Giulio Cesare Barozzi: **Primo Corso di Analisi Matematica**
Zanichelli (Bologna), 1998, ISBN 88-08-01169-0

Capitolo 6 SERIE

Soluzione dei problemi posti al termine di alcuni paragrafi

6.2 Serie a termini positivi

6.2-1. Occupiamoci del criterio del confronto. Si ha, per ogni $n > n_0$,

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n_0} a_k + \sum_{k=n_0+1}^{n} a_k = s_0 + \sum_{k=n_0+1}^{n} a_k,$$

avendo posto $s_0 := \sum_{k=0}^{n_0} a_k$. Se $a_k \le b_k$ per ogni $k > n_0$, si ha

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = s_0 + \sum_{k=n_0+1}^{n} a_k \le s_0 + \sum_{k=n_0+1}^{n} b_k.$$

Le somme parziali della serie

$$\sum_{k=n_0+1}^{\infty} a_k$$

costituiscono una successione crescente, limitata superiormente dalla quantità

$$s_0 + \sum_{k=n_0+1}^{\infty} b_k.$$

Dunque la serie converge.

6.2-2. Ci si riduce a studiare la serie geometrica

$$\frac{a}{\sqrt{2}}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{(\sqrt{2})^2} + \frac{1}{(\sqrt{2})^3} + \ldots\right) =$$

$$= \frac{a}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{1 - 1/\sqrt{2}} = \frac{a}{\sqrt{2} - 1} = a(\sqrt{2} + 1).$$

6.2-3. Si ottiene la serie geometrica

$$h\left(1 + \frac{2}{3} + \frac{2^2}{3^2} + \frac{2^3}{3^3} + \ldots\right) = h\,\frac{1}{1 - 2/3} = 3h.$$

Poiché tutti i tratti vengono percorsi due volte (tranne il primo), il cammino complessivo ha lunghezza $6h - h = 5h$.

6.2-4. Si trovano le frazioni seguenti:

$$0.4\overline{7} = \frac{43}{90}; \qquad 0.17\overline{3} = \frac{13}{75}; \qquad 2.5\overline{6} = \frac{77}{30}; \qquad 0.\overline{1} = \frac{1}{9}.$$

6.2-5. Si ha

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^4} + \ldots &= \frac{2}{3}\left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{9^2} + \ldots\right) = \\ &= \frac{2}{3}\,\frac{1}{1-1/9} = \frac{2}{3}\,\frac{9}{8} = \frac{3}{4}\,. \end{aligned}$$

Analogamente

$$\begin{aligned} \frac{4}{3^2} + \frac{4}{3^4} + \frac{4}{3^6} + \ldots &= \frac{4}{9}\left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{9^2} + \ldots\right) = \\ &= \frac{4}{9}\,\frac{1}{1-1/9} = \frac{4}{9}\,\frac{9}{8} = \frac{1}{2}\,. \end{aligned}$$

La somma della serie è dunque $3/4 + 1/2 = 5/4$.

6.2-6. Si ha

$$\sum_{n\ge 0}\left(\frac{3}{5}\right)^n = \frac{1}{1-3/5} = \frac{5}{1}\,, \quad \sum_{n\ge 0}\left(\frac{4}{5}\right)^n = \frac{1}{1-4/5} = 5.$$

Dunque la serie a) ha come somma $5/2 + 5 = 15/2$.

Analogamente si trova

$$\sum_{n\ge 0}\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{1-1/3} = \frac{3}{2}\,, \quad \sum_{n\ge 0}\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{1-2/3} = 3,$$

quindi la serie b) ha come somma $3/2 - 3 = -3/2$.

6.2-7. Cerchiamo una decomposizione in fratti semplici del termine generale della serie. Si ha

$$\frac{1}{(n+3)(n+4)} = \frac{A}{n+3} + \frac{B}{n+4} = \frac{A(n+4) + B(n+3)}{(n+3)(n+4)}.$$

Uguagliando i coefficienti dei termini simili nei numeratori della prima e dell'ultima frazione si trova

$$\begin{cases} 4A + 3B = 1 \\ A + B = 0 \end{cases}$$

da cui subito $A = 1, B = -1$. Dunque

$$\frac{1}{(n+3)(n+4)} = \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4}.$$

Pertanto

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+3)(k+4)} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{n+4}.$$

La somma della serie è dunque 1/3.
Analogamente si trova

$$\frac{1}{(n+2)(2n+2)} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{(n+2)(n+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right).$$

Dunque

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+2)(2k+2)} &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n+2}\right).\end{aligned}$$

La somma della serie è dunque 1/2.

