Giulio Cesare Barozzi: **Primo Corso di Analisi Matematica**
Zanichelli (Bologna), 1998, ISBN 88-08-01169-0

Capitolo 5 INTEGRALI

Soluzione dei problemi posti al termine di alcuni paragrafi

5.2 Il teorema fondamentale del calcolo integrale

5.2-1. Si hanno i seguenti risultati:

a) $$\int_1^2 t^{-2}\,\mathrm{d}t = [-t^{-1}]_1^2 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2};$$

b) $$\int_0^1 (t+1)^5\,\mathrm{d}t = \left[\frac{(t+1)^6}{6}\right]_0^1 = \frac{2^6}{6} - \frac{1}{6} = \frac{63}{6};$$

c) $$\int_2^5 \sqrt{x-1}\,\mathrm{d}x = \int_2^5 (x-1)^{1/2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3}\,(x-1)^{3/2}\right]_2^5 =$$
$$= \frac{2}{3}\,(4^{3/2}-1) = \frac{2}{3}\,(2^3-1) = \frac{14}{3}.$$

d) $$\int_1^6 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+3}} = \int_1^6 (x+3)^{-1/2}\mathrm{d}x = [2(x+3)^{1/2}]_1^6 =$$
$$= 2(9^{1/2} - 4^{1/2}) = 2(3-2) = 2.$$

5.2-2. a) L'integrando si scrive $4 - 4x^2 + x^4$; esso ammette la primitiva $4x - (4/3)\,x^3 + (1/5)\,x^5$. L'integrale vale dunque

$$\left[4 - \frac{4}{3} + \frac{1}{5}\right] = \frac{43}{15}.$$

b) L'integrando si scrive $1 - 3x + 2x^2$; esso ammette la primitiva $x - (3/2)\,x^2 + (2/3)\,x^3$. L'integrale vale dunque

$$\left[x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3\right]_1^2 = 2 - 6 + \frac{16}{3} - (1 - \frac{3}{2} + \frac{2}{3}) = \frac{7}{6}.$$

c) L'integrando ammette la primitiva $\ln(x-1)$, dunque l'integrale vale $\ln 2 - \ln 1 = \ln 2$.
d) L'integrando si può scrivere

$$\frac{2x-2+2}{x-1} = 2 + \frac{2}{x-1};$$

esso ammette la primitiva $2x + 2\ln(x-1)$ e pertanto l'integrale vale

$$8 + 2\ln 3 - 4 - 2\ln 1 = 4 + \ln 9.$$

5.2-3. Si trovano le seguenti primitive

a) $x \mapsto \frac{1}{2}(\arctan x)^2$;

b) $x \mapsto -\frac{1}{2}e^{-x^2}$;

c) $x \mapsto -\frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2}$;

d) $x \mapsto \ln(\ln x)$;

e) $x \mapsto \frac{3}{2}(\sin x)^{2/3}$;

f) $x \mapsto \arctan(e^x)$;

g) $x \mapsto \frac{1}{2}(\ln x)^2$;

h) $x \mapsto -\arctan(\cos x)$;

i) $x \mapsto \frac{1}{2}\arcsin(x^2)$;

j) $x \mapsto e^{-1/x}$.

5.2-4. Se $f(t) = F'(t) = t - 1$, allora

$$F(x) = F(0) + \int_0^x (t-1)\,\mathrm{d}t = 4 + \left[\frac{t^2}{2} - t\right]_0^x = \frac{x^2}{2} - x + 4;$$

dunque $F(6) = 36/2 - 6 + 4 = 16$.

5.2-5. Da $G''(x) = x^2 - 3x$, segue

$$G'(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + c_1, \quad G(x) = \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{2} + c_1 x + c_2,$$

con c_1 e c_2 costanti da determinare. Tali costanti si calcolano risolvendo il sistema

$$\begin{cases} G(0) = c_2 = 1 \\ G(1) = \dfrac{1}{12} - \dfrac{1}{2} + c_1 + c_2 + \dfrac{7}{12}, \end{cases}$$

da cui subito $c_2 = 1, c_1 = 0$. Dunque

$$G(x) = \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{2} + 1,$$

da cui, in particolare, $G(-1) = 1/12 + 1/2 + 1 = 19/12$.

5.2-6. Derivando rispetto a x l'identità

$$x^3 + 2x = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t,$$

si ottiene $3x^2 + 2 = f(x)$, da cui $f(2) = 14$.

5.2-7. La funzione F è composta mediante le funzioni

$$g : x \mapsto 2x = y, \quad h : y \mapsto \int_0^y \exp(-t^2)\,\mathrm{d}t,$$

cioè $F(x) = h(g(x))$. Dunque

$$F'(x) = h'(y)\,g'(x) = \exp(-y^2) \cdot 2 = 2\exp(-4x^2).$$

5.3 Proprietà dell'integrale

5.3-1. Nel caso a) si tratta di calcolare l'area della parte di piano che è situata al disopra del ramo di parabola di equazione $y = \sqrt{x}$, contenuta entro il quadrato di vertici opposti l'origine e il punto $(1, 1)$. Dunque l'area in questione vale

$$1 - \int_0^1 x^{1/2}\,\mathrm{d}x = 1 - \frac{2}{3}\,[x^{3/2}]_0^1 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

Nel caso b), calcoliamo le ascisse dei punti d'intersezione tra la retta di equazione $y = x+2$ e la parabola di equazione $y = x^2$. Si tratta di risolvere il sistema

$$\begin{cases} y = x + 2 \\ y = x^2. \end{cases}$$

Si ottiene l'equazione $x + 2 = x^2 \iff x^2 - x - 2 = 0$, da cui le soluzioni $x = -1$, $x = 2$. Dunque l'area in questione si ottiene calcolando l'integrale

$$\int_{-1}^2 (x + 2 - x^2)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^2 = \frac{4}{2} + 4 - \frac{8}{3} - \left(\frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{3}\right) = \frac{27}{6}.$$

