Giulio Cesare Barozzi: **Primo Corso di Analisi Matematica**
Zanichelli (Bologna), 1998, ISBN 88-08-01169-0

Capitolo 7 APPLICAZIONI

Soluzione dei problemi posti al termine di alcuni paragrafi

7.2 Approssimazione locale di una funzione mediante funzioni affini Differenziale di una funzione

7.2-1. Se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0,$$

allora si ha, per gli x abbastanza prossimi a x_0,

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leq M \iff |f(x)| \leq M|g(x)|.$$

Basta scegliere $f(x) = g(x) := x - x_0$ per avere $f = O(g)$, ma non $f = o(g)$.

7.2-2 Occupiamoci, ad esempio, della b). Se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0, \quad \left|\frac{g(x)}{h(x)}\right| \leq M,$$

(quest'ultima per $0 < |x - x_0| < \delta$), allora

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{h(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \frac{g(x)}{h(x)} = 0,$$

in virtù di quanto dimostrato nel problema 3.6-1. punto iv).

7.2-3 Si ha

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^2}\, x = 0.$$

Un controesempio è fornito dalla funzione $x \mapsto |x|^{3/2}$.

7.2-4 Se esistesse un polinomio $p(x) = mx + q$ per cui $f(x) - p(x) = o(x - x_0)^2$, a più forte ragione sarebbe $f(x) - p(x) = o(x - x_0)$. Noi sappiamo che, se f è derivabile, l'unico polinomio che verifica l'ultima condizione scritta è $p(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Se f è due volte derivabile in x_0, per tale polinomio si ha, applicando la regola di L'Hôpital,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - p(x)}{(x - x_0)^2} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{2(x - x_0)} = \frac{f''(x_0)}{2}.$$

E' dunque impossibile che il limite considerato valga 0 se $f''(x_0) \neq 0$.

7.2-5 Si trova:

a) $A(r) = \pi r^2, \mathrm{d}A = 2\pi r\, \mathrm{d}r$. Con i dati proposti si ha

$$\Delta A \approx 4\pi \frac{1}{100} = 0.04\,\pi \approx 0.125\,\mathrm{m}^2.$$

b) $S(r) = 4\pi r^2, \mathrm{d}S = 8\pi r\, \mathrm{d}r$. Con i dati proposti si ha

$$\Delta S \approx 16\pi \frac{2}{100} \approx 1.005\,\mathrm{m}^2.$$

c) $V(r) = \pi r^3, \mathrm{d}V = 3\pi r^2\, \mathrm{d}r$. Con i dati proposti si ha

$$\Delta V \approx 3\pi \frac{1}{4}\frac{1}{100} = \frac{3\pi}{400} \approx 0.0235\,\mathrm{m}^3.$$

d) $S(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot 2r = 6\pi r^2$, $\mathrm{d}S = 12\pi r\, \mathrm{d}r$. Con i dati proposti

$$\Delta S \approx 12\pi \frac{1}{2}\frac{1}{100} \approx 0.188\,\mathrm{m}^2.$$

7.2-6 Si trovano i seguenti risultati:

a) $p(x) = 1 + x/2$;
b) $p(x) = 1$;
c) $p(x) = x$;
d) $p(x) = 1 + x$;
e) $p(x) = x - 1$;
f) $p(x) = x$;
g) $p(x) = x$;
h) $p(x) = \pi/2 - x$.

7.3 Approssimazione locale di una funzione mediante funzioni polinomiali Polinomi di Taylor

7.3-1 La derivata del polinomio

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}\,(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\,(x - x_0)^n,$$

si scrive

$$f'(x_0) + f''(x_0)\,(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}\,(x - x_0)^{n-1}.$$

Ad esempio, derivando il polinomio di Taylor di punto iniziale l'origine e grado $2n+1$ relativo alla funzione seno

$$T_{2n+1}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

si ottiene

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

cioè il polinomio analogo di grado $2n$ relativo alla funzione coseno.

7.3-2 Poiché $T_5 = T_6$, si ha

$$r_5(x) = r_6(x) = -\frac{x^7}{5040} \cos\xi \quad \Rightarrow \quad |r_5(x)| \le \frac{1}{5040}\,\frac{1}{10^7} \approx 1.98 \cdot 10^{-11}.$$

7.3-3 Si trova, per $0 < x \le 1$,

$$r_2(x) = \frac{e^\xi}{3!}\, x^3,$$

con $0 < \xi < x \le 1$. Poiché la funzione esponenziale è crescente, si ottiene

$$|r_2(x)| < \frac{e}{3!} < \frac{1}{2},$$

in quanto $e < 3$.
Analogamente si trova $|r_3(x)| < 1/8$.

