Dalle progressioni geometriche alla funzione esponenziale

GIULIO C. BAROZZI

CIRAM-Università di Bologna

barozzi@ciram.unibo.it
`http://eulero.ing.unibo.it/~barozzi`

Software richiesti: Acrobat Reader, QuickTime Player

All'inizio della nostra esperienza umana e scolastica c'è la successione dei numeri naturali. Come disse Leopold Kronecker (1823-1891):

Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, ...

La successione dei numeri naturali fornisce il più semplice esempio di *progressione aritmetica*, cioè una successione in cui ciascun termine si ottiene dal precedente sommando una quantità costante.

Le progressioni aritmetiche non sono molto interessanti; lo sono molto di più le *progressioni geometriche*, in cui ogni termine si ottiene dal precedente moltiplicando per una costante. Naturalmente occorre fissare un termine iniziale; se questo termine iniziale è 1, si ottiene quella che alcuni Autori chiamano una *successione esponenziale*: se la *ragione* (il termine costante a cui alludevamo poco fa) viene indicato con la lettera a, abbiamo la successione

$$n \mapsto a^n,$$

e non c'è ragione per limitarsi a considerare esponenti n naturali: possiamo tranquillamente supporre che n sia intero, cioè $n \in \mathbb{Z}$.

La figura seguente (fortemente dimetrica, cioè con unità di misura sui due assi molto diverse tra loro) mostra alcuni termini della successione esponenziale di base $a = 1.2$.

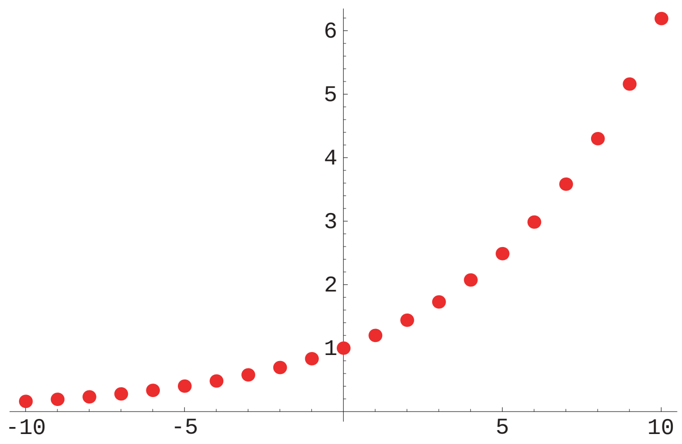

Figura 1.

Immaginiamo di congiungere ciascun punto col successivo: la pendenza di ciascun tratto congiungente un punto col successivo è:

$$a^n - a^{n-1}.$$

Immaginiamo di prolungare la congiungente il punto di ascissa n con quello di ascissa $n-1$, fino ad incontrare l'asse delle ascisse. Si viene a disegnare in triangolo rettangolo di cui conosciamo la pendenza dell'ipotenusa e la lunghezza del cateto verticale.

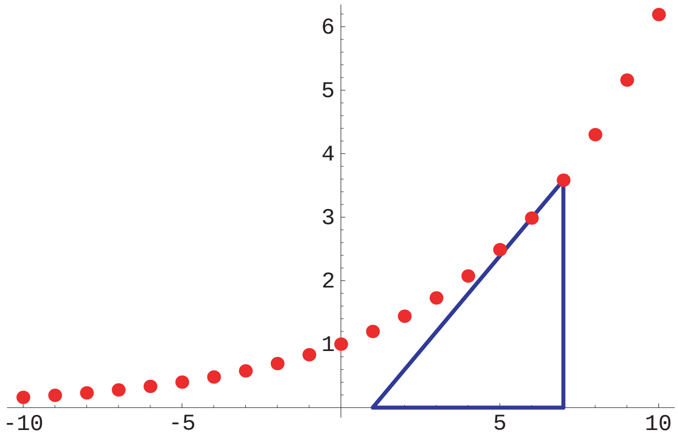

Figura 2.