Nel terzo caso, si osserva che le curve di equazioni $y = x^3$ e $y = x^2$ si intersecano nei punti di ascisse $x = 0$ e $x = 1$. Inoltre per $0 < x < 1$ si ha $x^3 < x^2$. Si tratta dunque di calcolare l'integrale

$$\int_0^1 (x^2 - x^3)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

5.3-2. Supponiamo che sia $f(x_0) > 0$. Scelto un numero δ compreso tra 0 e $f(x_0)$ (ad esempio $f(x_0)/2$), esiste un intorno di x_0, diciamo $I_r :=]x_0 - r, x_0 + r[$, tale che risulti $f(x) \geq \delta$ per $x \in I_r \cap [a, b]$. Allora

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_{I_r \cap [a,b]} f(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_{I_r \cap [a,b]} \delta\,\mathrm{d}x > 0,$$

contro l'ipotesi.

5.3-3. Il discriminante del trinomio

$$\lambda \mapsto I(f^2) + 2\lambda I(fg) + \lambda^2 I(g^2)$$

vale $\Delta = [I(fg)]^2 - I(f^2)\, I(g^2)$.

5.3-4. a) $1/3$; b) $(\ln 3)/2$; c) $1/3$.

5.3-5. Sia

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Allora, per il teorema del valor medio, si ha

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a) = (b-a)F'(c) = (b-a)f(c),$$

con c punto opportuno interno all'intervallo $[a, b]$.

5.3-6. Se $g(x) \geq 0$, partiamo dalla doppia disuguaglianza

$$eg(x) \leq f(x)g(x) \leq Eg(x).$$

Integrando le tre funzioni di ciascuna disuguaglianza sull'intervallo $[a, b]$ si ottiene

$$e\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \leq E\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x,$$

da cui segue il risultato dividendo per l'integrale di g, che è positivo per ipotesi.

5.3-7. Il prodotto ab può essere interpretato come l'area di un rettangolo che è, in ogni caso, contenuto nell'unione dei trapezoidi delle funzioni f (trapezoide relativo all'intervallo $\leq x \leq a$) e g (trapezoide relativo all'intervallo $0 \leq y \leq b$).

Per $f(x) = x$ si ritrova il risultato dell'esercizio 1.5-14. Si riveda la figura 1.5-5 a pagina 42 del testo.

5.3-8. Il risultato segue subito da quello del precedente esercizio, in quanto le funzioni $x \mapsto x^\alpha$ e $y \mapsto y^{1/\alpha}$ ammettono le primitive

$$x \mapsto \frac{1}{\alpha+1}\, x^{\alpha+1}, \quad y \mapsto \frac{\alpha}{\alpha+1}\, y^{(\alpha+1)/\alpha}.$$

Con le posizioni $p := \alpha + 1$, $q := 1/\alpha + 1$, si ritrova la disuguaglianza

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},$$

dell'esempio 4.4-5.

5.4 Integrazione per parti e per sostituzione

5.4-1. Troviamo una primitiva della funzione $\sin^2 x$ utilizzando il teorema fondamentale del calcolo e il metodo d'integrazione per parti. Una primitiva si otterrà calcolando l'integrale

$$\begin{aligned}\int_0^x \sin^2 t\,\mathrm{d}t = \int_0^x \sin t\ \sin t\,\mathrm{d}t = \int_0^x (-\cos t)'\ \sin t\,\mathrm{d}t\\ = [\cos t\ \sin t\,]_0^x - \int_0^x (-\cos^2 t)\,\mathrm{d}t =\\ = -\sin x\ \cos x + \int_0^x (1-\sin^2 t)\,\mathrm{d}t =\\ = -\sin x\ \cos x + \int_0^x \mathrm{d}t - \int_0^x \sin^2 t\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Considerando il primo e l'ultimo elemento della catena di uguaglianze, si ha

$$2\int_0^x \sin^2 t\,\mathrm{d}t = x - \sin x\ \cos x,$$

dunque

$$\int_0^x \sin^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{x-\sin x\ \cos x}{2}.$$

Una primitiva di $\sin^2 x$ è dunque la funzione

$$F(x) := \frac{x-\sin x\ \cos x}{2}.$$

Una derivazione mostra la correttezza del risultato ottenuto. Infatti

$$\begin{aligned}F'(x) &= \frac{1}{2}\,(1-\cos^2 x+\sin^2 x) = \frac{1}{2}\,[1-(1-\sin^2 x)+\sin^2 x] =\\ &= \sin^2 x.\end{aligned}$$

Una primitiva della funzione $x \mapsto \cos^2 x$ si trova allo stesso modo; si trova la funzione

$$F(x) := \frac{x+\sin x\ \cos x}{2}.$$

Le funzioni dei casi c) e d) sono simili tra loro; studiamo la seconda. Si ha una primitiva della funzione $t \mapsto e^x \cos x$ calcolando l'integrale

$$\begin{aligned}\int_0^x e^t \cos t\,\mathrm{d}t = [e^t\ \sin t]_0^x - \int_0^x e^t\ \sin t\,\mathrm{d}t =\\ = e^x\ \sin x - [e^t\,(-\cos t)]_0^x - \int_0^x e^t \cos t\,\mathrm{d}t =\\ = e^x\ \sin x + e^x \cos x - 1 - \int_0^x e^t \cos t\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

In conclusione

$$\int_0^x e^t \cos t \, \mathrm{d}t = \frac{e^x \sin x + e^x \cos x - 1}{2}.$$

Lasciamo al lettore la verifica, mediante derivazione, della correttezza del risultato ottenuto.

