^{h/2} + a^{-h/2})} = \frac{2}{a^{h/2} + a^{-h/2}} \, r(h) = \\ &= \frac{2a^{h/2}}{a^h + 1} \, r(h). \end{aligned}$$

L'ultimo passaggio è stato ottenuto moltiplicando e dividendo per $a^{h/2}$.

4.5-9. Esaminiamo, ad esempio, il primo caso. Sia $f(x) := x^2$; allora

$$(3.05)^2 = f(3.05) = f(3) + f'(\xi) \cdot 0.05 = 9 + 2\xi \cdot 0.05,$$

dove $3 \le \xi \le 3.05$. Dunque

$$9 < (3.05)^2 \le 9 + 2 \, \frac{305}{100} \, \frac{5}{100} = 9 + \frac{305}{1000} = 9.305.$$

In realtà si ha $(3.05)^2 = 9.3025$.

4.5-10. Si ha

$$\mathrm{D}\,(\arctan x + \arctan \frac{1}{x}) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1 + \dfrac{1}{x^2}} \left(-\frac{1}{x^2} \right) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0,$$

dunque la funzione in esame è costante sui due intervalli $-\infty < x < 0$, $0 < x < +\infty$. D'altra parte essa vale $\pi/2$ per $x = 1$ e $-\pi/2$ per $x = -1$. Si tenga presenta che si tratta di una funzione dispari.

4.5-11. Se $f'(x) \ge m$ per ogni $x \ge 0$, allora, in base al teorema di Lagrange, si ha, per ogni $x > 0$,

$$f(x) = f(0) - f'(\xi)\, x \ge mx,$$

e la funzione $x \mapsto mx$ diverge positivamente per $x \to +\infty$.

Per la funzione $f(x) := x/(x+1)$, si trova una derivata strettamente positiva:

$$f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2},$$

ma la funzione stessa tende a 1 per $x \to +\infty$.

4.5-12. Consideriamo la funzione $h(x) := f(x) - g(x)$. Per ipotesi $h(x_0) = 0$, $h'(x) \ge 0$ per $x > x_0$. Allora, per gli stessi x,

$$h(x) - h(x_0) = h(x) = h'(\xi)\,(x - x_0) \ge 0,$$

cioè $f(x) \geq g(x)$.

4.5-13. Le tre funzioni

$$f_1(x) := x - \frac{x^2}{2}, \quad f_2(x) := \ln(1+x), \quad f_3(x) := x,$$

si annullano per $x = 0$. Si ha poi

$$f_1'(x) = 1 - x < f_2'(x) = \frac{1}{1+x} < f_3'(x) = 1,$$

per $x > 0$. Si osservi che la prima disuguaglianza equivale a $1 - x^2 < 1$. Poiché le disuguaglianze tra le derivate sono "strette" per $x > 0$, lo stesso accade per le disuguaglianze tra le funzioni.

4.6 I teoremi di L'Hôpital

4.6-1. a) Dopo due applicazioni della regola di L'Hôpital si perviene alla funzione

$$-\frac{\sin x}{6x},$$

che tende a $-1/6$ per $x \to 0$.

b) Scritta la funzione nella forma

$$\frac{x - \sin x}{x \sin x},$$

dopo due applicazioni della regola di L'Hôpital si ottiene la funzione

$$\frac{\sin x}{2\cos x - x \sin x},$$

che tende a 0 per $x \to 0$.

c) Applicando una volta la regola di L'Hôpital si ottiene la funzione $x \mapsto 1/x$, che tende a 0 per $x \to +\infty$.

d) Si ha

$$x - \ln x = x\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right),$$

dunque, per quanto dimostrato nel punto precedente, la funzione allo studio tende a $+\infty$ per $x \to +\infty$.

e) Dopo due applicazioni della regola di L'Hôpital si perviene alla funzione $x \mapsto e^x/2$, che tende a $1/2$ per $x \to 0$.

f) Studiamo la funzione

$$x \mapsto x \ln x = \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}.$$

Applicando la regola di L'Hôpital si ottiene la funzione

$$\frac{1/x}{-1/x^2} = -x,$$

che tende a 0 per $x \to 0$. Dunque

$$\lim_{x \to 0^+} x^x = 1.$$

4.6-2. Esaminiamo il caso a). Per $k = 1$ si è ricondotti al limite studiato nel precedente esercizio:

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0.$$

Per ogni $k > 0$ ci si può ricondurre al limite appena scritto; basta osservare che

$$x^k \ln x = \frac{1}{k} x^k \ln x^k,$$

e porre $t := x^k$. Dunque, per ogni $k > 0$,

$$\lim_{x \to 0^+} x^k \ln x = 0.$$

Nel caso b), supponiamo dapprima k intero positivo. Allora, dopo k applicazioni della regola di L'Hôpital, si ottiene la funzione e^x/k, che tende a $+\infty$ per $x \to +\infty$. Se poi k non è intero, sia h un intero maggiore di k: $h > k$. Allora, per ogni $x \geq 1$, si ha

$$\frac{e^x}{x^k} \geq \frac{e^x}{x^h},$$

e l'ultima funzione tende a $+\infty$ per $x \to +\infty$.

4.6-3. Il calcolo è già stato fatto nella soluzione dell'esercizio 4.4-2.

4.6-4. Calcoliamo il limite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^n}.$$

Dopo $n - 1$ applicazioni della regola di L'Hôpital, si perviene al limite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{n!\,(x - x_0)} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Se ne conclude che, per gli x abbastanza prossimi a x_0, il rapporto

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^n}$$

ha lo stesso segno della derivata $f^{(n)}(x_0)$. D'altra parte il denominatore $(x - x_0)^n$ è > 0 per $x \neq x_0$ se n è pari, mentre è < 0 per $x < x_0$ e > 0 per $x > x_0$ se n è dispari. Ne segue la tesi.

4.6-5. La derivata a destra di f nel punto x_0 è, per definizione, il limite

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

sempre che il limite stesso esista. Applicando la regola di L'Hôpital al rapporto scritto si ottiene il limite

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f'(x)}{1} = \lim_{x \to x_0^+} f'(x);$$

dunque se esiste (finito o infinito) l'ultimo limite considerato, il suo valore fornisce la derivata a destra di f nel punto x_0.

4.7 Funzioni convesse e concave

4.7-1. Si ha

$$\mathrm{D}^2 a^x = (\ln a)^2 a^x > 0, \quad \mathrm{D}^2 \log_a x = \frac{-1}{\ln a\, x^2}.$$

La derivata seconda del logaritmo è dunque negativa per $a > 1$, positiva per $0 < a < 1$.

4.7-2. Si ha

$$\mathrm{D}^2 \frac{a}{x} = \frac{2a}{x^3}.$$

4.7-3. Sia $f : I \to \mathbf{R}$ una funzione strettamente crescente e convessa. Siano x_1 e x_2 due punti distinti dell'intervallo di definizione e sia

$$y_1 := f(x_1),\ y_2 := f(x_2) \iff x_1 = f^{-1}(y_1),\ x_2 = f^{-1}(y_2).$$

Per la convessità di f si ha (cfr. il seguente esercizio 6)

$$f((1-t)x_1 + tx_2) \le (1-t)y_1 + ty_2, \tag{$*$}$$

per ogni $t \in [0, 1]$. Poiché f^{-1} è crescente al pari di f (cfr. la Proposizione 3.8-4), applicando la f^{-1} stessa ai due membri della disuguaglianza scritta si ottiene

$$f^{-1}(f((1-t)x_1 + tx_2)) \le f^{-1}((1-t)y_1 + ty_2),$$

o anche

$$\begin{aligned} f^{-1}((1-t)y_1 + ty_2) \ge f^{-1}(f((1-t)x_1 + tx_2)) &= (1-t)x_1 + tx_2 = \\ &= (1-t)f^{-1}(y_1) + tf^{-1}(y_2). \end{aligned}$$

L'ultima disuguaglianza esprime la concavità di f^{-1}.

Se f è decrescente, lo stesso accade per f^{-1}; applicando tale funzione ai due membri della (*) si ottengono disuguaglianze di verso opposto rispetto alle precedenti, dunque la convessità di f^{-1}.

4.7-4. No: il prodotto $x \mapsto x^3$ è una funzione convessa sull'intervallo $x \geq 0$, concava sull'intervallo $x \leq 0$.