Si ha:

$$\text{pendenza ipotenusa} = \frac{\text{cateto verticale}}{\text{cateto orizzontale}}$$

quindi:

$$\text{cateto orizzontale} = \frac{\text{cateto verticale}}{\text{pendenza ipotenusa}}.$$

Facciamo il calcolo:

$$\text{cateto orizzontale} = \frac{a^n}{a^n - a^{n-1}} = \frac{a}{a-1}.$$

Conclusione: le lunghezze dei cateti orizzontali sono tra loro uguali. Possiamo evidenziare tutto ciò mediante un'animazione.

Animazione 1. [Per chiudere la finestra del filmato, premere il tasto ESCAPE]

Naturalmente, il risultato appena ottenuto è del tutto indipendente dalla particolare scelta della base a; esso è semplicemente legato al fatto che abbiamo una successione di punti in cui le ascisse sono in progressione aritmetica e le ordinate in progressione geometrica.

Possiamo infittire i punti, scegliendo come passo per l'incremento delle ascisse $1/2$ in luogo di 1, poi $1/4$, ecc.

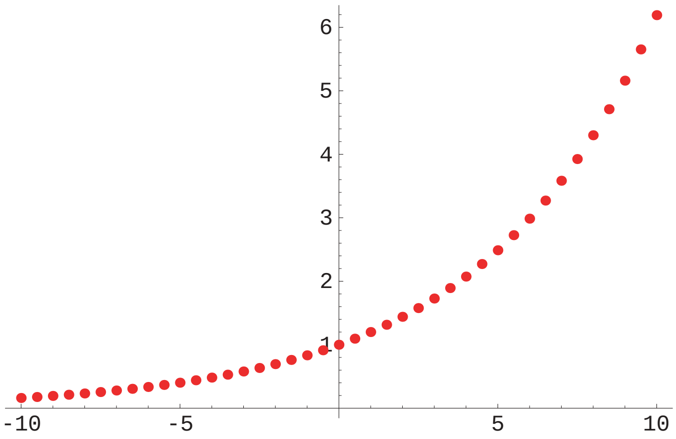

Figura 3.

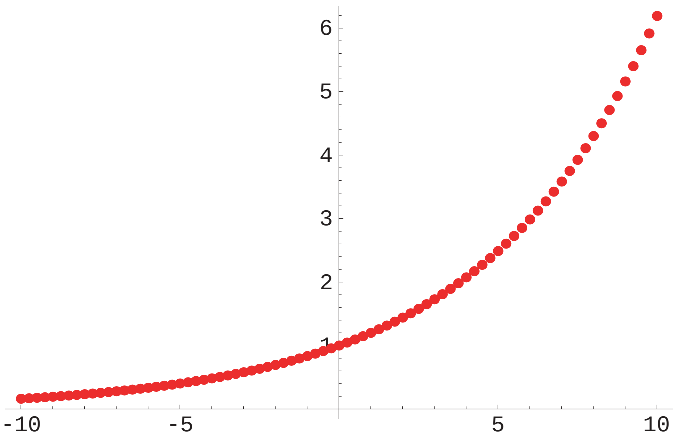

Figura 4.

Chiaramente, da un punto di vista grafico, quando il passo è abbastanza piccolo i punti sullo schermo costituiscono una curva continua (punto è ciò che non ha parti, ci ha insegnato Euclide, ma sullo schermo vengono mostrati dei pixel ...); si tratta della curva esponenziale $x \mapsto a^x$.