5.4-2. Si trovano i risultati di seguito indicati:

a)

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} x \sin 2x \, \mathrm{d}x &= \Big[-\frac{x}{2} \cos 2x\Big]_0^{\pi/2} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \cos 2x \, \mathrm{d}x = \\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\,[\sin 2x]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\int_0^1 x e^{2x} \, \mathrm{d}x &= \Big[\frac{x}{2}\, e^{2x}\Big]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x} \, \mathrm{d}x = \\ &= \frac{1}{2}\, e^2 - \frac{1}{4}\,\big[e^{2x}\big]_0^1 = \frac{1}{2}\, e^2 - \frac{1}{4}\, e^2 + \frac{1}{4} = \\ &= \frac{1}{4}\,(e^2 + 1).\end{aligned}$$

c) Il calcolo è del tutto simile al precedente; l'integrale vale $(2/9)e^3 + 1/9$.

d) Calcolo analogo ai due precedenti: l'integrale vale $-(3/4)e^{-2} - (1/4)e^2$.

e)

$$\begin{aligned}\int_1^e \sqrt{x} \ln x \, \mathrm{d}x &= \Big[\frac{2}{3}\, x^{3/2} \ln x\Big]_1^e - \frac{2}{3}\int_1^e x^{3/2}\, \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \\ &= \frac{2}{3}\, e^{3/2} - \frac{2}{3}\int_1^e \sqrt{x} \, \mathrm{d}x = \frac{2}{3}\, e^{3/2} - \frac{4}{9}\,\Big[x^{3/2}\Big]_1^e = \\ &= \frac{2}{9}\, e^{3/2} + \frac{4}{9}.\end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned}\int_1^e (\ln x)^2 \, \mathrm{d}x &= [\ln x\,(x \ln x - x)]_1^e - \int_1^e (x \ln x - x)\, \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \\ &= 1(e \cdot 1 - e) - \int_1^e (\ln x - 1) \, \mathrm{d}x = \\ &= -[x \ln x - 2x]_1^e = e - 2.\end{aligned}$$

5.4-3. Si trova

$$I_0 = \int_0^1 e^x \, \mathrm{d}x = e - 1.$$

Si ha poi, per $n > 0$,

$$I_n = \int_0^1 x^n e^x \, \mathrm{d}x = [x^n e^x]_0^1 - n \int_0^1 x^{n-1} e^x \, \mathrm{d}x = e - n\, I_{n-1}.$$

Ne segue che

$$I_1 = e - I_0 = e - e + 1 = 1.$$

Ancora

$$I_2 = e - 2I_1 = e - 2;$$

$$I_3 = e - 3I_2 = -2e + 6;$$

$$I_4 = e - 4I_3 = 9e - 24.$$

5.4-4. Si trovano i seguenti risultati:

a)

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+5x}} = \frac{1}{5}\int_1^6 \frac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t = \frac{2}{5}\left[\sqrt{t}\right]_1^6 = \frac{2}{5}(\sqrt{6}-1).$$

b)

$$\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,\mathrm{d}x = \int_1^e \frac{t}{1+t^2}\,\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = [\arctan t]_1^e = \arctan e - \frac{\pi}{4}.$$

c)

$$\int_0^1 \frac{e^x}{(e^x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \int_1^e \frac{t}{(t+1)^2}\,\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{-1}{t+1}\right]_1^e =$$

$$= \frac{-1}{e+1} + \frac{1}{2} = \frac{e-1}{2e+2}.$$

d)

$$\int_0^1 \frac{1}{e^{2x}+e^x}\,\mathrm{d}x = \int_1^e \frac{1}{t+t^2}\,\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \int_1^e \frac{1}{t^2(1+t)}\,\mathrm{d}t.$$

Poiché il denominatore ammette gli zeri $t = 0$ (doppio) e $t = -1$, cerchiamo una “decomposizione in fratti semplici” dell'integrando del tipo

$$\frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \frac{C}{1+t} = \frac{(A+C)t^2 + (A+B)t + B}{t^2(1+t)};$$

uguagliando a 1 il numeratore, si condotti al sistema

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ A + B = 0 \\ B \quad\;\; = 1 \end{cases},$$

da cui $A = -1, B = C = 1$. L'integrando si scrive dunque anche

$$-\frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} + \frac{1}{1+t},$$

e quindi l'integrale vale

$$\left[-\ln t - \frac{1}{t} + \ln(1+t)\right]_1^e = \left[\ln\frac{1+e}{2} - \frac{1}{e}\right].$$

e)

$$\int_0^1 x\sqrt{e^x}\,\mathrm{d}x = \int_1^{\sqrt{e}} 2t\ln t\,\frac{2}{t}\,\mathrm{d}t =$$

$$= 4\left[t\ln t - t\right]_1^{\sqrt{e}} = 4\left[\sqrt{e}\,\frac{1}{2} - \sqrt{e} + 1\right] = 4 - 2\sqrt{e}.$$

5.4-5. Suppopniamo f pari. Riconducendo l'integrale sull'intervallo $[-r, 0]$ all'integrale sull'intervallo $[0, r]$ mediante il cambiamento di variabile $x := -t$. Si ha

$$\int_{-r}^0 f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_r^0 f(-t)\,\mathrm{d}t = \int_0^r f(t)\,\mathrm{d}t,$$

dove, nell'ultima uguaglianza, abbiamo sfruttato la parità di f. Dunque l'integrale di f sull'intervallo $[-r, 0]$ è uguale all'integrale della stessa funzione suul'intervallo $[0, r]$.

