SOLUZIONI 2

Corso di Geometria e Algebra

1) a) I vettori sono linearmente dipendenti, $\dim(L(v_1, v_2, v_3)) = 2$ e si ha $v_2 = -3v_1 - 10v_3$.

b) I vettori sono linearmente indipendenti, $\dim(L(v_1, v_2, v_3)) = 3$ e una base per V è $\{v_1, v_2, v_3, (0, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 1)\}$.

c) I vettori sono linearmente indipendenti, $\dim(L(v_1, v_2, v_3)) = 3$ e una base per V è $\{v_1, v_2, v_3, (0, 0, 0, 1)\}$.

d) I vettori sono linearmente dipendenti, $\dim(L(v_1, v_2, v_3)) = 2$ e si ha $v_3 = 2v_1 - 2v_2$.

2) Le coordinate dei vettori rispetto alla base $\mathcal{B}$ sono:

$$v_1 \equiv_{\mathcal{B}} (0, 1, 0, 0), \quad v_2 \equiv_{\mathcal{B}} (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}), \quad v_3 \equiv_{\mathcal{B}} (1, 0, 1, 0).$$

3) $U \cap W = L((2, 2, -1)))$, $U \cap W' = W'$, $W \cap W' = \mathbf{0}$, $U \cap W \cap W' = \mathbf{0}$, $U + W = \mathbb{R}^3$, $U + W' = U$, $W \oplus W' = \mathbb{R}^3$, $U + W + W' = \mathbb{R}^3$. L'unica somma diretta è $W \oplus W'$.

4) a) L'applicazione è lineare.

b) L'applicazione non è lineare.

c) L'applicazione è lineare

d) L'applicazione è lineare.

e) L'applicazione è lineare.

f) L'applicazione non è lineare.

5) L'applicazione non è suriettiva perchè la dimensione del dominio è strettamente minore di quella del codominio.

$$M_{\mathcal{B},\tilde{\mathcal{B}}}(T) = \begin{pmatrix} 11 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \\ 18 & 6 & -4 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 9 & 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Infine $\dim(\mathrm{Ker}\ T) = 0$ e $\dim(\mathrm{Im}\ T) = 4$.

6) Una base per $\mathrm{Im}\ T$ è $\mathcal{B} = \{(3,1), (-1,0)\}$.

$$M_{\tilde{\mathcal{B}},\tilde{\mathcal{B}}'}(T) = \begin{pmatrix} -1 & -16 & 7 \\ 0 & -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

7) Si ha:

$$M_{\tilde{\mathcal{X}}_2}(T) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

8) Si ha:

$$M_{\mathcal{B}}(F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$