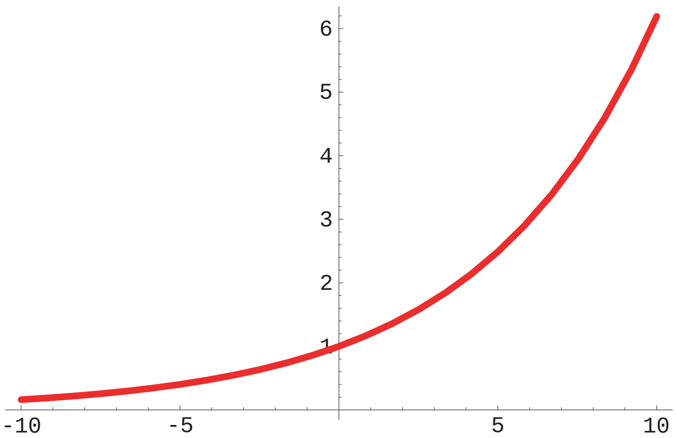

Figura 5.

Al posto della secante, congiungente due punti contigui, abbiamo la tangente alla curva stessa: se tracciamo un tratto di tangente fino ad incontrare l'asse delle ascisse, avremo che la *sottotangente* (il tratto compreso tra il punto d'intersezione e la perpendicolare abbassata dal punto di tangenza) è costante.

Animazione 2.

Nell'animazione precedente abbiamo utilizzato la base $a = 2$ e abbiamo ottenuto sottotangenti maggiori di 1. Utilizziamo la base $a = 3$; questa volta abbiamo sottotangenti minori di 1.

Animazione 3.

Evidentemente, quanto più grande è la base, tanto più piccola è la sottotangente e viceversa. Poiché abbiamo trovato due basi a cui corrispondento sottotangenti rispettivamente minori e maggiori di 1, è ragionevole pensare che esista una base privilegiata (compresa tra 2 e 3), a cui corrispondono sottotangenti uguali a 1.

Il seguito di questa esposizione è volto a trovare un modo ragionato per individuare tale base. Perché ci interessa questa base? Risposta: perché la funzione esponenziale, scritta in tale base, avrà come derivata se stessa, e non (più in generale) se stessa moltiplicata per una costante (dipendente dalla base).

In generale, la costante di proporzionalità tra la derivata di una funzione esponenziale e la funzione esponenziale stessa è la derivata calcolata nell'origine. Per convincersene basta ricordare la definizione di derivata:

$$\begin{aligned} Da^x &= \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \\ &= a^x \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} = \\ &= a^x \, Da^x\Big|_{x=0}. \end{aligned}$$

D'altra parte, dato che nell'origine la funzione esponenziale vale 1, la derivata calcolata nell'origine ha come valore il reciproco della sottotangente. Se ne conclude che

$$\text{derivata nell'origine } = 1 \quad\Longleftrightarrow\quad \text{sottotangenti } = 1.$$

Andiamo a caccia della base privilegiata. La base di una qualunque funzione esponenziale si ottiene come valore della funzione per $x = 1$. Costruiamo una spezzata che approssimi la funzione esponenziale con base privilegiata, costruendo una sequenza di punti che abbia:

1) le ascisse in progressione aritmetica comprese tra 0 a 1;
2) le ordinate in progressione geometrica, in modo che le sottotangenti valgano 1.

Dividiamo l'intervallo $[0, 1]$ in n parti uguali: l'ordinata finale (quella del punto di ascissa 1) fornirà una stima della base privilegiata.

Animazione 4.

Quanto vale l'ordinata finale, cioè l'ordinata del punto di ascissa 1? Trattandosi di una progressione geometrica di primo elemento 1 essa vale r^n dove r è la ragione della progressione. Ma tale ragione si ottiene come rapporto tra le ordinate dei primi due punti della spezzata, che sono rispettivamente 1 e $1 + 1/n$ (il primo segmento della spezzata ha pendenza unitaria): dunque la ragione vale $1 + 1/n$, e dopo n passi ottengo il valore

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n .$$

La base privilegiata, indicata con la lettera e, è il limite dell'espressione ottenuta, per n che tende all'infinito. La costruzione geometrica rende anche intuitivamente ragione del fatto che la successione $n \mapsto (1 + 1/n)^n$ è crescente, dunque il numero e è l'estremo superiore, oltre che il limite, della successione stessa.

