Lezioni del corso di Geometria e Algebra

prof. Michele Mulazzani
dott. Alessia Cattabriga

A.A. 20001/2002

Indice

Capitolo 1

Equazioni e sistemi lineari.

NOTAZIONI.

$\mathbb{N}$ = insieme dei numeri naturali.
$\mathbb{Z}$ = insieme (e anello[1]) dei numeri interi.
$\mathbb{Q}$ = insieme (e campo[1]) dei numeri razionali.
$\mathbb{R}$ = insieme (e campo[1]) dei numeri reali.
$\mathbb{C}$ = insieme (e campo[1]) dei numeri complessi.

$\mathbb{K}$ indicherà un campo qualunque.

Una *n-pla ordinata* di elementi di un insieme A è ogni elemento dell'insieme $A^n = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{\text{n-volte}}$.
Se $\mathbf{a}= (a_1, \ldots, a_n) \in A^n$ allora $a_1, \ldots, a_n$ si dicono componenti di $\mathbf{a}$.

1.1 Alcune strutture algebriche.

Si dice *operazione binaria interna* su un insieme $A \neq \emptyset$ ogni applicazione dal prodotto cartesiano $A \times A$ (cioè l'insieme delle coppie ordinate di elementi di A) ad A.

[1]Le nozioni di anello e di campo verranno precisate nel prossimo paragrafo.

NOTAZIONE: se $\top : A \times A \longrightarrow A$ è un'operazione, l'elemento che dovrebbe essere indicato $\top(a, b)$ verrà contrassegnato, come usuale, con $a \top b$.

Una struttura algebrica $(A, \top)$, dove $\top$ è un'operazione binaria interna su A, PUÒ godere di alcune di queste proprietà:

1) proprietà *associativa* : $\forall a, b, c \in A$,

$$(a \top b) \top c = a \top (b \top c)$$

2) esistenza di un elemento neutro: $u \in A$ è *elemento neutro* se $\forall a \in A$

$$a \top u = u \top a = a$$

3) esistenza degli inversi: $\forall a \in A \ \exists a' \in A$ (*inverso* di a) tale che

$$a \top a' = a' \top a = u$$

4) proprietà *commutativa*: $\forall a, b \in A$

$$a \top b = b \top a.$$

La struttura $(A, \top)$ si chiama:

- *semigruppo* se gode della proprietà 1;
- *monoide* se gode delle proprietà 1 e 2 (es.: $(\mathbb{N}, +)$, $(\mathbb{Z}, \cdot)$);
- *gruppo* se valgono 1, 2 e 3;
- gruppo *abeliano* (o *commutativo*) se valgono tutte e quattro le proprietà (es.: $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$, gli esempi di segmenti e forze applicate in un punto con le rispettive somme).

NOTAZIONE: se l'operazione viene indicata col simbolo "$\cdot$", l'inverso di un elemento a si indica con a^{-1}. Se invece l'operazione viene indicata col simbolo "$+$" (come usualmente nei gruppi abeliani), si usa parlare di *opposto* anziché di inverso; l'opposto di a si scrive $-a$.
Una struttura algebrica $(A, \top, \perp)$, dove $\top$ e $\perp$ sono operazioni binarie interne su A, PUÒ godere di una o entrambe delle seguenti proprietà *distributive*:

$\forall a, b, c \in A$

$$a \perp (b \top c) = (a \perp b) \top (a \perp c),$$

$\forall a, b, c \in A$

$$(a \top b) \perp c = (a \perp c) \top (b \perp c).$$

Una struttura algebrica $(A, \top, \perp)$, dove $(A, \top)$ sia un gruppo abeliano, $(A, \perp)$ goda della proprietà associativa e che goda di entrambe le proprietà distributive, viene detta *anello*. Tale anello si dice *commutativo* se $(A, \perp)$ gode della proprietà 4, *unitario* se $(A, \perp)$ gode della 2.

Un anello commutativo unitario si chiama *campo* se

$$(A - \{\text{el. neutro di} \top\}, \perp)$$

è un gruppo abeliano.
Esempi di campi sono: $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ e $(\mathbb{C}, +, \cdot)$. La struttura $(\{0, 1\}, +, \cdot)$, dove $+$ e $\cdot$ sono l'usuale somma e moltiplicazione, tranne che per $1 + 1 = 0$, è un campo (finito) detto $\mathbb{Z}_2$, ed è il campo più piccolo esistente.

Spesso verranno utilizzate applicazioni $\mathbb{K} \times A \rightarrow A$, dove normalmente $\mathbb{K}$ sarà un campo, dette *prodotto per scalari*.

1.2 Operazioni standard su $\mathbb{K}^n$.

$+ : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$ (*somma standard*)

$$(a_1, \ldots, a_n) + (b_1, \ldots, b_n) \stackrel{def}{=} (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n)$$

$\cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$ (*prodotto per scalari standard*)

$$\lambda \cdot (a_1, \ldots, a_n) \stackrel{def}{=} (\lambda a_1, \ldots, \lambda a_n)$$

$\bullet : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ (*prodotto scalare naturale*)

$$(a_1, \ldots, a_n) \bullet (b_1, \ldots, b_n) \stackrel{def}{=} a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n$$

ATTENZIONE – Queste sono le definizioni usuali, ma NON le uniche possibili.

