

**Consorzio Nettuno**  
**Corso di Matematica 1**  
**Indice delle lezioni**

a cura di

**Giulio C. Barozzi**

Testo di riferimento:

G.C. Barozzi: *Primo Corso di Analisi Matematica*, Zanichelli (Bologna), 1998, codice ISBN: 88-08-01169-0.

Reperibile nel catalogo universitario della Zanichelli (Via Irnerio 34, 40126 Bologna, tel. 051/293111, FAX 051/249782 - 293224).

---

**Modulo 1: Numeri (lezioni 1–7)**

1. Numeri naturali
  - Assiomi di Peano. Principio di induzione. Definizioni e dimostrazioni per induzione.
2. Calcolo combinatorio
  - Disposizioni semplici e con ripetizioni. Permutazioni; fattoriale. Combinazioni semplici. La formula del binomio.
3. Dai numeri naturali ai numeri interi
  - Operazioni e relazione di ordine in  $\mathbf{N}$ . La costruzione di  $\mathbf{Z}$ : operazioni e relazione di ordine in  $\mathbf{Z}$ . Valore assoluto. Il problema della misura dei segmenti: le frazioni.
4. Dai numeri interi ai numeri razionali
  - La costruzione di  $\mathbf{Q}$ : operazioni e relazione d'ordine in  $\mathbf{Q}$ . Struttura di campo di  $\mathbf{Q}$ . Insiemi limitati e illimitati. Minoranti e maggioranti. Massimo e minimo, estremo inferiore ed estremo superiore. Densità dei numeri razionali. Non completezza dell'insieme dei razionali.
5. La rappresentazione decimale
  - Ancora sulla non completezza dell'insieme dei razionali. I numeri razionali ammettono rappresentazioni decimali periodiche. I numeri irrazionali come allineamenti decimali non periodici. Numeri reali come allineamenti decimali, periodici o non periodici.
6. Il campo dei numeri reali
  - Confronto tra reali: il valore assoluto. Le operazioni tra reali. Completezza del campo  $\mathbf{R}$  dei numeri reali. Insiemi separati e insiemi contigui di numeri reali; elemento di separazione.  $\pi$  come elemento di separazione tra due insiemi contigui.
7. Disuguaglianze
  - La disuguaglianza triangolare. La disuguaglianza tra media geometrica e media aritmetica. La disuguaglianza di Bernoulli.

## Modulo 2: Limiti e continuità (lezioni 8–16)

8. Funzioni e successioni reali
  - Funzioni numeriche reali; dominio, codominio e immagine. Intervalli sulla retta reale; loro caratterizzazione. Il caso delle successioni. Progressioni aritmetiche e geometriche. Un primo approccio intuitivo alla nozione di limite
9. Limite di successioni (parte I)
  - Nozione di limite. La successione  $\sqrt[n]{a}$ . La definizione di limite. Limite delle successioni monotone. La successione  $\sqrt[n]{n}$ . Successioni divergenti positivamente e negativamente. La successione  $a^n$ .
10. Limite di successioni (parte II)
  - La successione  $F_{n+1}/F_n$ , con  $F_n$  numeri di Fibonacci. La successione  $(1 + 1/n)^n$ ; il numero  $e$ .
11. Limite di funzioni
  - Intorno di un punto. Punto di accumulazione. L'esempio di un rapporto incrementale. Definizione di limite e sua unicità. Continuità in un punto. Legame tra limite e continuità.
12. Estensione della nozione di limite
  - Esempi di funzioni continue e discontinue. Funzioni divergenti (positivamente o negativamente). Ulteriori estensioni della nozione di limite: limite a  $+\infty$  e  $-\infty$ ; limite a destra e limite a sinistra.
13. Teoremi sui limiti (parte I)
  - Limite della somma, del prodotto e del quoziente di due funzioni. Permanenza del segno. Limite di  $1/f(x)$ , con  $f$  infinitesima oppure infinita.
14. Teoremi sui limiti (parte II)
  - Composizione di funzioni continue. Confronto con una funzione costante. Il teorema dei due carabinieri. Applicazione allo studio della continuità di alcune funzioni elementari.
15. Teoremi sui limiti (parte III)
  - Il limite di  $(1 + 1/x)^x$  per  $x \rightarrow \pm\infty$ . Il limite di  $(\sin x)/x$  per  $x \rightarrow 0$ . Limiti delle funzioni monotone. Limiti di alcune funzioni elementari negli estremi dei rispettivi domini. Limitatezza delle funzioni continue su intervalli limitati e chiusi.
16. Proprietà delle funzioni continue su un intervallo
  - Il teorema di Weierstrass. Il teorema dei valori intermedi. Immagine di un intervallo ad opera di una funzione continua. Continuità dell'inversa di una funzione continua e monotona su un intervallo. Funzioni inverse di alcune funzioni elementari.