La denominazione di *numero di Nepero* (John Napier, 1550-1617, l'inventore dei logaritmi) non ha fondamento storico, mentre è più appropriata la denominazione alternativa *numero di Eulero*, comune nei testi angolosassoni.

Sul problema delle sottotangenti si legga quanto ha scritto M. Barlotti, sul numero 2/2002 della rivista Archimede (pp. 82-84). Notevole anche una conferenza tenuta nel 2000 da Tom Apostol, in cui si mostra un diverso utilizzo della nozione di sottotangente:

`http://www.cco.caltech.edu/~mamikon/VisualCalc.html`

C'è un altro modo per giungere alla successione $n \mapsto (1 + 1/n)^n$. Consideriamo una funzione esponenziale $x \mapsto a^x$ e chiediamoci quale valore debba avere la base a affinché la pendenza media (= rapporto incrementale) su un assegnato intervallo $[0, h]$ sia uguale a 1. Tale base dipenderà ovviamente dalla scelta di h.

Basta un semplice calcolo:

$$\frac{a^h - 1}{h} = 1$$

implica

$$a = (1 + h)^{1/h}$$

Per $h = 1/n$, con $n = 1, 2, \ldots$, si ottiene nuovamente il valore

$$a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n .$$

Si osservi che a^x vale a per $x = 1$; quindi, una volta tracciata la curva esponenziale, il valore della base può essere visualizzato come l'ordinata del punto d'intersezione della curva con la retta di equazione $x = 1$. Tracciamo i grafici delle funzioni esponenziali per alcuni valori delle basi a_n.

Animazione 5.

Se indichiamo con e il limite (che è anche l'estremo superiore) della successione a_n, possiamo congetturare che per la funzione esponenziale di base e la sottotangente valga 1 e dunque tale funzione abbia come derivata se stessa.

In buona sostanza abbiamo costruito una successione di approssimazioni del numero e interpolando mediante una funzione esponenziale, nei punti di ascissa 0 e h, una funzione che valga 1 nell'origine, assieme alla sua derivata.

La base di tale funzione esponenziale dipende da h, e si può ottenere una successione convergente ad e facendo assumere ad h una successione di valori tendente a 0. La più semplice di tali funzioni è $f(x) = 1 + x$, che è quella che abbiamo utilizzato.

Mentre per la funzione esponenziale si ha $\exp'(x) = \exp(x)$, per la funzione f appena considerata si ha $f'(x) = 1 < f(x)$, per gli x dell'intervallo $(0, 1)$; dunque, poiché tale funzione vale 1 nell'origine come la funzione esponenziale, essa deve essere una funzione minorante dell'esponenziale.

È molto facile trovare una funzione g per cui si abbia $g(0) = g'(0) = 1$, ma $g'(x) \geq g(x)$ per gli x dell'intervallo $(0, 1)$. Una tale funzione è, ad esempio, $g(x) = 1/(1 - x)$. Se imponiamo ad una funzione esponenziale $x \mapsto b^x$ di interpolare la g nei punti 0 e h abbiamo la condizione

$$b^h = \frac{1}{1-h},$$

da cui

$$b = \left(\frac{1}{1-h}\right)^{1/h}.$$

Per $h = 1/(n + 1)$, con $n = 1, 2, \ldots$ (il valore $h = 1$ non è ammissibile), si ottiene il valore

$$b_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Questa volta si deve trattare di una stima per eccesso del numero e, e verosimilmente una tale stima decresce al crescere di n. L'esame grafico conferma tali ipotesi.

Animazione 6.

A questo punto potremmo ritenerci soddisfatti: abbiamo ottenuto due successione convergenti al numero e, la prima crescente, la seconda decrescente. La successione degli intervalli $[a_n, b_n]$ è una "scatola cinese" che individua il numero e. Possiamo confermare il tutto mediante diagrammi a barre.