Vediamo alcuni esempi di strutture formate da un insieme, una operazione binaria "somma" e una operazione "prodotto per scalari":

- V = insieme dei segmenti di un piano, uscenti da un punto M; *somma* e *prodotto per scalari* definiti graficamente (regola del parallelogramma e moltiplicazione delle lunghezze).
- W = insieme delle forze applicate in un punto M; *somma* e *prodotto per scalari* definiti in modo usuale (composizione delle forze e moltiplicazione dell'intensità.)
- $\mathcal{F}(X, \mathbb{K})$ = insieme di tutte le applicazioni da un insieme X a $\mathbb{K}$; *somma* e *prodotto per scalari* definiti mediante le operazioni del codominio:

$$(f+g)(x) \stackrel{def}{=} f(x)+g(x) \qquad (\lambda \cdot f)(x) \stackrel{def}{=} \lambda \cdot f(x).$$

1.3 Sistemi lineari (versione operativa).

1.3.1 Equazioni lineari.

Un'*equazione lineare* sul campo $\mathbb{K}$ è ogni "espressione" del tipo

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b,$$

dove $a_1, \ldots, a_n, b \in \mathbb{K}$. Le indeterminate $x_1, \ldots, x_n$ sono dette le *incognite*, gli scalari $a_1, \ldots, a_n$ i *coefficienti* e b il *termine noto* della equazione. Spesso useremo x, y, z, t come incognite.

Ogni n-pla $(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n) \in \mathbb{K}^n$ tale che valga

$$a_1\overline{x}_1 + \cdots + a_n\overline{x}_n = b$$

è detta una *soluzione* della equazione.

Osservazione 1.1. È necessario specificare a priori le incognite della equazione; infatti l'espressione $2x_1 + 5x_2 = -3/2$ ha un significato diverso a seconda che le incognite siano solo x_1 e x_2 o siano x_1, x_2, x_3 o più.

1.3.2 Discussione ed eventuale risoluzione di un'equazione lineare.

Data l'equazione in $x_1, \dots, x_n$

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b,$$

troviamo le eventuali soluzioni.

Caso 1)
Almeno un coefficiente (per es. a_1) è $\neq 0$. Allora poniamo

$$\overline{x}_2 = \alpha_2, \dots, \overline{x}_n = \alpha_n,$$

con $\alpha_2, \dots, \alpha_n$ come *parametri* indipendenti, cioè valori in $\mathbb{K}$ assegnati in tutti i modi possibili, indipendentemente gli uni dagli altri. Allora si ha una soluzione ponendo

$$\overline{x}_1 = \frac{b - a_2\alpha_2 - \cdots - a_n\alpha_n}{a_1};$$

dunque l'insieme delle soluzioni è

$$\left\{ \left(\frac{b - a_2\alpha_2 - \cdots - a_n\alpha_n}{a_1}, \alpha_2, \dots, \alpha_n \right) | \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K} \right\}.$$

Esempio.
L'equazione $2x + y - \sqrt{3}z = 5$ (intesa a coefficienti reali, nelle incognite x, y, z) ammette l'insieme di soluzioni

$$\left\{ \left(\frac{5 - \alpha + \sqrt{3}\beta}{2}, \alpha, \beta \right) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

Lo stesso insieme, benché parametrizzato diversamente, si trova "risolvendo in y" come

$$\left\{ \left(\gamma, 5 - 2\gamma + \sqrt{3}\delta, \delta \right) \mid \gamma, \delta \in \mathbb{R} \right\}$$

o risolvendo in z,

$$\left\{ \left(\varepsilon, \zeta, \frac{5 - 2\varepsilon - \zeta}{-\sqrt{3}} \right) \mid \varepsilon, \zeta \in \mathbb{R} \right\}.$$

Caso 2)
I coefficienti sono tutti $= 0$.

Caso 2')
Se $b \neq 0$ l'equazione non ha soluzioni (l'equazione è *impossibile*).

Caso 2'')
Se anche $b = 0$, allora ogni n-pla è soluzione (l'equazione è un'*identità*).

1.3.3 Sistemi lineari.

Un *sistema* di m equazioni lineari in n incognite sul campo $\mathbb{K}$ è una m-pla di equazioni lineari su $\mathbb{K}$, nelle stesse n incognite:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} . \tag{1.1}$$

Soluzione di un sistema è una soluzione comune a tutte le sue equazioni. Un sistema si dice *possibile* (o *compatibile*) se ammette soluzioni, *impossibile* (o *incompatibile*) altrimenti. Un sistema possibile si dice *determinato* se ha una sola soluzione, *indeterminato* se ne ha più di una.

Un sistema si dice *omogeneo* se ogni termine noto è nullo.

Teorema 1.1. *Ogni sistema lineare omogeneo ammette almeno una soluzione (detta* ovvia *o* banale*) costituita dalla n-pla nulla* $(0, \dots, 0)$.

Il *sistema omogeneo associato* al sistema (1.1) è quello ottenuto da (1.1) ponendo tutti i termini noti uguali a 0:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} .$$

Teorema 1.2. *L'insieme delle eventuali soluzioni del sistema* (1.1) *è*

$$\{u + w \mid w \in W\},$$

dove u è una soluzione particolare qualsiasi di (1.1) *e W è l'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo associato.*

1.3.4 Discussione ed eventuale risoluzione di un sistema lineare.

Teorema 1.3. *Valgono le seguenti condizioni:*

1. *se in un sistema lineare all'equazione*

$$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$$

si sostituisce

$$\lambda (a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n) = \lambda b_i$$

(con $\lambda \in \mathbb{K} - \{0\}$), l'insieme delle soluzioni non cambia;

2. *se in un sistema lineare all'equazione*

$$a_{j1}x_1 + \cdots + a_{jn}x_n = b_j$$

si sostituisce l'equazione

$$(a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n) + (a_{j1}x_1 + \cdots + a_{jn}x_n) = b_i + b_j$$

(con $i \neq j$), l'insieme delle soluzioni non cambia;

3. *se in un sistema lineare si cambia l'ordine in cui sono scritte le equazioni, l'insieme delle soluzioni non cambia;*

4. *se in un sistema lineare compare l'identità $0 = 0$, la sua eliminazione non cambia l'insieme delle soluzioni.*

Il teorema precedente permette di modificare, con il seguente algoritmo, un dato sistema lineare come (1.1) in uno più semplice da trattare, ma con lo stesso insieme di soluzioni (eventualmente vuoto).