6.2-8. Basta osservare che

a) $$\frac{1}{2n+1} > \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{n+1};$$

b) $$\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{n};$$

c) $$\frac{n}{n^2+n+1} > \frac{n}{n^2+n+n} = \frac{1}{n+2}.$$

6.2-9. La somma in questione vale (v. esempio 6.1-4)

$$\frac{9}{10}\,\frac{1}{1-1/10} = \frac{9}{10}\,\frac{10}{9} = 1.$$

6.2-10. Se il rapporto a_n/b_n tende a 1, almeno per gli n “abbastanza grandi” esso si mantiene compreso in un intervallo di numeri positivi centrato sul valore 1, ad esempio l'intervallo $[1/2, 3/2]$. Da

$$\frac{1}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3}{2}$$

segue $a_n < (3/2)\,b_n$, ed anche $b_n < 2a_n$. A questo punto basta applicare il criterio del confronto nella forma estesa data nel problema 1.

6.3 Serie a termini reali

6.3-1. Ciascuna parentesi contiene 2^{n-1} termini di cui il più piccolo è l'ultimo che vale $1/2^n$. Dunque la somma dei termini entro ciascuna parentesi supera $1/2$. La somma H_{2^k} (il cui ultimo termine è $1/2^k$) supera 1 più k volte $1/2$. La divergenza della serie armonica segue mandando k all'infinito.

6.3-2. Sia ha

$$\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n+1} = \frac{n+1+n-1}{n^2-1} = \frac{2n}{n^2-1} > \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n}.$$

Sommando $1/n$ ad entrambi i membri si ottiene la disuguaglianza desiderata.
Se ora scriviamo H_{3n+1} nella forma

$$\begin{aligned} H_{3n+1} = 1 &+ \\ &+ \Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\Big) + \\ &+ \Big(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}\Big) + \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\ &+ \Big(\frac{1}{3n-1} + \frac{1}{3n} + \frac{1}{3n+1}\Big), \end{aligned}$$

abbiamo che ciascuna parentesi si minora con 3 volte il suo termine di mezzo e dunque

$$\begin{aligned} H_{3n+1} &> 1 + 3 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{1}{6} + \ldots + 3 \cdot \frac{1}{3n} = \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} = 1 + H_n. \end{aligned}$$

Se la serie convergesse alla somma s, passando al limite per $n \to \infty$ si avrebbe $s \geq 1 + s$.

6.3-3. Consideriamo la prima serie. Con i simboli della Proposizione 6.3-3 si ha $c_{2n} = 0$, $c_{2n+1} = 1/(2n+1)!$. Si tratta dunque di dimostrare che

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n+1]{\frac{1}{(2n+1)!}} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n+1]{(2n+1)!} = +\infty.$$

Ma questo segue subito dai risultati citati (si riveda la Tabella al termine del paragrafo 3.8).

6.3-4. Osserviamo innanzitutto che, essendo f positiva, la funzione integrale

$$x \mapsto \int_1^x f(t)\, dt$$

è crescente, quindi dotata di limite (finito o infinito) per $x \to +\infty$. Tale limite sarà lo stesso della successione $n \mapsto \int_1^n f(x)\,dx$.

Scriviamo
$$\int_1^n f(x)\,dx = \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx.$$
Poiché f è decrescente, per $k-1 \le x \le k$ si ha
$$a_{k-1} = f(k-1) \ge f(x) \ge f(k) = a_k,$$
quindi anche, integrando sull'intervallo indicato,
$$a_{k-1} \ge \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx \ge a_k.$$
Sommando in k da 2 a n si ottiene
$$a_1 + a_2 + \ldots a_{n-1} \ge \int_1^n f(x)\,dx \ge a_2 + a_3 + \ldots a_n,$$
cioè la doppia disugugalianza data nel suggerimento. A questo punto basta applicare i teoremi di confronto forniti dalle Proposizioni 3.6-3 e 3.6-4.

6.3-5. Basta ricordare (cfr. esempio 5.8-4) che l'integrale generalizzato $\int_1^{+\infty} 1/x^\alpha\,dx$ diverge per $\alpha \le 1$, converge per $\alpha > 1$.