7.3-4 Si trova

$$r_2(x) = \frac{2}{(1+\xi)^3}\,\frac{x^3}{3!},$$

con $|\xi| < 1/2$. Dunque

$$|r_2(x)| < \frac{2}{3!\,2^3} + \frac{1}{24} \approx 4.16 \cdot 10^{-2}.$$

Analogamente

$$r_3(x) = \frac{-6}{(1+\xi)^4}\,\frac{x^4}{4!} \;\Rightarrow\; |r_3(x)| < \frac{6}{4!\,2^4} = \frac{1}{64} \approx 1.56 \cdot 10^{-2}.$$

7.3-5 Da $f(x) = \sqrt{1+x}$, segue

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}, \quad f''(x) = \frac{-1}{4(1+x)^{3/2}}, \quad f'''(x) = \frac{3}{8(1+x)^{5/2}}.$$

Dunque $p_2(x) = 1 + x/2 - x^2/4$, e

$$r_2(x) = \frac{3}{8(1+\xi)^{5/2}}\,\frac{x^3}{3!} \;\Rightarrow\; |r_2(x)| < \frac{3}{8 \cdot 10^3} = 6.25 \cdot 10^{-5}.$$

7.3-6 Basta scrivere x al posto di x_0 e h al posto di $x - x_0$.

7.3-7 Con le notazioni del precedente problema si trova

$$f(x+h) = f(x) + h\,f'(x) + r_1(h),$$

con

$$r_1(h) = \frac{f''(\xi)}{2}\,h^2,$$

ξ essendo un punto interno all'intervallo di estremi x e $x+h$. Se la funzione $t \mapsto f''(t)$ è continua nell'intervallo limitato e chiuso $[x-\delta, x+\delta]$, essa è ivi limitata, in virtù del teorema di Weierstrass:

$$|f''(t)| \leq M,\ \forall t \in [x-\delta, x+\delta].$$

Allora

$$|r_1(h)| \leq \frac{M}{2}\,h^2.$$

7.3-8 Sottraendo membro a membro le due uguaglianze

$$f(x+h) = f(x) + h\,f'(x) + \frac{h^2}{2}\,f''(x) + O(h^3),$$

$$f(x-h) = f(x) - h\,f'(x) + \frac{h^2}{2}\,f''(x) + O(h^3),$$

si ottiene

$$f(x+h) - f(x-h) = 2h\,f'(x) + O(h^3) \iff \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = f'(x) + O(h^2).$$

7.3-9 Scriviamo le due uguaglianze utilizzate nel precedente propblema nella forma

$$f(x+h) - f(x) = h\,f'(x) + \frac{h^2}{2}\,f''(x) + O(h^3),$$

$$f(x-h) - f(x) = -h\,f'(x) + \frac{h^2}{2}\,f''(x) + O(h^3).$$

Sommando membro a membro si ottiene

$$f(x+h) - 2f(x) + f(x-h) = h^2\,f''(x) + O(h^3),$$

da cui

$$\frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} = f''(x) + O(h).$$

7.3-10 Se f è convessa, la derivata seconda è ≥ 0, dunque l'ultimo termine a secondo membro, $f''(x_0)(x = x_0)^2/2$, è ≥ 0. Ne segue che

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

cioè il grafico di f sta sopra alla retta tangente al grafico stesso nel punto di ascissa x_0.

7.4 Serie di Taylor

7.4-1 La formula

$$\binom{\alpha}{n} := \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!},$$

per $\alpha = -1$ fornisce

$$\binom{-1}{n} = \frac{-1\cdot(-2)\cdot(-3)\dots(-n)}{n!} = (-1)^n.$$

Scrivendo dunque $-x$ al posto di x, e quindi $(-1)^n\, x^n$ al posto di x^n, la serie binomiale fornisce

$$(1-x)^{-1} = \frac{1}{1-x} = \sum_{n-0}^{\infty} x^n.$$

7.4-2 Basta calcolare la semisomma e la semidifferenza tra gli sviluppi

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots,$$

e

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots.$$

7.4-3 Le ipotesi del criterio di Leibniz sono subito verificate. Calcolando la prime cinque somme parziali della serie indicata si trovano le stime:

$$\frac{1}{2} = 0.5, \quad \frac{1}{2} = 0.\overline{3}, \quad \frac{3}{8} = 0.375, \quad \frac{11}{30} = 0.3\overline{6}, \quad \frac{53}{144} = 0.368056\dots\ .$$

Si ha $1/e = 0.367\,879 :, \dots$.