1.3.5 Algoritmo di eliminazione di Gauss.

Passo 1.1:
Sia j_1 il più piccolo indice per il quale almeno un coefficiente a_{ij_1} è diverso da 0. Scambiare le equazioni in modo che sia $a_{1j_1} \neq 0$.

Passo 1.2:
Per ogni $i > 1$, sostituire la i-esima equazione con

$$a_{1j_1} \cdot (i\text{-esima equaz.}) - a_{ij_1} \cdot (1^a \text{ equaz.})$$

Con questi due passi, si è ottenuto un nuovo sistema (1.2) in cui le equazioni, dalla seconda in poi, hanno coefficiente di x_{j_1} (e forse di qualche altra incognita fino ad una incognita x_{j_2-1}) nullo.

$$\begin{cases} a'_{1j_1}x_{j_1} + a'_{12}x_2 + \cdots + a'_{1n}x_n = b'_1 \\ a'_{2j_2}x_{j_2} + \cdots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \dots \\ a'_{mj_2}x_{j_2} + \cdots + a'_{mn}x_n = b'_m \end{cases} . \tag{1.2}$$

Passo 1.3:
Se in (1.2) si è venuta a formare l'identità $0 = 0$, la si elimina.
Se in (1.2) si è formata una "equazione" $0 = k$, con $k \neq 0$, s'interrompe l'algoritmo: il sistema (1.2), e quindi il sistema (1.1), è impossibile.

Passi 2.1, 2.2 e 2.3:
Come i passi 1.1, 1.2 e 1.3, applicati al "sottosistema" del sistema (1.2) formato dalle equazioni dalla 2^a all'ultima.

...

Passi i.1, i.2 e i.3 ...
...

L'iterazione di questi passi conduce ad un sistema *a gradini*

$$\begin{cases} a'_{1j_1}x_{j_1} + a'_{12}x_2 + \cdots + a'_{1n}x_n = b'_1 \\ a''_{2j_2}x_{j_2} + \cdots + a''_{2n}x_n = b''_2 \\ \dots \\ a''_{rj_r}x_{j_r} + \cdots + a''_{rn}x_n = b''_r \end{cases} . \tag{1.3}$$

Passo finale:
Se non si sono trovate uguaglianze impossibili, risolvere l'ultima equazione, introducendo, se necessario, parametri. Poi sostituire i valori trovati nella equazione precedente. Risolvere questa equazione, eventualmente introducendo nuovi parametri. Iterare il procedimento fino alla prima equazione.

Esempio.
Discutere, ed eventualmente risolvere il seguente sistema lineare su $\mathbb{R}$, in x, y, z, t:

$$\begin{cases} z - 3t = 1 \\ 3x + 6y - z + 5t = 2 \\ 2x + 4y + z - t = -1 \\ 5x + 10y + 5z - 9t = -6 \end{cases} .$$

Scambio 1^a e 2^a equazione:

$$\begin{cases} 3x + 6y - z + 5t = 2 \\ z - 3t = 1 \\ 2x + 4y + z - t = -1 \\ 5x + 10y + 5z - 9t = -6 \end{cases} ;$$

sostituisco alla 3^a eq.: $3\cdot(3^a$ eq.)$-2\cdot(1^a$ eq.); alla 4^a eq.: $3\cdot(4^a$ eq.)$-5\cdot(1^a$ eq.):

$$\begin{cases} 3x + 6y - z + 5t = 2 \\ z - 3t = 1 \\ 5z - 13t = -7 \\ 20z - 52t = -28 \end{cases} ;$$

sostituisco alla 3^a eq.: (3^a eq.)$-5\cdot(2^a$ eq.); alla 4^a eq.: (4^a eq.)$-20\cdot(2^a$ eq.):

$$\begin{cases} 3x + 6y - z + 5t = 2 \\ z - 3t = 1 \\ 2t = -12 \\ 8t = -48 \end{cases} ;$$

sostituisco alla 4^a eq.: $2 \cdot (4^a$ eq.) $- 8 \cdot (3^a$ eq.).

$$\begin{cases} 3x + 6y - z + 5t = 2 \\ z - 3t = 1 \\ 2t = -12 \\ 0 = 0 \end{cases} ;$$

elimino l'identità:

$$\begin{cases} 3x + 6y - z + 5t = 2 \\ z - 3t = 1 \\ 2t = -12 \end{cases} ;$$

risolvo e sostituisco iterativamente:

$$\begin{cases} x = \frac{2-6y+z-5t}{3} = \frac{15-6\alpha}{3} = 5 - 2\alpha \\ y = \alpha \\ z = 1 + 3t = -17 \\ t = -6 \end{cases} .$$

L'insieme delle soluzioni è:

$$\{(5 - 2\alpha, \alpha, -17, -6) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Corollario 1.1. *Se per un sistema lineare omogeneo di m equazioni in n incognite vale $m < n$, allora esso ammette soluzioni diverse dalla ovvia.*

Si noti che il corollario fornisce una condizione SOLO sufficiente.
Se le soluzioni di un sistema lineare a coefficenti su $\mathbb{K}$ dipendono da h parametri e $\mathbb{K}$ è un campo infinito si dice usualmente che il sistema ammette ∞^h *soluzioni*.