4.7-5. Si ha

$$\mathrm{D}^2\sqrt{x} = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}}.$$

Verifichiamo direttamente la concavità della funzione in esame. Sia $0 \leq x_1 < x_2$; l'equazione della retta secante il grafico, passante per i punti di ascisse x_1 e x_2 si scrive (cfr. formula (2) all'inizio di pagina 271)

$$y = \sqrt{x_1} + (x - x_1)\,\frac{\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}}{x_2 - x_1} = \sqrt{x_1} + \frac{x - x_1}{\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1}}.$$

Si tratta dunque di dimostrare che, per tutti gli x compresi tra x_1 e x_2, si ha

$$\sqrt{x_1} + \frac{x - x_1}{\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1}} < \sqrt{x},$$

cioè, in forma equivalente,

$$\frac{x - x_1}{\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1}} < \sqrt{x} - \sqrt{x_1}.$$

Per $x > x_1$ le due differenze che compaiono nella disuguaglianza appena scritta sono positive, in virtù della stretta crescenza della funzione $x \mapsto \sqrt{x}$, dunque la tesi si scrive anche

$$\frac{x - x_1}{\sqrt{x} - \sqrt{x_1}} < \sqrt{x_2} + \sqrt{x_1} \iff \sqrt{x} + \sqrt{x_1} < \sqrt{x_2} + \sqrt{x_1} \iff$$
$$\iff \sqrt{x} < \sqrt{x_2},$$

e l'ultima disuguaglianza è evidentemente verificata per $x < x_2$.

4.7-6. Le equazioni

$$\begin{cases} x = (1-t)x_1 + tx_2, \\ y = (1-t)f(x_1) + tf(x_2), \end{cases}$$

t reale, rappresentano la retta passante per i punti di coordinate $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$. Per $t = 0$ otteniamo il punto $(x_1, f(x_1))$, per $t = 1$ otteniamo il punto $(x_2, f(x_2))$; i punti del segmento avente per estremi i punti precedenti si ottengono per $0 \leq t \leq 1$. Ne segue l'enunciato dell'esercizio.

4.7-7. La prima affermazione segue immediatamente dal precedente esercizio. Poiché già sappiamo che il logaritmo naturale è una funzione strettamente concava, si ha

$$\ln\left((1-t)x_1 + tx_2\right) \geq (1-t)\ln x_1 + t\ln x_2 = \ln\left(x_1^{1-t}\, x_2^{t}\right),$$

per ogni $t \in [0,1]$. Dalla crescenza della funzione logaritmo segue allora

$$(1-t)x_1 + tx_2 \geq x_1^{1-t}\, x_2^t,$$

per gli stessi t. In particolare, per $t = 1/2$ si ha

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 x_2},$$

cioè la disuguaglianza tra media geometrica a media aritmetica.

4.7-8. Basta l'esame dei grafici. La funzione $x \mapsto |x|$ è rappresentata nel testo a pagina 40 (fig. 1.15-3); le funzioni $x \mapsto x + |x|$ e $x \mapsto |x-1| + |x+1|$ hanno i grafici mostrati nelle figure 4.4 e 4.5.

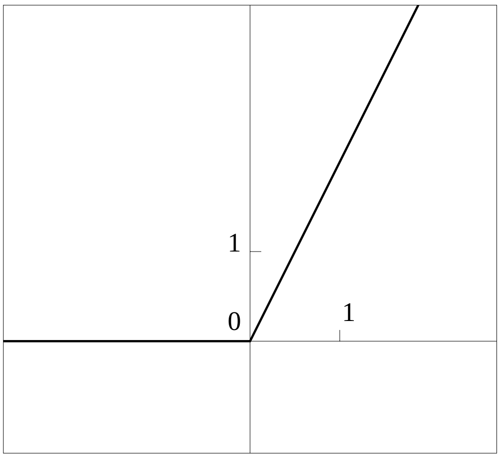

Figura 4.4

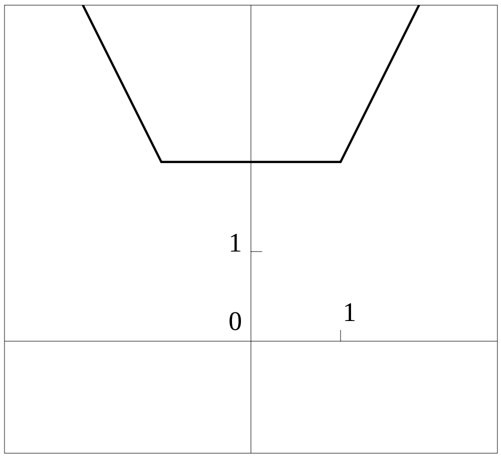

Figura 4.5

4.7-9. Per la funzione $x \mapsto f(x)+g(x)$ basta sommare membro a membro le disuguaglianze che traducono la convessità per ciascuna delle due.