Se f inceve è dispari si ha

$$\int_{-r}^0 f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_r^0 f(-t)\,\mathrm{d}t = \int_0^r f(-t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^r f(t)\,\mathrm{d}t.$$

5.5 L'integrale di Riemann

5.5-1. La funzione prodotto fg vale 1 nell'intervallo $[h, 1]$, vale 0 fuori di tale intervallo. Dunque

$$\int_0^2 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \int_h^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \int_h^1 \mathrm{d}x = 1 - h,$$

dove h può assumere un qualunque valore compreso tra 0 e 1.

5.5-2. Esaminiamo il primo caso. Dividiamo l'intervallo $[1, 2]$ in n parti uguali, ciascuna di lunghezza $1/n$, e ricopriamo il grafico di f mediante i rettangoli $[x_{k-1}, x_k] \times [e_k, E_k]$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Poiché la funzione f è decrescente nell'intervallo considerato, l'area complessiva di tali rettangoli vale

$$\frac{|f(2) - f(1)|}{n} = \frac{1}{2n}.$$

Si riveda la figura 5.5-10, a destra. Se si vuole che sia $1/(2n) \leq 1/4$ deve essere $n \geq 2$. Per $n = 2$ abbiamo la scomposizione σ dell'intervallo $[1, 2]$ operata dai punti $\{1, 3/2, 2\}$; un semplice calcolo mostra che

$$s(f;\sigma) = \frac{7}{12} \quad S(f;\sigma) = \frac{10}{12}.$$

La differenza tra le due somme è $1/4$.

Nel secondo caso la funzione f è crescente nell'intervallo considerato. Infatti

$$f'(x) = \frac{2(2x+1) - 4x}{(2x+1)^2} = \frac{2}{(2x+1)^2} > 0.$$

Ragionando come nel caso precedente, siamo condotti alla disuguaglianza

$$\frac{|f(3/2) - f(1/2)}{n} = \frac{1}{4n} \leq \frac{1}{10},$$

cioè $n \geq 10/4$, e poiché n è necessariamente intero, $n \geq 3$. Per $n = 3$ si ha la scomposizione σ operata dai punti $\{1/2, 5/6, 7/6, 3/2\}$ a cui corrispondono le somme

$$s(f;\sigma) = \frac{73}{120} \quad S(f;\sigma) = \frac{83}{120}.$$

La loro differenza vale $1/12 < 1/10$.

5.5-3. Sia σ_n la scomposizione dell'intervallo $[0,1]$ in n parti uguali, dunque siano

$$x_k := \frac{k}{n},\ k = 0, 1, \dots, n,$$

i punti di scomposizione. Allora

$$\begin{aligned} s_n := s(f;\sigma_n) &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k-1}{n}\right)^p = \frac{1}{n^{p+1}}\sum_{k=1}^{n}(k-1)^p = \\ &= \frac{1}{p+1}\left[\frac{(n-1)^{p+1} + \dots}{n^{p+1}}\right], \end{aligned}$$

dove i puntini stanno ad indicare termini di grado inferiore a $p+1$ nella variabile n. Analogamente

$$\begin{aligned} S_n := S(f;\sigma_n) &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^p = \frac{1}{n^{p+1}}\sum_{k=1}^{n}k^p = \\ &= \frac{1}{p+1}\left[\frac{n^{p+1} + \dots}{n^{p+1}}\right]. \end{aligned}$$

Le due quantità entro parentesi quadre tendono a 1 per $n \to \infty$, dunque

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{p+1}.$$

5.5-4. È lo stesso calcolo del precedente esercizio, salvo utilizzare i punti di scomposizione $x_k := ka/n$, $k = 0, 1, \dots, n$.

5.5-5. L'area complessiva dei rettangoli che ricoprono gli estremi del grafico di f è

$$2\delta(E-e);$$

scegliendo δ abbastanza piccolo, precisamente $\delta < \varepsilon/[4(E-e)]$, è possibile rendere tale area minore di $\varepsilon/2$, dove ε è un numero positivo fissato ad arbitrio. Sull'intervallo $[a+\delta, b-\delta]$ la funzione f è continua, quindi l'intervallo stesso è scomponibile in un numero finito di intervalli parziali $[x_{k-1}, x_k]$ in modo tale che l'area complessiva dei rettangoli $[x_{k-1}, x_k] \times [e_k, E_k]$ sia inferiore a $\varepsilon/2$.

5.5-6. L'insieme ordinato di f si può ottenere da quello di g aggiungendo o togliendo da esso un numero finito di segmenti paralleli all'asse delle ordinate, ciascuno di lunghezza $|f(x_k) - g(x_k)|$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Ciascuno di tali segmenti può essere considerato come un rettangolo degenere, e può essere ricoperta da un rettangolo di altezza $|f(x_k) - g(x_k)|$ e base arbitrariamente piccola, dunque in definitiva di area arbitrariamente piccola.

5.5-7. Si tratta, formalmente, del problema 5.4-5. Vogliamo darne una dimostrazione elementare, sfruttando le somme inferiori e superiori.

