SOLUZIONI 3

Corso di Geometria e Algebra

1) i) Il polinomio caratteristico è $p_A(\lambda) = \lambda(\lambda-2)(\lambda+2)$. Gli autovalori sono $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = -2$ con $m_a(0) = m_a(2) = m_a(-2) = 1$. Ho tre autovalori distinti quindi A è diagonalizzabile.
Si ha: $U_0 = L((3,6,1)),\ U_2 = L((0,1,0)),\ U_{-2} = L((1,1,1))$, quindi una base spettrale è $\mathcal{B} = \{(3,6,1),(0,1,0),(1,1,1)\}$.

ii) Il polinomio caratteristico è $p_B(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda^2-6\lambda+13)$. Ho un unico autovalore che è $\lambda = 1$ con $m_a(1) = 1$, quindi B non è diagonalizzabile.

2) Il polinomio caratteristico è $p_f(\lambda) = \lambda(\lambda^2-2\lambda-3)$. Gli autovalori sono $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 3,\ \lambda_3 = -1$ con $m_a(0) = m_a(3) = m_a(-1) = 1$. Ho tre autovalori distinti quindi f è diagonalizzabile. Si ha:

$$U_0 : \begin{cases} x = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases}, \quad U_3 : \begin{cases} x - y - 2z = 0 \\ z - y = 0 \end{cases}, \quad U_{-1} : \begin{cases} x + y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}.$$

3) a) Si ha: $r(q) = 3$, indice$(q) = 2$, quindi la forma canonica associata a q è $\tilde{q}(x,y,z) = x^2 - y^2 - z^2$.

b) Si ha: $r(q) = 4$, indice$(q) = 2$, quindi la forma canonica associata a q è $\tilde{q}(x,y,z,t) = x^2 + y^2 - z^2 - t^2$.

c) Si ha: $r(q) = 3$, quindi la forma canonica associata a q è $\tilde{q}(x,y,z,t) = x^2 + y^2 + z^2$.

4) a) Si ha $\dim(S) = 2$ e

$$S : \begin{cases} x = -4\alpha - 2\beta + 5 \\ y = \alpha \\ z = \beta \\ t = -6\alpha - \beta + 9 \end{cases} \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

b) Si ha $\dim(T) = 3$ e

$$T : \; x - y + 10z + 4t = 0.$$

c) Si ha $\dim(U) = 3$ e

$$U : \begin{cases} x = \alpha + 2\beta + 1 \\ y = -\beta - \gamma \\ z = \beta + 2\gamma + 2 \\ t = \alpha + \gamma + 1 \end{cases} \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \qquad U : \; x + 5y + 3z - t - 6 = 0.$$

5) Le due rette sono incidenti e il punto di intersezione è $P = (-\frac{4}{5}, \frac{44}{5})$.

6) a) Si ha:

$$r : \begin{cases} x - 1 = 0 \\ y + 2z - 3 = 0 \end{cases} .$$

b) Si ha:

$$\pi : \begin{cases} x = 1 - 2\alpha \\ y = \alpha \\ z = \alpha + 2\beta \end{cases} \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

b) Si ha:

$$\pi' : \; x + y - 2z - 2 = 0.$$

7) i) La conica Γ non è degenere ed è una parabola. L'asse di Γ ha equazione $y - 1 = 0$ e la tangente a Γ nel punto $(2, 1)$ ha equazione $x - 2 = 0$.

ii) La conica Γ' non è degenere ed è un'ellisse. Il centro di Γ' è il punto $C = (1, -\frac{1}{2})$, gli assi hanno equazione $\frac{3+\sqrt{5}}{2}x + (2 + \sqrt{5})y - \frac{1}{2} = 0$ e $\frac{3-\sqrt{5}}{2}x + (2 - \sqrt{5})y - \frac{1}{2} = 0$. Infine la tangente a Γ' nel punto $(1, 0)$ ha equazione $x + 2y - 1 = 0$.