Capitolo 2

Matrici.

2.1 Definizioni iniziali.

Una *matrice di tipo* (m, n) (o anche $m \times n$) sul campo $\mathbb{K}$ è ogni applicazione da $\{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\}$ a $\mathbb{K}$.
L'insieme di tali matrici si denota con $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$.

Esempio.
$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2/3 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ è la matrice costituita dalla applicazione

$$\begin{array}{lll} (1,1) \mapsto 2 & (1,2) \mapsto 0 & (1,3) \mapsto 2/3 \\ (2,1) \mapsto -1 & (2,2) \mapsto 3 & (2,3) \mapsto 4 \end{array} .$$

Una matrice $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ si indicherà con il simbolismo

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} ,$$

dove a_{ij} è l'immagine della coppia (i, j).
Spesso si scrive semplicemente (a_{ij}) per indicare una matrice, quando gli insiemi di indici sono evidenti o non importanti.

Data una matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$, per ogni $i \in \{1, \ldots, m\}$ la n-pla $A_{(i)} = (a_{i1}, \ldots, a_{in})$ è detta la i-esima *riga*. Analogamente, per ogni $j \in \{1, \ldots, n\}$ la m-pla $A^{(j)} = (a_{1j}, \ldots, a_{mj})$ è detta la j-esima *colonna* di A.

Data $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, la matrice *trasposta* di A, è la matrice ${}^tA \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ definita da ${}^tA = (b_{rs})$, con $b_{rs} = a_{sr}$ per ogni $r \in \{1, \dots, n\}$ e ogni $s \in \{1, \dots, m\}$.

Proposizione 2.1. *Per ogni matrice A, vale ${}^t({}^tA) = A$.*

In ogni $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ c'è la *matrice nulla* $\mathbf{0}$ i cui elementi sono tutti nulli.

Le matrici con uguale numero di righe e colonne si dicono *quadrate*. Per semplicità si scrive $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ invece di $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$.

Sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ una matrice quadrata. La *traccia di A* è definita come

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Per ogni $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la n-pla $(a_{11}, \dots, a_{nn})$ è detta *diagonale principale* di A.

Una matrice quadrata $A = (a_{ij})$ si dice:

- *triangolare superiore* (o *alta*) se $a_{ij} = 0$ per ogni $i > j$;
- *triangolare inferiore* (o *bassa*) se $a_{ij} = 0$ per ogni $i < j$;
- *diagonale* se $a_{ij} = 0$ per ogni $i \neq j$.

2.2 Operazioni.

Somma di matrici:
$+ : \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ definita da

$$(a_{ij}) + (b_{ij}) \stackrel{def}{=} (a_{ij} + b_{ij}).$$

Prodotto per scalari:
$\cdot : \mathbb{K} \times \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ definito da

$$\lambda \cdot (a_{ij}) \stackrel{def}{=} (\lambda \cdot a_{ij}).$$

Prodotto (*riga per colonna*):
$\cdot : \mathcal{M}_{m\times n} \times \mathcal{M}_{n\times p} \longrightarrow \mathcal{M}_{m\times p}$ definito da

$$(a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} \cdot (b_{rs})_{\substack{1\le r\le n\\ 1\le s\le p}} \stackrel{def}{=} (A_{(h)} \bullet B^{(k)})_{\substack{1\le h\le m\\ 1\le k\le p}}$$

il generico elemento della matrice prodotto è dunque

$$c_{hk} = \sum_{r=1}^{n} a_{hr}\, b_{rk}.$$

La matrice A si dice *conformabile* a B se ne esiste il prodotto, cioè se le righe di A sono lunghe come le colonne di B, vale a dire se il numero di colonne di A è uguale al numero di righe di B.

Esempio.

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 0 \\ 2 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2/3 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (3,5)\bullet(2,-1) & (3,5)\bullet(0,3) & (3,5)\bullet(2/3,4) \\ (4,0)\bullet(2,-1) & (4,0)\bullet(0,3) & (4,0)\bullet(2/3,4) \\ (2,1)\bullet(2,-1) & (2,1)\bullet(0,3) & (2,1)\bullet(2/3,4) \\ (6,1)\bullet(2,-1) & (6,1)\bullet(0,3) & (6,1)\bullet(2/3,4) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 15 & 22 \\ 8 & 0 & 8/3 \\ 3 & 3 & 16/3 \\ 11 & 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

Esiste un elemento neutro per il prodotto: è la matrice *identità* (o *identica*) $I_n = (\delta_{ij})_{1\le i,j\le n}$, il cui generico elemento è il *simbolo di Kronecker*

$$\delta_{ij} \stackrel{def}{=} \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}.$$

Vale infatti:

Proposizione 2.2. *Per ogni* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$*,*

$$A \cdot I_n = A, \qquad I_m \cdot A = A.$$

Proposizione 2.3. *La struttura algebrica* $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \cdot)$*, dove* $\cdot$ *è il prodotto riga per colonna, è un anello unitario per ogni campo* $\mathbb{K}$ *e per ogni* $n \in \mathbb{N} - \{0\}$*, non commutativo per* $n > 1$*.*

2.3 Sistemi lineari e matrici.

Tratteremo i sistemi lineari come particolari equazioni matriciali. Il sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

si può scrivere come

$$A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b},$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$$

è la matrice dei coefficienti o *incompleta* del sistema, mentre

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

sono rispettivamente la n-pla delle incognite e la m-pla dei termini noti. Con la notazione $(A|\mathbf{b})$ si designa la *matrice completa* del sistema

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ & \cdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Salvo avviso contrario, confonderemo sempre $\mathbb{K}^r$ con $\mathcal{M}_{r\times 1}(\mathbb{K})$, cioè tratteremo le r-ple come matrici colonna, come sopra per $\mathbf{x}$ e $\mathbf{b}$.

