ESERCITAZIONI 1

Corso di Geometria e Algebra

1) Siano date le seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \\ 3 & -6 & -3 \end{pmatrix}.$$

Ridurre le matrici $A \cdot C$, $B \cdot A$ e $C \cdot B$ e indicare il rango delle matrici ridotte.

2) Calcolare il determinante e, quando esiste, l'inversa delle seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -3 \\ 2 & 12 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3) Risolvere il seguente sistema di Cramer:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

4) Risolvere i seguenti sistemi lineari e, nel caso in cui risultino possibili, trovare l'insieme delle soluzioni:

$$\text{i)} \begin{cases} x + y - 2z + t = 1 \\ 3x + 2y - z + 6t = 4 \\ y - z + t = 0 \\ 3z + 4t = 3 \end{cases}, \qquad (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4.$$

$$\text{ii)} \left\{ \begin{array}{rrrrrr} 3x^1 & -x^2 & +x^3 & & = & 3 \\ x^1 & +x^2 & -2x^3 & -2x^4 & = & 0 \\ & 2x^2 & +x^3 & -3x^4 & = & 3 \\ x^1 & -x^2 & +6x^3 & +x^4 & = & 6 \\ & 2x^2 & -2x^3 & -3x^4 & = & 0 \end{array} \right. , \qquad (x^1, x^2, x^3, x^4) \in \mathbb{R}^4.$$

5) Verificare se i seguenti insiemi sono oppure no sottospazi vettoriali di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$W = \{ \begin{pmatrix} a & a+b \\ b & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}\}, \qquad U = \{ \begin{pmatrix} a & 1 \\ a & b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

6) Verificare che i seguenti insiemi sono sottospazi vettoriali di $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$\begin{aligned} W &= \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \mathrm{tr}(A) = 0\}, \\ D &= \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid A \text{ è diagonale}\}, \\ T_n^s(\mathbb{K}) &= \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid A \text{ è triangolare superiore}\}, \\ T_n^i(\mathbb{K}) &= \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid A \text{ è triangolare inferiore}\}, \\ \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) &= \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid {}^tA = -A\} \text{ (insieme delle matrici antisimmetriche).} \end{aligned}$$

7) L'insieme $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - y = 0\}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$? L'insieme $B = \{c\,(2, 1, 0) \mid c \in \mathbb{R}\}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$? Lo stesso insieme B è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{C}^3$? L'insieme $C = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) \mid f(3) = 0\}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{F}(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$?

8) Discutere il seguente sistema al variare di $a \in \mathbb{R}$ e trovare l'insieme delle soluzioni per un valore a scelta di a, per cui il sistema risulti possibile:

$$\left\{ \begin{array}{rrrcl} x & +2y & +z & = & 1 \\ & y & +z & = & a \\ -x & +ay & +2z & = & 2 \end{array} \right. , \qquad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$