

SOLUZIONI 1

Corso di Geometria e Algebra

1)

$$A \cdot C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -7 & 16 & 7 \\ -7 & 8 & 7 \\ -2 & 10 & 2 \end{pmatrix}. \quad \text{Il rango della matrice ridotta è 2.}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 5 & -7 \\ 1 & 11 & 6 & -2 \end{pmatrix}. \quad \text{Il rango della matrice ridotta è 3.}$$

$$C \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 9 & 3 & -4 \\ 2 & 8 & 2 & -4 \\ 2 & 10 & 4 & -4 \\ -6 & -27 & -9 & 12 \end{pmatrix}. \quad \text{Il rango della matrice ridotta è 2.}$$

2) $\det(A) = -21$, $\det(B) = 0$, $\det(C) = 0$, $\det(D) = -4$.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{8}{21} & -\frac{2}{21} & \frac{1}{21} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{5}{21} & \frac{4}{21} & -\frac{2}{21} \end{pmatrix}, \quad D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 2 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

3) La soluzione del sistema è:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 1 \\ z = \frac{1}{2} \\ t = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

4) La soluzione dei sistemi è:

$$\text{i) } \begin{cases} x = -1 \\ y = -\frac{17}{4} \\ z = -2 \\ t = \frac{9}{4} \end{cases}, \quad \text{ii) } \begin{cases} x^1 = 1 + \frac{1}{2}t^1 \\ x^2 = 1 + \frac{3}{2}t^1 \\ x^3 = 1 \\ x^4 = t^1 \end{cases} .$$

5) L'insieme W è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, mentre l'insieme U non lo è.

7) L'insieme A non è un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^3 . L'insieme B è un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^3 , ma non è un sottospazio vettoriale di \mathbb{C}^3 . Infine l'insieme C è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.

8) Il sistema risulta possibile e determinato se $a \neq 1$, mentre se $a = 1$ il sistema risulta indeterminato. La soluzione del sistema ad esempio per $a = 0$ è:

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = -3 \\ z = 3 \end{cases} .$$