Capitolo 3

Spazi vettoriali.

3.1 Definizioni iniziali.

Sia $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ un campo, in cui denotiamo con 0 e 1 gli elementi neutri di $+$ e di $\cdot$ rispettivamente. Siano $V \neq \emptyset$ un insieme, $\oplus : V \times V \to V$ un'operazione binaria interna su V, e $\odot : \mathbb{K} \times V \to V$ un prodotto per scalari. La struttura algebrica $(V, \oplus, \odot, \mathbb{K})$ si chiama *spazio vettoriale su* $\mathbb{K}$ se valgono, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\forall v, v' \in V$,

a) $(V, \oplus)$ è un gruppo abeliano

b$_1$) $\lambda \odot (v \oplus v') = (\lambda \odot v) \oplus (\lambda \odot v')$

b$_2$) $(\lambda + \mu) \odot v = (\lambda \odot v) \oplus (\mu \odot v)$

b$_3$) $(\lambda \cdot \mu) \odot v = \lambda \odot (\mu \odot v)$

b$_4$) $1 \odot v = v$.

Esempi di spazi vettoriali sono le strutture introdotte nella prima lezione: $\mathbb{K}^n$, $\mathcal{F}(X, \mathbb{K})$. Un nuovo esempio è fornito da $(\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K}), +, \cdot, \mathbb{K})$, per tutti gli $m, n \in \mathbb{N} - \{0\}$, dove $+$ e $\cdot$ sono la somma di matrici e il prodotto per scalari già definiti. Anche l'insieme $\mathfrak{S}(\mathbb{K})$ di tutte le successioni $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{K}$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ rispetto alle operazioni di somma di successioni e di prodotto di una successione per uno scalare.

NOTAZIONE: l'elemento neutro di $(V, \oplus)$ viene chiamato *vettore nullo*, ed è usualmente indicato con O_V. V stesso viene chiamato *sostegno* dello spazio vettoriale, e i suoi elementi sono chiamati *vettori*; gli elementi di $\mathbb{K}$ sono invece detti *scalari*.

È di comune (ab)uso la confusione fra uno spazio vettoriale e il suo insieme sostegno: spesso, cioè, scriveremo V invece di $(V, \oplus, \odot, \mathbb{K})$. Infine, quasi sempre si usa lo stesso simbolo per la somma in $\mathbb{K}$ e quella in V. Per i prodotti, poi (quello interno di $\mathbb{K}$ e quello per scalari) vige non solo la confusione, ma addirittura l'abolizione! Scriveremo $(\lambda\mu)v$ invece della corretta espressione $(\lambda \cdot \mu) \odot v$.

3.2 Sottospazi vettoriali.

Sia $(V, +, \cdot, \mathbb{K})$ uno spazio vettoriale, e sia $W \subseteq V$ tale che:

W sia *chiuso rispetto alla somma*:

$$\forall w, w' \in W \qquad w + w' \in W;$$

W sia *chiuso rispetto al prodotto per scalari*:

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall w \in W \qquad \lambda \cdot w \in W;$$

allora $(W, +', \cdot', \mathbb{K})$, dove $+'$ e $\cdot'$ sono le restrizioni a W di $+$ e $\cdot$ rispettivamente, è uno spazio vettoriale, che verrà detto *sottospazio vettoriale* di $(V, +, \cdot, \mathbb{K})$.

NOTAZIONE: le operazioni del sottospazio verranno sempre indicate con lo stesso simbolo dello spazio vettoriale da cui provengono (nel caso di prima, si scriverà $+$ e $\cdot$ anche per W).

Esempi.
1) Due sottospazi vettoriali un po' scemi, ma presenti in ogni spazio vettoriale $(V, +, \cdot, \mathbb{K})$ sono: $(V, +, \cdot, \mathbb{K})$ stesso e il *sottospazio banale* $(\{O_V\}, +, \cdot, \mathbb{K})$. Tutti gli altri sottospazi sono detti sottospazi *propri*.

2) L'insieme $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ delle successioni reali limitate è un sottospazio vettoriale dello spazio delle successioni reali $\mathfrak{S}(\mathbb{R})$.

3) L'insieme $\mathfrak{C}(\mathbb{R})$ delle successioni convergenti è un sottospazio vettoriale di $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$.

4) L'insieme $\mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ delle funzioni limitate e l'insieme $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ delle funzioni continue formano sottospazi vettoriali di $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

5) L'insieme $\mathcal{C}^r(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (cioè delle funzioni con derivata r-esima continua) forma un sottospazio vettoriale di $\mathcal{C}^{r-1}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

6) L'insieme $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (cioè delle funzioni derivabili ∞ volte) forma un sottospazio vettoriale di $\mathcal{C}^r(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, per ogni $r \in \mathbb{N}$.

7) L'insieme $\mathbb{R}[x]$ delle funzioni polinomiali da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ forma sottospazio vettoriale di $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

8) L'insieme $\mathbb{R}[x]_n$ delle funzioni polinomiali da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ di grado $\leq n$ forma sottospazio vettoriale dello spazio delle funzioni polinomiali da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$, e di $\mathbb{R}[x]_{n+1}$ (cioè delle funzioni polinomiali di grado $\leq n+1$).