7.4-4 Basta scrivere x^2 al posto di x nello sviluppo di e^{-x} (cfr. problema 2).

7.5 Funzione esponenziale in campo complesso

7.5-1 L'identità (2), cioè $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}\, e^{z_2}$ traduce il fatto che si tratta di un omomordfismo (riveda l'approfondimento a pag. 139). La funzione esponenziale in campo complesso è periodica, dunque non inettiva: non si tratta di un isomorfismo.

7.5-2 Nel piano cartesiano in cui le variabili si chiamano u e v, le equazioni parametriche

$$u = \cos y_0 \cdot e^x, \quad v = \sin y_0 \cdot e^x,$$

descrivono la semiretta uscente dall'origine, individuata dal vettore unitario (= versore) $(\cos y_0, \sin y_0$. Si osservi che, essendo $e^x > 0$, l'origine non apprtiena alla semiretta.

Analogamente le equazioni parametriche

$$u = e^{x_0} \cdot \cos y, \quad v = e^{x_0} \cdot \sin y$$

descrivono la circonferenza di centro l'origine e raggio e^{x_0}. Tale circonferenza viene descritta infinite volte: una volta per ogni intervallo di lunghezza 2π descritto dal parametro reale y.

7.5-3 Derivando rispetto a t la parte reale e la parte immaginaria della funzione $t \mapsto e^{st}$ si ottiene

$$D(e^{\sigma t} \cos \omega t) = \sigma e^{\sigma t} \cos \omega t - \omega \sigma e^{\sigma t} \sin \omega t,$$

e rispettivamente

$$D(e^{\sigma t} \sin \omega t) = \sigma e^{\sigma t} \sin \omega t + \omega \sigma e^{\sigma t} \cos \omega t.$$

Calcolando la somma della prima derivata con la seconda moltiplicata per i si ottiene

$$\begin{aligned}(\sigma + i\omega)\, e^{\sigma t} \cos \omega t + (i\sigma - \omega)\, e^{\sigma t} \sin \omega t &= (\sigma + i\omega)\, e^{\sigma t} \cos \omega t + i(\sigma + i\omega)\, e^{\sigma t} \sin \omega t = \\ &= (\sigma + i\omega)\, e^{\sigma t}\, (\cos \omega t + i \sin \omega t) = \\ &= s e^{st}.\end{aligned}$$

7.5-4 Dal problema precedente si deduce che

$$|e^{-st}| = e^{-\sigma t}.$$

Ne segue quanto enunciato.

7.6 Approssimazione degli zeri di una funzione

7.6-1 La funzione $\Phi(x) := e^{-x}$ è strettamente decrescente, tende a $+\infty$ per $x \to -\infty$, tende a 0 per $x \to +\infty$. Essa ammette pertanto uno ed un solo punto fisso. Si ha $\Phi(0) = 1$, $\Phi(1) = 1/e > 0$, dunque l'intervallo $[0, 1]$ contiene il proprio trasformato. Si ha poi $\Phi'(x) = -e^{-x}$, e il massimo di $|\Phi'(x)|$ è 1, valore raggiunto per $x = 0$. Non è dunque soddisfatta la condizione

$$|\Phi'(x)| \leq K < 1$$

sull'intervallo considerato.

Basta però aumentare un poco l'estremo sinistro, per ottenere un intervallo in cui la condizione scritta è verificata. Scegliamo infatti un numero a con $0 < a < 1/e$; allora l'intervallo $[a, 1]$ ha come immagine tramite Φ l'intervallo $[1/e, 1/e^a]$, contenuto nel precedente, ed inoltre si ha