## Modulo 3: Calcolo differenziale (lezioni 17–25)

17. Il concetto di derivata
  - Il rapporto incrementale. La derivata come limite del rapporto incrementale. Derivata di  $x^n$ . Derivabilità e continuità. Derivata a destra, derivata a sinistra. Funzioni non derivabili. Derivata delle funzioni circolari, esponenziali, logaritmiche.
18. Teoremi sulle derivate
  - Derivate successive. Derivata della somma, del prodotto, del quoziente di funzioni derivabili.

- 19.** Derivazione delle funzioni composte
- Derivata di una funzione composta. Derivata della funzione inversa. Punti critici. Condizioni necessarie per un punto di minimo (o di massimo) relativo.
- 20.** Massimi e minimi
- Alcuni problemi di massimo e di minimo. La legge di rifrazione. La retta dei minimi quadrati
- 21.** Il teorema del valor medio
- Il teorema di Rolle; il teorema di Lagrange; il teorema di Cauchy.
- 22.** I teoremi di L'Hospital
- Forme indeterminate. Condizioni sufficienti per l'esistenza del limite di una forma indeterminata. Casi di inefficacia delle regole di l'Hospital. Condizioni sufficienti per un punto di minimo (o di massimo) relativo.
- 23.** Concavità e convessità
- Insiemi convessi nel piano. Funzioni concave e convesse. Condizione sufficiente per la convessità (concavità) di una funzione. Punto di flesso.
- 24.** Grafici di funzioni (parte I)
- Studio di alcune funzioni. Asintoti orizzontali e verticali.
- 25.** Grafici di funzioni (parte II)
- Studio di alcune funzioni. Asintoti obliqui.

#### **Modulo 4: Calcolo integrale (lezioni 26–32)**

- 26.** Definizione di integrale
- Area del trapezoide. Somme inferiori e superiori. Integrale di una funzione non negativa. Parte positiva e parte negativa di una funzione. L'integrale per una funzione di segno qualunque.
- 27.** Il teorema fondamentale del calcolo
- Primitive. Additività dell'integrale rispetto l'intervallo d'integrazione. Funzione integrale; il teorema fondamentale. Calcolo degli integrali mediante primitive.
- 28.** Proprietà dell'integrale
- Linearità e monotonia dell'integrale. Media integrale.
- 29.** Integrazione per parti e per sostituzione
- Trasformazione dell'integrale del prodotto di due funzioni. Primitive di  $\log x$ ; primitive di  $\sin^2 x$  e  $\cos^2 x$ . Cambiamento di variabile d'integrazione: calcolo di integrali mediante sostituzione.
- 30.** Estensione della nozione di integrale
- L'integrale come elemento di separazione tra gli insiemi delle somme inferiori e superiori. Condizione di integrabilità. Integrabilità delle funzioni monotone e delle funzioni continue.
- 31.** Applicazioni del calcolo integrale (parte I)
- L'integrale come limite di somme di Riemann. Calcolo dei volumi: il metodo delle sezioni parallele: applicazione al calcolo dei volumi di solidi di rotazione. Il volume del cono e della sfera. Il metodo delle sezioni cilindriche: il volume del toro.

- 32.** Applicazioni del calcolo integrale (parte II)
- Costruzione del logaritmo mediante l'integrale. Integrazione numerica: il metodo dei rettangoli, il metodo dei trapezi, il metodo del punto medio (metodo delle tangenti), il metodo di Cavalieri-Simpson.

### **Modulo 5: Serie e approssimazioni (lezioni 33–40)**

- 33.** Serie
- La nozione di serie: termini, somme parziali, somma di una serie. La serie geometrica. frazione generatrice di un allineamento decimale periodico.
- 34.** Criteri di convergenza
- Il criterio del confronto; il criterio del rapporto. Il criterio di Leibniz per le serie a termini di segno alterno.
- 35.** Polinomi di Taylor (parte I)
- Le notazioni  $O$ ,  $\sim$ ,  $o$ . Approssimazione mediante polinomi di primo grado: il differenziale di una funzione. Approssimazione locale mediante polinomi di secondo grado.
- 36.** Polinomi di Taylor (parte II)
- Approssimazione mediante polinomi di grado superiore: i polinomi di Taylor. Polinomi di Taylor per alcune funzioni elementari.
- 37.** Serie di Taylor (parte I)
- La successione dei polinomi di Taylor: la serie di Taylor. Funzione sviluppabile in serie di Taylor. Resto della formula di Taylor secondo Lagrange. Utilizzazione del resto secondo Lagrange per il calcolo approssimato della funzione seno.
- 38.** Serie di Taylor (parte II)
- Sviluppabilità in serie di Taylor delle funzioni circolari, della funzione esponenziale, della funzione  $\log(1+x)$ , della funzione  $\arctan x$ .
- 39.** Approssimazione delle funzioni
- La serie binomiale. Approssimazione del numero  $e$ ; sua irrazionalità. Approssimazione della funzione esponenziale. Approssimazione delle funzioni circolari. Approssimazione della funzione logaritmica.
- 40.** Approssimazione degli zeri di una funzione
- Ancora sul calcolo approssimato dei logaritmi. Il metodo di bisezione; Il metodo di Newton. Applicazione del metodo di Newton al calcolo della funzione radice quadrata.
-