9) L'insieme $\mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$ di tutte le funzioni integrabili secondo Riemann è un sottospazio vettoriale dello spazio $\mathcal{F}([a, b], \mathbb{R})$.

10) L'insieme $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ è un sottospazio vettoriale dello spazio $\mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$.

11) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo in n incognite su $\mathbb{K}$ (non importa il numero di equazioni) forma sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^n$.

12) Nello spazio vettoriale dei segmenti di un piano uscenti da un punto M, formano sottospazio vettoriale i segmenti uscenti da M, e giacenti su una fissata retta $\overline{r}$ (ovviamente passante per M).

Osservazione 3.1. Ogni sottospazio vettoriale di V contiene il vettore nullo O_V, per cui ogni sottoinsieme di V che non contiene O_V non può essere un sottospazio. Per esempio le soluzioni di un sisteme lineare non omogeneo non sono un sottospazio vettoriale.

3.3 Combinazioni lineari.

Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$.

Siano $v_1, \dots, v_m \in V$. Un vettore $v \in V$ si dice *combinazione lineare* di $v_1, \dots, v_m$ se esistono degli scalari $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{K}$ tali che

$$v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_m v_m.$$

Proposizione 3.1. *Un sottoinsieme U di V costituisce sottospazio vettoriale di V se e solo se è chiuso rispetto alla formazione di combinazioni lineari di coppie di elementi di U, cioè:*

$$\forall \lambda, \lambda' \in \mathbb{K}, \forall u, u' \in U \qquad \lambda u + \lambda' u' \in U.$$

Sia S un sottoinsieme non vuoto qualsiasi di V. L'insieme delle combinazioni lineari di vettori di S, cioè l'insieme

$$\{\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_m v_m \,|\, \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{K},\ v_1, \dots, v_m \in S\}$$

si chiama *chiusura lineare* di S e si indica con $L(S)$. Conveniamo anche che $L(\emptyset) = \{O_V\}$.

Teorema 3.1. *$L(S)$ è sottospazio vettoriale di V, per ogni $S \subseteq V$. Inoltre, se un sottospazio vettoriale U di V contiene S, allora U contiene anche $L(S)$.*

Quindi $L(S)$ è il più piccolo sottospazio di V che contiene S.
Si osservi che $L(S) = S$ se e solo se S è un sottospazio vettoriale di V.

Si chiama *sistema* (o *insieme*) *di generatori* di V ogni sottoinsieme S di V tale che $L(S) = V$. Si dice anche che V *è generato da* S.

Proposizione 3.2. *Se S genera V e $S \subseteq S'$, allora anche S' genera V.*

Esempi.
1) Ogni spazio vettoriale V ammette V stesso come insieme di generatori.

2) Lo spazio vettoriale $\mathbb{R}[x]$ delle funzioni polinomiali da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ ammette $S = \{x^h \mid h \in \mathbb{N}\}$ come insieme di generatori.

3) Lo spazio $\mathbb{R}^2$ ammette $S = \{(1,0), (0,1)\}$ come insieme di generatori, ma anche $\{(1,0),$
$(1,1)\}$ e $\{(1,1), (2,1), (1,3)\}$ sono ognuno un insieme di generatori per $\mathbb{R}^2$, mentre $\{(1,2), (2,4)\}$ non lo è.

3.4 Intersezione e somma di sottospazi.

Proposizione 3.3. *Siano U e W sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V. Allora $U \cap W$ è anch'esso sottospazio vettoriale di V. Inoltre, se un sottospazio vettoriale V' di V è contenuto in U e in W, allora V' è contenuto anche in $U \cap W$.*

Quindi $U \cap W$ è il più grande sottospazio di V contenuto sia in U che in W.

ATTENZIONE: un analogo teorema NON vale per l'unione. Per esempio, si considerino i sottospazi di $\mathbb{R}^3$

$$U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\} \quad \text{e} \quad W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0\};$$

la loro intersezione è un sottospazio:

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0, y = 0\};$$

ma la loro unione NON è sottospazio; infatti $(1,0,0)$ e $(0,1,0)$ appartengono ad $U \cup W$, ma la loro somma $(1,1,0)$ no.

Dati sottospazi vettoriali U, W di V, si chiama *somma* di U e W l'insieme

$$U + W \stackrel{def}{=} \{u + w \mid u \in U, w \in W\}.$$

Proposizione 3.4. *$U + W$ è sottospazio vettoriale di V. Inoltre, se un sottospazio vettoriale V' di V contiene U e W, allora V' contiene anche $U + W$.*

Quindi $U + W$ è il più piccolo sottospazio di V che contiene sia U che W.

Esempio.
Se $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, y = 0, z = 0\}$, e $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x = 0, z = 0\}$, allora $U + W$ è il sottospazio $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z = 0\}$.

La somma dei sottospazi vettoriali U e W si dice *diretta* se per ogni $v \in U + W$ esistono esattamente un $u \in U$ ed un $w \in W$ tali che sia $v = u + w$. In tal caso scriveremo $U + W = U \oplus W$.

Teorema 3.2. *Siano U, W due sottospazi di V. La loro somma è diretta se e solo se $U \cap W = \{O_V\}$. Quindi $V = U \oplus W$ se e solo se*

$$1)\ V = U + W \qquad e \qquad 2)\ U \cap W = \{O_V\}.$$

Esempio.
Nell'esempio precedente, $\mathbb{R}^3$ non era somma diretta dei due sottospazi; è invece somma diretta dei sottospazi $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, y = 0, z = 0\}$ e $W' = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x = 0\}$.