$$|\Phi'(x)| \leq e^{-a} =: K < 1,\ \forall x \in [a, 1].$$

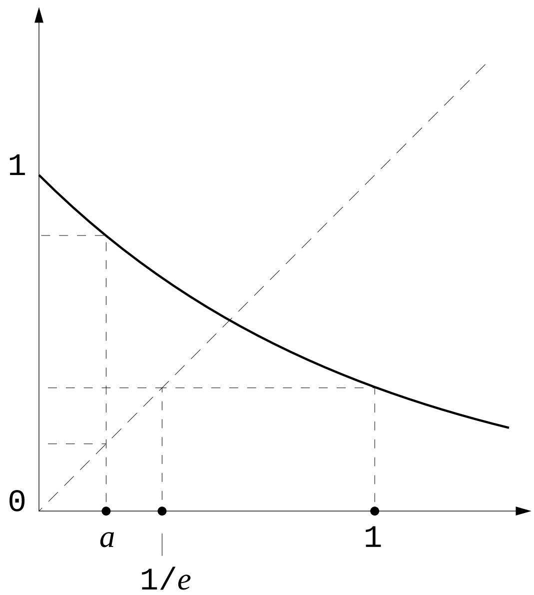

Figura 7.1

7.6-2 Per la funzione $f(x) := \tan x - x$ si ha $f(0) = 0$, $f'(x) = 1 + \tan^2 x - 1 = \tan^2 x > 0$, e

$$\lim_{x \to \pi/2^-} f(x) = +\infty.$$

Dunque l'immagine tramite f dell'intervallo $[0, \pi/2[$ è l'intervallo $[0, +\infty[$, ed ogni elemento > 0 di quest'ultimo intervallo è un valore assunto da f in un ben determinato punto dell'intervallo $]0, \pi/2[$. Per localizzare il punto in questione, dunque la soluzione dell'equazione $f(x) = a$, possiamo considerare il punto medio dell'intervallo $[0, \pi/2[$, poi il punto medio del sottointervallo di destra, e così via. In modo formale: sia

$$x_0 := 0, \quad x_1 := \frac{\pi}{4}, \quad x_2 := \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8}, \quad \ldots;$$

in generale

$$x_n := \frac{\pi}{4}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}\right), \; n \geq 1.$$

Come si vede, entro parentesi compare la somma parziale $(n-1)$-esima della serie geometrica di primo elemento 1 e ragione $1/2$. La successione (x_n) parte da 0 e tende crescendo a $\pi/2$. La successione dei valori assunti da f nei punti x_n, cioè $f(x_n)$, è una successione strettamente crescente e positivamente divergente, che parte dal valore 0. Esiste dunque un minimo valore di n per cui $f(x_n) \geq a$; la soluzione della nostra equazione può essere trovata con il metodo di bisezione, nell'intervallo $[x_{n-1}, x_n]$.

Per ricondursi ad un problema di punto fisso, si può scrivere l'equazione nella forma $x = \tan x - a$. Per la funzione $\Phi(x) := \tan x - a$ si ha però $\Phi'(x) = 1 + \tan^2 x \geq 1$, dunque il metodo delle approssimazioni successive non è applicabile.

7.6-3. Il polinomio $p(x) = x^5 + x - 1$ ammette almeno uno zero reale, in quanto polinomio di grado dispari (si riveda il problema 3.8-4); tale zero è unico in quanto si tratta di una funzione strettamente crescente: $p'(x) = 5x^4 + 1 > 0$. Si ha poi $p(0) = -1$, $p(1) = 1$, dunque lo zero è localizzato nell'intervallo $[0, 1]$, e può essere approssimato con il metodo di bisezione. E' applicabile anche il metodo di Newton, a partire dal punto iniziale $x_0 = 1$; infatti, come subito si verifica, $p(1)\, p''(1) = 1 \cdot 20 = 20 > 0$.

7.4-4 Le soluzioni dell'equazione proposta sono

$$\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Lo schema iterativo generato dell'equazione

$$x = x^2 - 1 =: \Phi(x),$$

non converge in quanto $\Phi'(x) = 2x$, e in un intorno di

$$\xi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.61$$

i valori di $\Phi'(x)$ sono maggiori di 1. Basta che il raggio dell'intorno in questione sia inferiore a 0.6.

Lo schema iterativo generato dell'equazione

$$x = 1 + \frac{1}{x} =: \Phi(x),$$

converge, in quanto

$$\Phi'(x) = -\frac{1}{x^2},$$

e si ha

$$x > 1 + d \Rightarrow |\Phi'(x)| < \frac{1}{(1 + d)^2} =: K < 1.$$

Basta dunque innescare il metodo delle approssimazioni successive a partire da un valore maggiore di 1 e “abbastanza prossimo” a ξ.