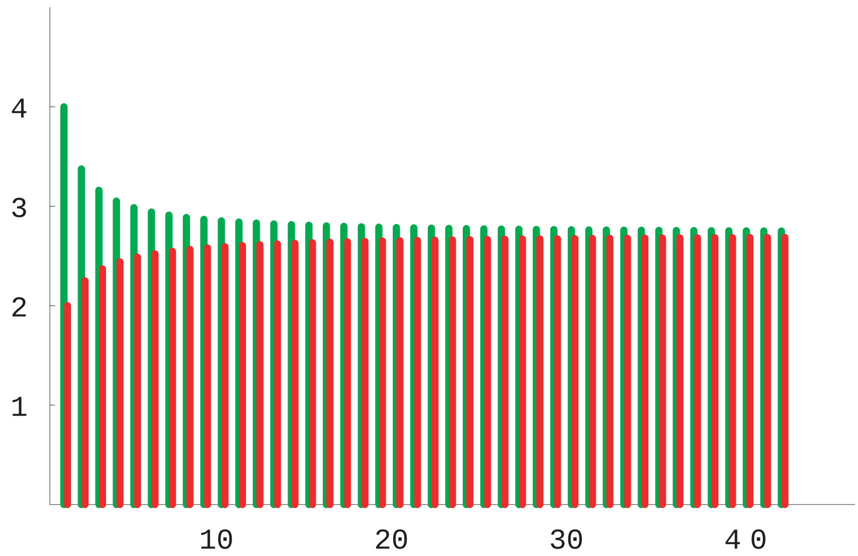

Figura 6.

In realtà la convergenza delle due successioni considerate al limite e è molto lenta; sappiamo dall'Analisi (ed è ancora Eulero che ce lo insegna) che una convergenza assai più veloce si ottiene considerando la somma parziale n-esima della serie esponenziale:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots .$$

Ecco il grafico a barre.

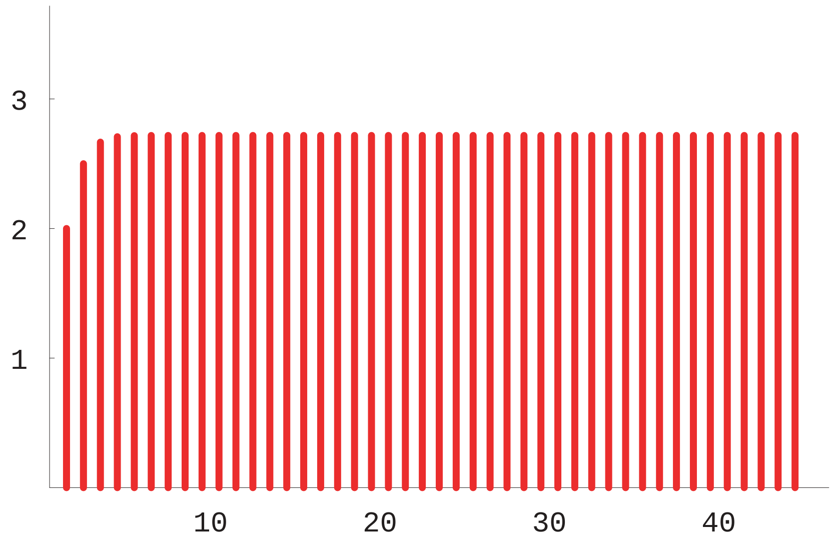

Figura 7.

La formula precedente è un caso particolare dello sviluppo in serie

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots .$$

valido per ogni x reale. Dalla serie a secondo membro, scrivendo un numero immaginario puro, diciamo iy, al posto di x si ottiene il suggerimento giusto per definire la funzione esponenziale con esponenti complessi.

Ma questa è una storia che racconteremo un'altra volta.

[Revisione: luglio 2002]