Per la funzione $x \mapsto h(x) := \max\{f(x), g(x)\}$, scegliamo un punto compreso tra x_1 e x_2, diciamo il punto $(1-t)x_1 + tx_2$, con t fissato tra 0 e 1. In tale punto la funzione h coincide con quella delle funzioni f e g che assume valore maggiore, ad esempio sia

$$h((1-t)x_1 + tx_2) = g((1-t)x_1 + tx_2).$$

In virtù della convessità di g si ha allora

$$\begin{aligned} h((1-t)x_1 + tx_2) = g((1-t)x_1 + tx_2) &\leq \\ \leq (1-t)g(x_1) + tg(x_2) &\leq \\ \leq (1-t)h(x_1) + th(x_2). \end{aligned}$$

Se fosse stato

$$h((1-t)x_1 + tx_2) = f((1-t)x_1 + tx_2)$$

avremmo sfruttato la convessità di f.

4.7-10. La disuguaglianza che esprime la convessità di f può essere moltiplicata membro a membro per $\lambda \geq 0$, ottenendo una disuguaglianza dello stesso verso.

4.7-11. Immediato.

4.7-12. Sia x_1 un punto in cui, per assurdo, la funzione assume un valore minore del valore assunto in x_0: $f(x_1) < f(x_0)$. Sia, per fissare le idee, $x_1 > x_0$. Per tutti gli x compresi tra x_0 e x_1 si avrebbe $f(x) \leq r(x)$, dove $y = r(x)$ è l' equazione della secante il grafico di f, passante per i punti di ascisse x_0 e x_1:

$$y = r(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}\,(x - x_0).$$

Per ipotesi, il coefficiente angolare della retta in questione è minore di 0,

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} < 0,$$

dunque per $x > x_0$ si ha $r(x) < r(x_0) = f(x_0)$, e quindi, per tutti gli x con $x_0 < x \leq x_1$ si avrebbe

$$f(x) \leq r(x) < r(x_0) = f(x_0),$$

mentre, per ipotesi, si ha $f(x) \geq f(x_0)$ per tutti gli x di un intorno "destro" di x_0.

4.7-13. Abbiamo $p'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$, $p''(x) = 6ax + 2b$, $p'''(x) = 6a$; dunque il punto di ascissa $x_0 := -b/(3a)$ è punto di flesso. Supponiamo, per cominciare, che sia $b = 0$: il punto di flesso è in tal caso il punto $(0, d)$. Verifichiamo che si tratta di un punto di simmetria per il grafico di p. Infatti

$$p(-x) = -ax^3 - cx + d = -(ax^3 + cx + d) + 2d = -p(x) + 2d,$$

cioè i punti $(x, p(x))$, e $(-x, p(-x))$, sono simmetrici rispetto al punto $(0, d)$.

Nel caso generale, operiamo il cambiamento di variabile

$$x' := x - x_0 = x + \frac{b}{3a} \iff x = x' - \frac{b}{3a}.$$

Abbiamo, dopo qualche calcolo,

$$\begin{aligned} p\left(x' - \frac{b}{3a}\right) &= a\left(x' - \frac{b}{3a}\right)^3 + b\left(x' - \frac{b}{3a}\right)^2 + c\left(x' - \frac{b}{3a}\right) + d = \\ &= ax'^3 + \left(-\frac{b^2}{3a} + c\right)x' + \frac{2b^3}{27a^2} + d = \\ &= ax'^3 + c'x' + d', \end{aligned}$$

con ovvie posizioni per i coefficienti c' e d'. Come si vede, la funzione $x' \mapsto p(x' - b/3a)$ è un polinomio di terzo grado in x', privo del termine quadratico. Per quanto abbiamo appena visto, il suo grafico è simmetrico rispetto al punto $(0, d')$.