3.5 Spazio delle righe e delle colonne di una matrice.

Data una matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$, si chiamano *operazioni di riga* su A le seguenti modifiche operate su A:

1) scambiare le righe i-esima e j-esima;

2) moltiplicare una riga per uno scalare $\neq 0$;

3) sommare alla riga i-esima la riga j-esima moltiplicata per uno scalare (con $j \neq i$).

Date due matrici $A, B \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$, A si dice *equivalente per righe* a B se B si ottiene da A mediante una successione finita di operazioni di riga. Questa è effettivamente una relazione di equivalenza.

Chiamiamo *spazio delle righe* di una matrice $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ il sottospazio di $\mathbb{K}^n$ generato dall'insieme delle righe di A. Chiamiamo *spazio delle colonne* di A il sottospazio di $\mathbb{K}^m$ generato dall'insieme delle colonne di A.

Teorema 3.3. *Se $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ sono equivalenti per righe, allora i loro spazi delle righe coincidono.*

Dimostrazione.
Le righe di B sono combinazioni lineari di quelle di A e viceversa. $\square$

Una matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ si dice *a gradini* se il numero di elementi nulli iniziali aumenta da ogni riga alla successiva, finché (eventualmente) le righe siano tutte nulle; cioè se esistono in A elementi non nulli

$$a_{1j_1}, a_{2j_2}, \ldots, a_{rj_r} \text{ con } j_1 < j_2 < \ldots < j_r$$

per cui sia

$$a_{ij} = 0 \text{ per } i \leq r,\ j < j_i \text{ e per } i > r.$$

Esempio.
Sono a gradini le matrici

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & \pi & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 8 & 5 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 3 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Teorema 3.4. *Ogni matrice è equivalente per righe ad almeno una matrice a gradini.*

Capitolo 4

Basi.

4.1 Dipendenza lineare.

Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$.

Un insieme di vettori $I = \{v_1, \dots, v_m\} \subseteq V$ si dice *linearmente indipendente* se vale l'implicazione

$$(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m = O_V) \Rightarrow (\lambda_1 = 0, \dots, \lambda_m = 0),$$

con $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ scalari. I vettori appartenenti ad I si dicono allora linearmente indipendenti tra loro.
Se l'implicazione non vale I si dice *linearmente dipendente* e i suoi vettori sono detti linearmente dipendenti tra loro. In tal caso quindi esistono scalari non tutti nulli $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ tali che $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m = O_V$.// Un insieme infinito $I \subseteq V$ è detto linearmente indipendente se ogni suo sottoinsieme finito è linearmente indipendente.

Proposizione 4.1. *L'unico insieme linearmente dipendente con un solo elemento è $I = \{O_V\}$. Più in generale, ogni insieme che contiene il vettore nullo è linearmente dipendente.*

Proposizione 4.2. *Due vettori $v, v' \neq O_V$ sono linearmente dipendenti se e solo se sono proporzionali, cioè se esiste $\lambda \in \mathbb{K} - \{0\}$ tale che sia $v' = \lambda v$.*

Esempio.
I vettori di $\mathbb{R}^3$ $v_1 = (1, 2, -3)$, $v_2 = (2, 0, 1)$, $v_3 = (4, 4, -5)$ sono linearmente

dipendenti o indipendenti? Cerchiamo scalari $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tali che valga

$$\lambda_1(1,2,-3) + \lambda_2(2,0,1) + \lambda_3(4,4,-5) = (0,0,0),$$

cioè cerchiamo soluzioni del sistema lineare:

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + 4\lambda_3 = 0 \\ -3\lambda_1 + \lambda_2 - 5\lambda_3 = 0 \end{cases};$$

esso ammette infinite soluzioni dipendenti da un parametro (cioè ∞^1 soluzioni): $\{(-2\alpha, -\alpha, \alpha)\}$. Ma allora una qualunque delle soluzioni diverse dalla ovvia, per esempio $(-2,-1,1)$, rivela la lineare dipendenza:

$$-2v_1 - v_2 + v_3 = (0,0,0).$$

Se invece consideriamo v_1 e v_2 come sopra, ma $v_3' = (4,4,-3)$, allora la richiesta

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3' = (0,0,0)$$

si traduce in un sistema lineare omogeneo che ammette solo la soluzione ovvia; perciò v_1, v_2, v_3' sono linearmente indipendenti.

Teorema 4.1. *Un insieme di vettori non nulli $I = \{v_1, \dots, v_m\}$ è linearmente dipendente se e solo se almeno uno dei suoi elementi è combinazione lineare dei precedenti.*

Dimostrazione.
Sia $I = \{v_1, \dots, v_m\}$ linearmente dipendente; allora esistono scalari $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ non tutti nulli, tali che $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m = O_V$. Sia λ_i lo scalare non nullo di indice massimo. Allora $v_i = \lambda_i^{-1}(-\lambda_1 v_1 - \dots - \lambda_{i-1} v_{i-1})$.
Viceversa, sia per ipotesi $v_i = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_{i-1} v_{i-1}$; si ha $\mu_1 v_1 + \dots + \mu_{i-1} v_{i-1} - 1 v_i + 0 v_{i+1} + \ldots + 0 v_m = O_V$, che dimostra la lineare dipendenza. □

Corollario 4.1. *Un insieme di vettori non nulli $I = \{v_1, \dots, v_m\}$ è linearmente dipendente se e solo se almeno uno dei suoi elementi è combinazione lineare degli altri.*

Proposizione 4.3. *Se I è linearmente indipendente e $J \subseteq I$, allora anche J è linearmente indipendente.*

Si osservi che dalla proposizione precedente si deduce che se I è linearmente dipendente e $I \subseteq J$, allora anche J è linearmente dipendente.