Sia σ^+ una scomposizione dell'intervallo $[0, r]$, σ^- la scomposizione dell'intervallo $[-r, 0]$ operata dagli opposti dei numeri che individuano σ^+, ed infine sia $\sigma := \sigma^+ \cup \sigma^-$. Allora, se f è pari, si ha

$$s(f;\sigma^+) = s(f;\sigma^-) \;\Rightarrow\; s(f;\sigma) = 2s(f;\sigma^+);$$

$$S(f;\sigma^+) = S(f;\sigma^-) \;\Rightarrow\; S(f;\sigma) = 2S(f;\sigma^+);$$

Ne segue che

$$\int_{-r}^{r} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{r} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Se f è dispari, si ha

$$s(f;\sigma^+) = -S(f;\sigma^-), \quad S(f;\sigma^+) = -s(f;\sigma^-),$$

quindi

$$s(f;\sigma) = s(f;\sigma^+) + s(f;\sigma^-) = s(f;\sigma^+) - S(f;\sigma^-),$$

$$S(f;\sigma) = S(f;\sigma^+) + S(f;\sigma^-) = S(f;\sigma^+) - s(f;\sigma^+).$$

In definitiva

$$s(f;\sigma) = -S(f;\sigma).$$

A parole: per ogni scomposizione dell'intervallo d'integrazione del tipo considerato, le relative somme, inferiore e superiore, sono tra loro opposte. Poichè le somme inferiori non superano le somme superiori, l'unico elemento di separazione tra i relativi insiemi non può essere che lo zero.

5.5-8. Seguendo il suggerimento si ha, per ogni scomposizione σ dell'intervallo $[0, a]$,

$$s(f,\sigma) + S(g;\sigma') = ab, \quad S(f,\sigma) + s(g;\sigma') = ab.$$

Poichè, qualunque sia la scomposizione σ', si ha $s(g;\sigma') \le I(g) \le S(g;\sigma')$, ne segue che

$$s(f,\sigma) + I(g) \le ab, \quad S(f,\sigma) + I(g) \ge ab,$$

cioè

$$s(f,\sigma) \le ab - I(g) \le S(f,\sigma).$$

Nelle formule precedenti il simbolo $I(g)$ indica l'integrale di g. L'ultima doppia disuguaglianza indica che il numero $ab - I(g)$ è un elemento di separazione tra l'insieme delle somme inferiori e l'insieme delle somme superiori relative alla funzione f; poiché f è integrabile per ipotesi, tale elemento di separazione è unico, dunque

$$I(f) = ab - I(g).$$

5.5-9. Infatti

$$\int_0^1 \sqrt[p]{x}\,\mathrm{d}x = 1 - \frac{1}{p+1} = \frac{p}{p+1}.$$

5.6 Alcune applicazioni del calcolo integrale

5.6-1. Posto

$$f(x) := h - \frac{h}{r}\,x, \quad 0 \le x \le r,$$

si ottiene

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^r \left(h - \frac{h}{r}\,x\right) x\,\mathrm{d}x = 2\pi \int_0^r \left(hx - \frac{h}{r}\,x^2\right) \mathrm{d}x = \\ &= 2\pi \left[\frac{hx^2}{2} - \frac{hx^3}{3r}\right]_0^r = 2\pi \left(\frac{hr^2}{2} - \frac{hr^3}{3r}\right) = \\ &= \frac{\pi r^3 h}{3}. \end{aligned}$$

5.6-2. Indichiamo con V_x e V_y i volumi cercati. Si trova

$$V_x = \pi \int_0^1 e^{2x}\,\mathrm{d}x = \pi \left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}\,(e^2 - 1).$$

Analogamente

$$\begin{aligned} V_y &= 2\pi \int_0^1 x\,e^{2x}\,\mathrm{d}x = 2\pi \int_0^1 x \left(\frac{e^{2x}}{2}\right)' \mathrm{d}x = \\ &= 2\pi \left[x\,\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^1 - 2\pi \int_0^1 \frac{e^{2x}}{2}\,\mathrm{d}x = \\ &= 2\pi\,\frac{e^2}{2} - 2\pi\,\frac{e^2 - 1}{2} = \\ &= \pi. \end{aligned}$$

5.6-3. Attualmente si ha

$$V_x = \pi \int_a^b \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\pi \left[\frac{1}{x}\right]_a^b = \pi\,\frac{b-a}{ab}.$$

$$V_y = 2\pi \int_a^b x\,\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = 2\pi\,(b-a).$$

5.6-4. I volumi in questione possono essere calcolati per differenza tra i volumi analoghi generati dalle funzioni $y = \sqrt{x}$ e $y = x^2$, $0 \le x \le 1$. Si trova

$$V_x = \pi \int_0^1 (x - x^4)\,\mathrm{d}x = \pi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) = \frac{3\pi}{10}.$$

Analogamente

$$V_y = 2\pi \int_0^1 (x\sqrt{x} - x^3)\,\mathrm{d}x = 2\pi\,\left[\frac{2}{5}\,x^{5/2} - \frac{1}{4}\,x^4\right]_0^1 = \pi\,\frac{8-5}{10} =$$
$$= \frac{3\pi}{10}.$$

5.6-5. Si trova

$$\begin{aligned} V &= \pi b^2 \int_{-a}^{a} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)\,\mathrm{d}x = 2\pi b^2 \int_0^a \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)\,\mathrm{d}x = \\ &= 2\pi b^2 \left[x - \frac{x^3}{3a^2}\right]_0^a = 2\pi b^2\left(a - \frac{a^3}{3a^2}\right) = \\ &= \frac{4}{3}\,\pi a b^2. \end{aligned}$$

Per $a = b$ si ritrova il volume della sfera calcolato nell'esempio 5.5-2.

