ESERCITAZIONI 3

Corso di Geometria e Algebra

1) Calcolare il polinomio caratteristico, gli autovalori e verificare se le seguenti matrici a coefficienti reali sono o meno diagonalizzabili. In caso affermativo, calcolare una base spettrale:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & -5 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2) Calcolare il polinomio caratteristico, gli autovalori e una rappresentazione cartesiana per gli autospazi dell'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da $f(x, y, z) = (2x + y + 2z, x, x)$.

3) Calcolare il rango e, nel caso in cui siano reali, l'indice delle seguenti forme quadratiche e scrivere la forma canonica associata:

a) $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita da $q(x, y, z) = x^2 - 2y^2 + 2xz + yz$;

b) $q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ definita da $q(x, y, z, t) = -x^2 + 2z^2 + t^2 - 3xz - 2yz + zt$;

c) $q : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}$ definita da $q(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + 2iz^2 - t^2 + 2xy - izt$.

4) Si consideri $\mathbb{A}^4(\mathbb{R})$ con il riferimento $\mathcal{S} = ((0, 0, 0, 0), \mathcal{E})$.
a) Si determinino equazioni parametriche per il sottospazio affine S di equazioni cartesiane:

$$\begin{cases} 2x + 2y + 3z - t = 1 \\ x + 4y + 2z = 5 \end{cases} .$$

Quanto vale $\dim(S)$?
b) Si diano equazioni cartesiane per il sottospazio affine T di equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = \alpha + 2\beta + \gamma \\ y = \alpha - 3\gamma \\ z = -\beta \\ t = 2\beta - \gamma \end{cases}, \qquad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^3.$$

Quanto vale $\dim(T)$?
c) Si diano equazioni cartesiane e parametriche per il sottospazio affine
$U = (1, 0, 2, 1) + \mathrm{L}((1, 0, 0, 1), (2, -1, 1, 0), (0, -1, 2, 1))$.

5) Si considerino in $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$, rispetto ad un riferimento fissato, le due rette di equazioni parametriche:

$$r : \begin{cases} x = 2t - 2 \\ y = 3t + 7 \end{cases}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

$$r' : \begin{cases} x = t - 1 \\ y = 4t + 8 \end{cases}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Si dica se le rette sono incidenti o parallele e, nel primo caso, si determini il punto di intersezione.

6) Si consideri $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ con il riferimento naturale.
a) Si determinino equazioni cartesiane per la retta r passante per il punto $(1, 1, 1)$ e perpendicolare al piano di equazioni cartesiane:

$$\pi : \ 2y - z - 2 = 0.$$

b) Si determinino equazioni parametriche per il piano passante per il punto (1,0,2) e contenente la retta di equazioni cartesiane:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ y - z = 0 \end{cases}.$$

c) Si determinino equazioni cartesiane per il piano parallelo al piano

$$\pi : \ x + y - 2z = -1$$

e passante per il punto $(1, 1, 0)$.

7) Si considerino le coniche di $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ di equazioni

$$\Gamma : y^2 - 2y - x + 3 = 0, \qquad \Gamma' : x^2 + 2y^2 + 2xy - x = 0.$$

Si dica, per ognuna di esse, se è degenere o meno e nel caso in cui non sia degenere si dica se è una parabola, un'ellisse o un'iperbole. Si trovino (se esistono) gli eventuali assi e il centro. Infine si determini la tangente a Γ nel punto $(2, 1)$ e a Γ' nel punto $(1, 0)$.