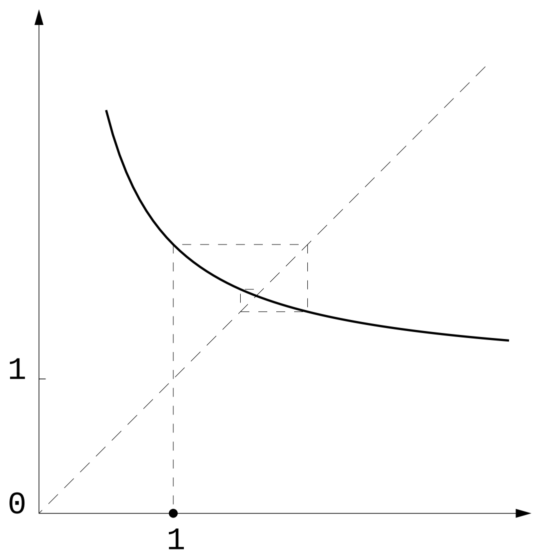

Figura 7.2

Peraltro anche a partire dal valore $x_0 = 1$ si ottiene una successione convergente a ξ: è esattamente il caso studiato nel problema 3.4-3. Si riveda anche l'esempio 3.2-3 a pagina 192. La situazione è mostrata nella figura 7.2.

7.6-5 Dai grafici delle funzioni $x \mapsto e^x$ e $x \mapsto |\sin x|$ si vede che essi si intersecano in un'infinità numerabile di punti con ascisse negative; il punto a cui corrisponde il minimo modulo appartiene all'intervallo $[-\pi, 0]$.

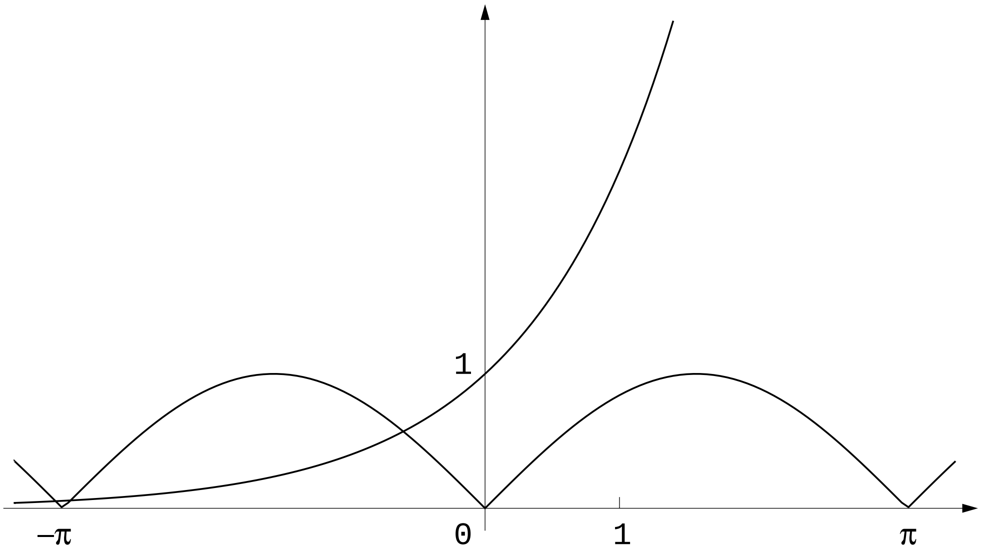

Figura 7.3

Scritta l'equazione nella forma

$$f(x) := e^x - |\sin x| = 0,$$

nell'intervallo individuato, essendo la funzione seno ≤ 0, essa si scrive

$$f(x) := e^x + \sin x = 0.$$

Si ha poi

$$f(0) = 1, \quad f(-\pi/2) = \frac{1}{e^{\pi/2}} - 1 < 0,$$

dunque la radice cercata appartiene all'intervallo $[-\pi/2, 0]$. Il metodo di Newton può essere innescato a partire dal valore iniziale $x_0 = 0$, in quanto $f''(x) = e^x - \sin x$, da cui $f(0)\, f''(0) = 1 > 0$.