5.6-6. Risolviamo l'equazione $e^y - e^{-y} = 2x$. Moltiplicando entrambi i membri per la quantità positiva e^y si ottiene l'equazione equivalente

$$e^{2y} - 1 = 2x\,e^y \iff e^{2y} - 2x\,e^y - 1 = 0.$$

Nell'incognita $t := e^y$ abbiamo un'equazione di secondo grado che ammette le soluzioni $t = x \pm \sqrt{x^2+1}$. Poiché $|x| = \sqrt{x^2} < \sqrt{x^2+1}$, la soluzione contenente il segno meno è negativa e pertanto non è accettabile; in definitiva

$$e^y = x + \sqrt{x^2+1} \iff y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right).$$

5.7 Integrazione numerica

5.7-1. Il calcolo può essere eseguito per un qualunque valore dell'indice i. Scegliamo $i = 1$; ponendo $x := x_0 + th$, si ha

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_1} (x - x_0)(x - x_1)\,\mathrm{d}x = h^3 \int_0^1 t\,(t-1)\,\mathrm{d}t &= \\ &= h^3 \int_0^1 (t^2 - t)\,\mathrm{d}t = h^3 \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \\ &= -\frac{h^3}{6}.\end{aligned}$$

5.7-2. Poniamo $i = 1$ ed effettuiamo lo stesso cambiamento di variabile per precedente esercizio. Si ha

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_2} (x - x_1)(x - x_2)\,\mathrm{d}x = h^3 \int_0^2 (t-1)(t-2)\,\mathrm{d}t &= \\ &= h^3 \int_0^2 (t^2 - 3t + 2)\,\mathrm{d}t = h^3 \left[\frac{t^3}{3} - \frac{3t^2}{2} + 2t\right]_0^2 = \\ &= h^3 \left(\frac{8}{3} - 6 + 4\right) = \\ &= \frac{2}{3}\,h^3.\end{aligned}$$

Stesso calcolo per l'integrale

$$\int_{x_0}^{x_2} (x - x_0)(x - x_1)\,\mathrm{d}x.$$

Ancora

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_2} (x - x_0)(x - x_2)\,\mathrm{d}x = h^3 \int_0^2 t\,(t-2)\,\mathrm{d}t &= \\ &= h^3 \int_0^2 (t^2 - 2t)\,\mathrm{d}t = h^3 \left[\frac{t^3}{3} - t^2\right]_0^2 = h^3 \left(\frac{8}{3} - 4\right) = \\ &= -\frac{4}{3}\,h^3.\end{aligned}$$

5.7-3. Si ha

$$\begin{aligned}\frac{b-a}{6}\left[a^3 + 4\left(\frac{a+b}{2}\right)^3 + b^3\right] &= \frac{b-a}{6}\left[a^3 + \frac{1}{2}\,(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) + b^3\right] = \\ &= \frac{b-a}{6}\,\frac{3}{2}\,(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3) = \\ &= \frac{1}{4}\,(b^4 - a^4).\end{aligned}$$

5.7-4. Si ha

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - z_i)^2 \, dx = 2 \int_{z_i}^{x_i} (x - z_i)^2 \, dx = \frac{2}{3} \left[(x - z_i)^3\right]_{z_i}^{x_i} = \frac{2}{3} \frac{h^3}{8} = \frac{h^3}{12}.$$

Si tenga presente che $x_i - z_i = h/2$.

5.7-5. Imponendo la validità dell'uguaglianza

$$\int_0^2 f(x) \, dx = w_0 \, f(0) + w_1 \, f(1) + w_2 \, f(2)$$

per le funzioni $1, x, x^2$, si ottiene il sistema contenuto nell'enunciato dell'esercizio. Sottraendo la seconda equazione dalla terza si ottiene $2w_2 = 2/3$, dunque $w_2 = 1/3$. Sostituendo il valore ottenuto nella seconda equazione si ottiene $w_1 = 4/3$, ed infine dalla prima equazione si ottiene $w_0 = 1/3$. Si ottengono così i pesi che intervengono nella formula di Cavalieri-Simpson, relativa a ciascuno degli intervalli $[x_{2i-2}, x_{2i}], i = 1, 2, \ldots, N$.

5.8 Integrali generalizzati

5.8-1. Esaminiamo le funzioni integrande da sinistra a destra e dall'alto al basso. Si ha

$$\frac{1}{\sqrt{x(1 + x^2)}} \sim \frac{1}{x^{3/2}}, \quad x \to +\infty,$$

quindi l'integrale converge. Successivamente

$$\frac{1 + \sqrt{x}}{\sqrt{1 + x^2}} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad x \to +\infty,$$

quindi l'integrale diverge;

$$\frac{\cos x}{\sqrt{x}} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad x \to 0^+,$$

quindi l'integrale converge;

$$\frac{1}{\ln(1 + x)} \sim \frac{1}{x}, \quad x \to 0,$$

quindi l'integrale diverge.

Si osservi poi che il limite del rapporto $(\ln x)/(x - 1)$, per $x \to 1$, vale 1, come subito si trova con le regola di L'Hospital. Per quanto riguarda il comportamente per $x \to 0^+$, si verifica senza troppa difficoltà, usando la stessa regola, che

$$\ln x = o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right), \quad x \to 0^+,$$

quindi l'integrale converge.