Una soluzione molto più immediata si ottiene una volta sviluppata la teoria dei polinomi di Taylor. Infatti, per ogni x_0 reale, il polinomio p coincide con il proprio polinomio di Taylor di punto iniziale x_0 e grado tre:

$$p(x) = p(x_0) + p'(x_0)\,(x - x_0) + \frac{p''(x_0)}{2}\,(x - x_0)^2 + \frac{p'''(x_0)}{6}\,(x - x_0)^3.$$

Se si sceglie come punto x_0 il punto in cui si annulla la derivata seconda, si ottiene che il grafico del polinomio in esame è rappresentato dall'equazione

$$y = p(x_0) + p'(x_0)\,(x - x_0) + \frac{p'''(x_0)}{6}\,(x - x_0)^3,$$

cioè

$$y - p(x_0) = p'(x_0)\,(x - x_0) + \frac{p'''(x_0)}{6}\,(x - x_0)^3.$$

Operiamo una traslazione degli assi, in modo da portare l'origine nel punto $(x_0, p(x_0))$, cioè introduciamo le variabili

$$x' := x - x_0, \quad y' := y - p(x_0);$$

nelle nuove variabili, la curva in esame è rappresentata da una funzione dispari

$$y' = p'(x_0)\,x' + \frac{p'''(x_0)}{6}\,x'^3,$$

dunque essa è simmetrica rispetto all'origine.

4.7-14. Posto, per brevità, $s := \sin x$, $c := \cos x$, da $0 < x < \pi/2$ segue $c > 0$, $s > 0$, mentre si ha, in ogni caso $c^2 + s^2 = 1$. Dunque il punto (c, s) appartiene alla circonferenza di centro l'origine e raggio 1 ed è interno al primo quadrante. La disuguaglianza $s + c > 1$ corrisponde alla disuguaglianza triangolare applicata al triangolo di vertici l'origine, il punto $(c, 0)$ e il punto (c, s).

Alternativamente si può osservare che la funzione $f(x) := \sin x + \cos x$ è > 0 per gli x considerati, e pertanto essa è strettamente concava, in quanto $f''(x) = -f(x)$. D'altra parte $f(0) = f(\pi/2) = 1$, dunque la disuguaglianza $f(x) > 1$ esprime la stretta concavità della stessa funzione.

4.7-15. La funzione in esame è dispari, in quanto prodotto di una funzione pari per una dispari, e dunque l'origine non può essere punto di massimo o di minimo. Essa non presenta neppure un punto di flesso nell'origine; tenendo presente che la tangente nell'origine è l'asse delle asscisse, è facile vedere che in ogni intorno dell'origine esistono infiniti punti del grafico al disopra, e infiniti al disotto, della stessa tangente (e dunque infiniti punti in cui il grafico attraversa tale tangente). Ragionando come nell'esercizio 3.8-2, limitatamente agli $x > 0$, si trova che f vale x^2 nei punti

$$x_k = \frac{2}{(4k+1)\pi}, \ k \in \boldsymbol{N},$$

vale $-x^2$ nei punti

$$y_k = \frac{2}{(4k-1)\pi}, \ k \in \boldsymbol{N}^*,$$

ed infine f s'annulla nei punti

$$z_k = \frac{1}{k\pi}, \ k \in \boldsymbol{N}^*.$$

4.7-16. Sappiamo che $e^x > 0$ per ogni x, $e^x > 1$ per $x > 0$, $e^x < 1$ per $x < 0$. Ne segue che il coseno iperbolico è una funzione strettamente positiva, il seno iperbolico è positivo per x positivo, negativo per x negativo. La parità del coseno iperbolico e la disparità del seno iperbolico sono immediate. Si ha poi

$$\mathrm{D}\cosh x = \mathrm{D}\,\frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sinh\, x;$$

analogamente si verifica che D sinh $x = \cosh x$. Dunque la derivata seconda del coseno iperbolico coincide con lo stesso coseno, e pertanto si tratta di una funzione strettamente convessa. Il valore assunto per $x = 0$, cioè 1, è il minimo assoluto della stessa funzione. Analogamente si ragiona per il seno iperbolico.

4.7-17. Si ha

$$\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2 - e^{2x} - e^{-2x} + 2}{4} = 1.$$

Alternativamente, si ha

$$\mathrm{D}\,(\cosh^2 x - \sinh^2 x) = 2\cosh x\, \sinh\, x - 2\cosh x\, \sinh\, x = 0.$$

4.7-18. L'equazione $y^2 - x^2 = 1$ descrive l'iperbole equilatera avente come asintoti le rette di equazione $y = x$, $y = -x$. Nel caso in esame, poiché il coseno iperbolico è ≥ 1, si tratta del ramo che è contenuto nel semipiano $x \geq 1$. Si veda la figura a pagina 518 del testo.