Alcuni risultati numerici ottenuti con il programma descritto nell'unità 7.6-3 (pag. 551) della terza parte (*Materiali per il Laboratorio di Matematica*):

n	x_n
0	0
1	-0.5
2	$-0.585\,644$
3	$-0.588\,529$
4	$-0.588\,533$
5	$-0.588\,533$

7.6-6 Si ha $f'(x) = 2x$, quindi lo schema iterativo

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2}{2x_n} = \frac{x_n}{2}.$$

7.7 Equazioni differenziali

7.7-1 Da $y(x) = cx^2$, segue

$$y'(x) = 2cx = \frac{2cx^2}{x} = \frac{2y(x)}{x}.$$

7.7-2 Si tratta di un'equazione del tipo $y'(x)+a(x)y(x) = 0$, con $a(x) = -x$. Utilizzando la formula (5) del testo si ottiene

$$A(x) = \exp\left(\int_0^x -t\,\mathrm{d}t\right) = e^{-x^2/2},$$

e quindi (v. formula (6))

$$y(x) = \frac{c}{e^{-x^2/2}} = ce^{x^2/2}.$$

Per la verifica basta osservare che $y'(x) = cxe^{x^2/2} = xy(x)$. Si ha $y(0) = 1$ per $c = 1$.

7.7-3 Risolviamo la prima equazione. Si ha

$$A(x) = \exp\left(\int_0^x 2\,\mathrm{d}t\right) = e^{2x},$$

e successivamente

$$\int_0^x e^t\,e^{2t}\,\mathrm{d}t = \int_0^x e^{3t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\,(e^{3x} - 1).$$

L'integrale indefinito della funzione $x \mapsto e^{3x}$ è dunque $(1/3)\,e^{3x} + c$, e pertanto (v. formula (6)) si ha la soluzione

$$y(x) = \frac{1}{3}\,e^x + ce^{-2x}.$$

Suggeriamo di effettuare una verifica della correttezza della soluzione ottenuta.
Per la seconda equazione si ha analogamente

$$A(x) = \exp\left(\int_0^x -1\,\mathrm{d}t\right) = e^{-x},$$

e successivamente

$$\int_0^x e^t\, e^{-t}\,\mathrm{d}t = x.$$

Ne segue la soluzione

$$y(x) = \frac{x+c}{e^{-x}} = xe^x + ce^x.$$

7.7-4 Si ha

$$A(x) = \exp\left(\int_0^x 2t\,\mathrm{d}t\right) = e^{x^2},$$

e successivamente

$$\int_0^x te^{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[e^{t^2}\right]_0^x = \frac{1}{2}(e^{x^2}-1).$$

Si ha dunque la soluzione generale

$$y(x) = \frac{1}{e^{x^2}}\,\frac{1}{2}\left(e^{x^2}+c\right) = ce^{-x^2} + \frac{1}{2}.$$

La soluzione che vale 1 per $x = 0$ si ottiene per $c = 1/2$, la soluzione che vale $1/2$ per $x = 0$ si ottiene per $c = 0$. Si tratta dunque della funzione costante $y(x) = 1/2$.

7.7-5 Si ha

$$A(x) = \exp\left(\int_0^x -1\,\mathrm{d}t\right) = e^{-x},$$

e successivamente

$$-\int_0^x te^{-t}\,\mathrm{d}t = \left[te^{-t}\right]_0^x - \int_0^x e^{-t}\,\mathrm{d}t = xe^{-x} + e^{-x} - 1.$$

Dunque

$$y(x) = \frac{xe^{-x}+e^{-x}+c}{e^{-x}} = x + 1 + ce^x.$$

La soluzione che vale 2 per $x = 0$ si ottiene per $c = 1$, dunque è $y(x) = x + 1 + e^x$.

7.7-6 Se $\Delta = 0$ l'equazione caratteristica ammette l'unica soluzione $\lambda_0 = -a/2$. Posto

$$y_1(x) := e^{\lambda_0 x}, \quad y_2(x) := xe^{\lambda_0 x} = xy_1(x),$$

si trova

$$y_2'(x) = y_1(x) + xy_1'(x), \quad y_2''(x) = 2y_1'(x) + xy_1''(x).$$

Sostituendo nell'equazione differenziale si ottiene

$$\begin{aligned} y_2'' + ay_2' + by_2 &= 2y_1' + xy_1'' + axy_1' + ay_1 + bxy_1 = \\ &= x\,(y_1'' + ay_1' + by_1) + 2y_1' + ay_1 = \\ &= 2\lambda_0\, e^{\lambda_0 x} + ae^{\lambda_0 x} = (2\lambda_0 + a)e^{\lambda_0 x} = 0. \end{aligned}$$

Abiamo sfruttato il fatto che y_1 è soluzione dell'equazione differenziale e l'uguaglianza $2\lambda_0 + a = 0$.

