ESERCITAZIONI 2

Corso di Geometria e Algebra

1) Dire se i seguenti vettori dello spazio vettoriale V sono linearmente indipendenti oppure no e calcolare la dimensione del sottospazio vettoriale da essi generato. Inoltre nel caso in cui siano linearmente indipendenti completarli ad una base per V, mentre in caso contrario esprimere uno di essi come combinazione lineare degli altri:

a) $V = \mathbb{R}^2 \quad v_1 = (3, 2)\ v_2 = (1, 4)\ v_3 = (-1, -1)$,

b) $V = \mathbb{R}^5 \quad v_1 = (2, 0, -1, 0, 0)\ v_2 = (1, 1, 1, -2, 0)\ v_3 = (3, 1, 1, 1, 0)$,

c) $V = \mathbb{R}^4 \quad v_1 = (1, 1, 1, 0)\ v_2 = (1, 2, 0, 0)\ v_3 = (0, 2, 4, 0)$,

d) $V = \mathbb{C}^4 \quad v_1 = (3i, 2, i, -4)\ v_2 = (i, 1, -2, 1)\ v_3 = (4i, 2, 2i + 4, -10)$.

2) In $\mathbb{R}^4$, calcolare le coordinate dei vettori $v_1 = (1, 0, 2, 1)$, $v_2 = (0, 0, 0, 1)$ e $v_3 = (2, 1, 0, -2)$ rispetto alla base ordinata

$$\mathcal{B} = \{(1, 0, 0, -1), (1, 0, 2, 1), (1, 1, 0, -1), (0, 0, -2, 1)\}.$$

3) In $\mathbb{R}^3$ consideriamo i sottospazi vettoriali

$$\begin{aligned} U &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0\}, \\ W &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2z + y = 0\}, \\ W' &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0,\ 2x - 2y = 0\}. \end{aligned}$$

Calcolare $U \cap W$, $U \cap W'$, $W \cap W'$, $U \cap W \cap W'$, $U + W$, $U + W'$, $W + W'$, $U + W + W'$ e dire in quali casi la somma è diretta.

4) Dire se le seguenti applicazioni sono lineari oppure no:

a) $F : \mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^4$ definita da $A \mapsto \mathbf{a}^1$,

b) $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definita da $(x, y, z) \mapsto (3x + 1, 2y)$,

c) $F : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definita da $A \mapsto {}^t A$,

d) $F : \mathcal{F}(\mathbb{C}) = \{f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\} \longrightarrow \mathbb{C}$ definita da $f \mapsto f(1+i)$,

e) $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definita da $(x, y, z) \mapsto (z, y, x)$,

f) $F : \mathbb{R}^3[t] \longrightarrow \mathbb{R}^3[t]$ definita da $p(t) \mapsto 3p(t) + t$.

5) Data la seguente applicazione lineare $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^5$ definita da

$$(x, y, z, t) \mapsto (3x + 2y, x + y, 6x + 2t, x + z, 6y - 2t + x),$$

dire, senza far calcoli, se l'applicazione è suriettiva. Scrivere $M_{\mathcal{B},\tilde{\mathcal{B}}}(T)$ dove $\mathcal{B} = \{(3, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (0, 0, 0, -2), (0, 1, 1, 0)\}$ e $\tilde{\mathcal{B}}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^5$ e calcolare $\dim(\text{Ker } T)$ e $\dim(\text{Im } T)$.

6) Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione definita da

$$\begin{array}{rcl} (2,1,3) & \mapsto & (3,1) \\ (1,0,1) & \mapsto & (6,2) \\ (1,0,0) & \mapsto & (-1,0). \end{array}$$

Scrivere $M_{\tilde{\mathcal{B}},\tilde{\mathcal{B}}'}(T)$ dove $\tilde{\mathcal{B}}$ e $\tilde{\mathcal{B}}'$ sono le basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$. Inoltre trovare una base per Im T.

7) Data l'applicazione $T : \mathbb{R}^2[t] \longrightarrow \mathbb{R}^2[t]$ definita da:

$$\begin{array}{lcl} 1 & \mapsto & t \\ t & \mapsto & 2t^2 \\ t^2 & \mapsto & 2t - 3t^2, \end{array}$$

calcolare $M_{\tilde{\mathcal{X}}_2}(T)$ dove $M_{\tilde{\mathcal{X}}_2}(T) = \{1, t, t^2\}$.

8) Sia $F : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'applicazione definita nell'esercizio **4** punto c). Calcolare $M_{\mathcal{B}}(F)$ dove $\mathcal{B} = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$ è l'usuale base su $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.