Operiamo il cambiamento di variabile suggerito:

$$t = \sqrt{\frac{x}{2-x}} \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = \frac{2t^2}{1+t^2};$$

la variabile t descrive l'intervallo $[0, +\infty)$ quando x descrive l'intervallo $[0, 2)$ e viceversa. L'integrando originario si trasforma in $(1+t^2)/(2t)$; poiché la derivata di x rispetto a t vale $(t/(1+t^2)^2$, si è ricondotti all'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \pi.$$

5.8-2. Procediamo come nel precedente esercizio. Si ha

$$\frac{1+\sin x}{1+x} = \frac{1}{1+x} + \frac{\sin x}{1+x};$$

l'integrale della prima funzione a secondo membro diverge.
Scriviamo

$$\frac{\ln x}{x^2} = \frac{1}{x^{3/2}}\,\frac{\ln x}{\sqrt{x}},$$

dove l'ultimo rapporto tende a 0 per $x \to +\infty$. Quindi la funzione integranda è maggiorata, a meno di una costante, dalla funzione $1/x^{3/2}$ e peertanto l'integrale è convergente.
Per gli x dell'intervallo $[0, 4)$ si ha

$$\frac{\sqrt{4-x}}{2-\sqrt{x}} = \frac{2+\sqrt{x}\,\sqrt{4-x}}{4-x} = \frac{2+\sqrt{x}}{\sqrt{4-x}}.$$

Per $x \to 4^-$ la funzione integranda si comporta come $1/\sqrt{4-x}$, quindi l'integrale converge.
La funzione integranda del quarto integrale si scrive

$$\frac{1}{(\ln x)^2}\,\mathrm{D}\ln x.$$

Una primitiva è dunque $-1/\ln x$; essa tende a 0 per $x \to +\infty$, ma tende a $-\infty$ per $x \to 1^+$.

Appendice 6 Integrazione delle funzioni razionali fratte

A.6-1. Si ha

$$\Phi'(x) = \frac{1}{a}\,\frac{1}{1+\dfrac{x^2}{a^2}}\,\frac{1}{a} = \frac{1}{a^2}\,\frac{a^2}{a^2+x^2} = \frac{1}{a^2+x^2}.$$

A.6-2. a) Cerchiamo una decomposizione in fratti semplici del tipo

$$\frac{x+1}{x(x^2-4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+2} = \frac{A(x^2-4)+Bx(x+2)+Cx(x-2)}{x(x^2-4)}.$$

Poiché il numeratore dell'ultima frazione, cioè il polinomio $(A+B+C)x^2+2(B-C)x-4A$, deve coincidere col numeratore della funzione assegnata, in virtù del principio di identità dei polinomi siamo condotti al sistema

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ 2B-2C=1 \\ -4A=1 \end{cases},$$

da cui $A=-1/4, B=3/8, C=-1/8$. Dunque

$$f(x) = \frac{x+1}{x(x^2-4)} = -\frac{1}{4x} + \frac{3}{8(x-2)} - \frac{1}{8(x+2)}$$

ammette la primitiva

$$\Phi(x) := -\frac{1}{4}\ln|\,x\,| + \frac{3}{8}\ln|x-2| - \frac{1}{8}\ln|x+2|$$

su un qualunque intervallo della retta reale che non contenga i punti $0, 2, -2$.

b) Procediamo come nel precedente esercizio; questa volta cerchiamo una decomposizione del tipo

$$\frac{1}{(1+x)(1+x^2)} = \frac{A}{1+x} + \frac{Bx+C}{1+x^2} = \frac{A(1+x^2)+(Bx+C)(1+x)}{(1+x)(1+x^2)}.$$

Uguagliando a 1 il numeratore dell'ultima frazione, cioè il polinomio

$$(A+B)x^2 + (B+C)x + A + C,$$

si è condotti al sistema

$$\begin{cases} A+B=0 \\ B+C=0 \\ A+C=1 \end{cases},$$

da cui $A=1/2, B=-1/2, C=1/2$. Dunque

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{1}{(1+x)(1+x^2)} &= \frac{1}{2(1+x)} + \frac{1}{2}\,\frac{1-x}{1+x^2} = \\ &= \frac{1}{2(1+x)} - \frac{1}{4}\,\frac{2x}{1+x^2} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+x^2}, \end{aligned}$$

ammette la primitiva

$$\Phi(x) := \frac{1}{2}\,\ln|1+x| - \frac{1}{4}\ln(1+x^2) + \frac{1}{2}\arctan x$$

su ogni intervallo non contenente il punto $x = -1$.

A.6-3. a) Poiché

$$f(x) = \frac{x^4}{x^5+1} = \frac{1}{5}\,\frac{5x^4}{x^5+1},$$

f ammette la primitiva

$$\Phi(x) := \frac{1}{5}\ln\left(x^5+1\right)$$

sull'intervallo $[0,1]$, e pertanto

$$\int_0^1 \frac{x^4}{x^5+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\left[\ln\left(x^5+1\right)\right]_0^1 = \frac{1}{5}\ln 2.$$

b) Possiamo scrivere

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2+1} = \frac{x^3+x}{x^2+1} - \frac{x}{x^2+1} = x - \frac{x}{x^2+1};$$

f ammette dunque la primitiva

$$\Phi(x) := \frac{1}{2}\left[x^2 - \ln\left(x^2+1\right)\right],$$

dunque

$$\int_1^2 \frac{x^3}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[x^2 - \ln\left(x^2+1\right)\right]_1^2 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\,\ln\frac{2}{5}.$$

c) Possiamo scrivere

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2-3x+2} = \frac{x^2-3x+2}{x^2-3x+2} + \frac{3x-2}{x^2-3x+2} =$$

$$= 1 + \frac{3x-2}{x^2-3x+2}.$$

Poiché il denominatore di f anmmette gli zeri $x = 1$ e $x = 2$, cerchiamo una decomposizione dell'ultima frazione del tipo

$$\frac{3x-2}{x^2-3x+2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}.$$

Procedendo nel modo consueto troviamo il sistema

$$\begin{cases} A + B = 3 \\ -2A - B = -2 \end{cases}$$

che fornisce $A = -1, B = 4$. Dunque

$$f(x) = 1 - \frac{1}{x-1} + \frac{4}{x-2},$$

e pertanto, nell'intervallo $[-1, 0]$, f ammette la primitiva

$$\begin{aligned}\Phi(x) := x - \ln|x-1| + 4\ln|x-2| = \\ = x - \ln(1-x) + 4\ln(2-x).\end{aligned}$$