7.7-7 Abbiamo

$$\begin{aligned} y_1' &= \alpha e^{\alpha x}\cos\beta - \beta e^{\alpha x}\,\sin\,\beta x = \alpha y_1 - \beta y_2, \\ y_2' &= \alpha e^{\alpha x}\,\sin\,\beta + \beta e^{\alpha x}\cos\beta x = \alpha y_2 + \beta y_1; \end{aligned}$$

un'ulteriore derivazione fornisce

$$y_1'' = \alpha y_1' - \beta y_2' = \alpha^2 y_1 - \alpha\beta y_2 - \alpha\beta y_2 - \beta^2 y_1 = (\alpha^2 - \beta^2)y_1 - 2\alpha\beta y_2.$$

Sostituendo nell'equazione differenziale si ottiene

$$\begin{aligned} y_1'' + ay_1' + by_1 &= (\alpha^2 - \beta^2)y_1 - 2\alpha\beta y_2 + a\alpha y_1 - a\beta y_2 + by_1 = \\ &= (\alpha^2 - \beta^2 + a\alpha + b)y_1 - (2\alpha\beta + a\beta)y_2 = 0. \end{aligned}$$

Si è tenuto conto delle due uguaglianze

$$\alpha^2 - \beta^2 + a\alpha + b = 0, \quad 2\alpha\beta + a\beta = 0.$$

7.7-8 L'equazione caratteristica è $\lambda^2 = 0$, che ammette la radice doppia $\lambda = 0$. Si hanno dunque le due soluzioni particolari $y_1(x) := e^{0\cdot x} = 1$, $y_2(x) := xy_1(x) = x$.

7.7-9 L'equazione caratteristica $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$ ammette le soluzioni $\lambda = -1 \pm 2i$. Si hanno dunque le soluzioni particolari

$$y_1(x) := e^{-x}\cos 2x, \quad y_2(x) := e^{-x}\,\sin\,2x,$$

da cui la soluzione generale

$$y(x) = c_1 e^{-x}\cos 2x + c_2 e^{-x}\,\sin\,2x.$$

Le condizioni iniziali conducono alle uguaglianze $c_1 = 1$, $-c_1 + 2c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 1/2$. In definitiva la soluzione cercata è

$$y(x) = e^{-x}\cos 2x + \frac{1}{2}\,e^{-x}\,\sin\,2x.$$

7.7-10 Posto $y(x) := ax^2 + bx + c$, si ha $y'(x) = 2ax + b$, $y''(x) = 2a$. Sostituendo nell'equazione differenziale si ottiene l'uguaglianza

$$-ax^2 + (6a - b)x + 2a + 3b - c = x^2 - 1,$$

da cui, in base al principio di identità dei polinomi, il sistema

$$\begin{cases} -a = 1 \\ 6a - b = 0 \\ 2a + 3b - c = -1 \end{cases}$$

Si trova subito $a = -1, b = -6, c = -19$, dunque la soluzione cercata è $y(x) = -x^2 - 6x - 19$.

7.7-11 L'equazione caratteristica $\lambda^2 - 9 = 0$ ammette le due soluzioni $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -3$. Dunque la costante -3 che compare nell'esponenziale a secondo membro coincide con una delle soluzioni dell' equazione caratteristica, ma è diversa dall'altra. Seguendo l'esempio 7.7-14 cerchiamo una soluzione del tipo $y(x) = cxe^{-3x}$. Si ha

$$y'(x) = c(e^{-3x} - 3xe^{-3x}), \quad y''(x) = c(-6e^{-3x} + 9xe^{-3x}).$$

Sostituendo nell'equazione differenziale si trova

$$c(-6e^{-3x} + 9xe^{-3x} - 9xe^{-3x}) = -6ce^{-3x} = e^{-3x},$$

da cui $c = -1/6$.

7.7-12 Da $y(x) = Ax\cos x + Bx \sin x$, segue

$$y'(x) = A\cos x + B \sin x - Ax \sin x + Bx\cos x,$$

$$y''(x) = -2A \sin x + 2B\cos x - Ax\cos x - Bx \sin x.$$

Sostituendo nell'equazione differenziale si ottiene

$$y''(x) + y(x) = -2A \sin x + 2B\cos x = \cos x - \sin x,$$

da cui $A = B = 1/2$.