In definitiva

$$\int_{-1}^{0} \frac{x^2}{x^2 - 3x + 2}\,\mathrm{d}x = [x - \ln(1-x) + 4\ln(2-x)]_{-1}^{0} = 5\ln 2 - 4\ln 3 + 1.$$

d) Possiamo scrivere

$$\begin{aligned}\frac{x^4+1}{x^2+1} &= \frac{x^4+x^2}{x^2+1} + \frac{-x^2+1}{x^2+1} = \\ &= x^2 + \frac{-x^2-1}{x^2+1} + \frac{2}{x^2+1} \\ &= x^2 - 1 + \frac{2}{x^2+1}.\end{aligned}$$

In sostanza abbiamo eseguito la divisione di x^4+1 per x^2+1 ottenendo il quoziente x^2-1 e il resto 2. La funzione assegnata ammette le primitiva

$$\Phi(x) := \frac{x^3}{3} - x + 2\,\arctan\,x$$

dunque

$$\int_0^2 \frac{x^4+1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3} - x + 2\,\arctan\,x\right]_0^2 = \frac{2}{3} + 2\,\arctan\,2.$$

A.6-4. a) Operiamo il cambiamento di variabile

$$x = 2\,\arctan\,t \iff t = \mathrm{tg}\,\frac{x}{2}.$$

Si trova

$$\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\alpha} \frac{1+t^2}{1-t^2}\,\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\alpha} \frac{2}{1-t^2}\,\mathrm{d}t,$$

avendo posto, per brevità, $\alpha := \mathrm{tg}\,(\pi/8)$. Si osservi che $0 < \alpha < 1$.
Per la funzione integranda si trova facilmente la decomposizione

$$\frac{2}{1-t^2} = \frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t},$$

dunque la primitiva

$$\Phi(t) := -\ln(1-t) + \ln(1+t) = \ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)$$

sull'intervallo $[0, \alpha]$. In definitiva l'integrale vale

$$\ln\frac{1+\alpha}{1-\alpha}.$$

Utilizziamo le formule di bisezione per calcolare $\alpha = \operatorname{tg}(\pi/8)$; poiché il coseno di $\pi/4$ vale $\sqrt{2}/2$ si trova, con qualche passaggio,

$$\alpha = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{(2-\sqrt{2})^2}{4-2}} = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}.$$

Se ne deduce $1+\alpha = \sqrt{2}, 1-\alpha = 2-\sqrt{2}$, e finalmente

$$\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos x}\,\mathrm{d}x = \ln\frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = \ln(\sqrt{2}+1).$$

b) Quando x descrive l'intervallo $[0, \pi], x/2$ descrive l'intervallo $[0, \pi/2]$; l'estremo destro di tale intervallo non appartiene al dominio della funzione tangente, quindi, a rigor di termini, il cambiamento di variabile utilizzato nel precedente esercizio non è lecito. Tuttavia, possiamo considerare l'integrale sull'intervallo $[0, \pi]$ come limite dell'intergrale sull'intervallo $[0, \pi-\varepsilon]$ per $\varepsilon \downarrow 0$; in definitiva si ottiene l'integrale "generalizzato"

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{2+\dfrac{2t}{1+t^2}}\,\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2+t+1}\,\mathrm{d}t.$$

Il trinomio a denominatore può essere scritto come somma di due quadrati nel modo seguente:

$$t^2+t+1 = \left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}\left\{1+\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t+\frac{1}{2}\right)\right]^2\right\}.$$

Si ottiene dunque l'integrale

$$\frac{4}{3}\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t+\frac{1}{2}\right)\right]^2}\,\mathrm{d}t.$$

Poiché la funzione integranda ammette la primitiva

$$\Phi(t) := \frac{4}{3}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\arctan\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t+\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t+\frac{1}{2}\right),$$

si ottiene in definitiva come valore dell'integrale

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\left[\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right]=\frac{2}{3\sqrt{3}}\pi.$$

A.6-5. Con il cambiamento di variabile suggerito si ottiene l'integrale

$$\int_1^e \frac{1}{t+1}\,\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Per la funzione integranda si ottiene facilmente la decomposizione in fratti semplici

$$\frac{1}{t\,(t+1)}=\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1},$$

quindi la primitiva

$$\Phi(t):=\ln\frac{t}{t+1}$$

sull'intervallo $[1,e]$. L'integrale vale dunque

$$\ln\frac{e}{e+1}-\ln\frac{1}{2}=\ln\frac{2e}{e+1}.$$

Per trovare una primitiva della funzione integranda basta applicare il teorema fondamentale del calcolo; si ha

$$\Phi(x):=\int_0^x \frac{1}{e^{\xi}+1}\,\mathrm{d}\xi.$$

Con il cambiamento di variabile

$$\xi=\ln t \iff e^{\xi}=t,$$

si ottiene, come in precedenza,

$$\Phi(x)=\int_1^{e^x}\frac{1}{t\,(t+1)}\mathrm{d}t=\left[\ln\frac{t}{t+1}\right]_1^{e^x}=\ln\frac{e^x}{e^x+1}+\ln 2=\ln\frac{2e^x}{e^x+1}.$$

Suggeriamo al lettore di operare una verifica mediante derivazione della funzione Φ.