4.2 Basi e dimensione.

Nello spazio vettoriale V su $\mathbb{K}$, si chiama *base* di V ogni suo insieme di generatori linearmente indipendente.

Teorema 4.2. *Ogni spazio vettoriale ammette basi.*

Teorema 4.3. *Due basi dello stesso spazio vettoriale hanno lo stesso numero di vettori.*

Lo spazio vettoriale V si dice di *dimensione finita* se ammette una base formata da un insieme finito di vettori; in tal caso se la base è composta da n vettori diremo che V ha dimensione n e scriveremo $\dim V = n$. Invece V si dice di *dimensione infinita* se non ammette basi finite.

Esempi.
1) $\mathbb{K}^n$ ha dimensione n: ammette la base *canonica* (o *naturale*)

$$\mathcal{B}_{nat} = \{(1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)\}.$$

2) $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbf{K})$ ha dimensione $m \times n$.

3) Gli spazi di funzioni $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$, $\mathcal{C}^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, per $k \geq 0$, $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e gli spazi di successioni $\mathfrak{S}(\mathbb{R})$, $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$, $\mathfrak{C}(\mathbb{R})$ sono tutti di dimensione infinita.

4) Lo spazio delle funzioni polinomiali $\mathbb{R}[x]$ è di dimensione infinita. Una base di $\mathbb{R}[x]$ è l'insieme $\{x^h \,|h \in \mathbb{N}\} = \{1, x, x^2, \dots, x^h, \dots\}$. Invece lo spazio $\mathbb{R}[x]_n$ ha dimensione $n + 1$ e una sua base è $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$.

Teorema 4.4. *Se V ha dimensione n, allora ogni suo insieme linearmente indipendente ha al più n vettori. Ogni suo insieme di generatori ha almeno n vettori.*

Esempio.
In $\mathbb{R}^2$ l'insieme precedentemente visto $\{(1, 1), (2, 1), (1, 3)\}$ è senz'altro linearmente dipendente, in quanto formato da 3 vettori in uno spazio di dimensione 2.

ATTENZIONE: NON si può asserire nulla, a priori, sulla lineare dipendenza o indipendenza di un insieme costituito da un numero di vettori minore o uguale alla della dimensione dello spazio.

Corollario 4.2. *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n, allora:*

1. *ogni insieme linearmente indipendente formato da n vettori è una base;*
2. *ogni insieme di generatori formato da n elementi è una base.*

Teorema 4.5 (Coordinate di un vettore rispetto ad una base ordinata). *Sia $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ una base ordinata di V. Allora per ogni $v \in V$ esiste esattamente una n-pla ordinata di scalari $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ tale che sia*

$$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \ .$$

Si dice che $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ è la n-pla delle *coordinate* di v rispetto a $\mathcal{B}$.

NOTAZIONE: se $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ è la n-pla delle coordinate di v rispetto a $\mathcal{B}$ scriveremo $[v]_\mathcal{B} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ e talvolta anche $[v]_\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$.

Proposizione 4.4. *Se V è di dimensione n, dato un insieme $I = \{v_1, \dots, v_m\}$ linearmente indipendente, con $m < n$, è sempre possibile trovare un insieme I' di $n - m$ vettori, tale che $I \cup I'$ sia una base di V.*

Un tale I' viene detto un *completamento di I ad una base.*

Corollario 4.3. *Sia V di dimensione n. Ogni suo sottospazio vettoriale W ha dimensione $m \leq n$; in particolare, $\dim W = n$ se e solo se $W = V$.*

Proposizione 4.5. *Se V è di dimensione n, dato un insieme $S = \{v_1, \dots, v_m\}$ di generatori con $m > n$, esiste $S' \subseteq S$ tale che $S - S'$ è una base di V.*

Un metodo per ottenere una base di V a partire da un suo insieme finito S di generatori è il seguente: si toglie da S il vettore nullo eventualmente presente, poi si ordinano i vettori di S e si eliminano tutti quelli che sono combinazione lineare dei precedenti.

Teorema 4.6 (di Grassmann). *Siano U, W sottospazi vettoriali di dimensione finita di uno spazio vettoriale V. Allora $U + W$ ha dimensione finita, e inoltre si ha*

$$\dim(U + W) + \dim(U \cap W) = \dim U + \dim W.$$

4.3 Rango di una matrice.

Sia $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ una matrice.

Teorema 4.7. *Le dimensioni dello spazio delle righe e dello spazio delle colonne di A sono uguali.*

Si dice *rango* di A la dimensione comune del suo spazio delle righe e del suo spazio delle colonne. Il rango di A verrà indicato con $\mathrm{rk}A$.

Proposizione 4.6. *Matrici equivalenti per righe hanno uguale rango.*

Proposizione 4.7. *Le righe non nulle di una matrice a gradini sono linearmente indipendenti. Quindi il rango di una matrice a gradini è pari al numero delle sue righe non nulle.*

Si trae dalle proposizioni precedenti un metodo per il calcolo del rango di una matrice: la si riduce con operazioni di riga ad una matrice a gradini, e di questa si contano le righe non nulle.

4.4 Sistemi lineari e rango.

Teorema 4.8 (di Rouché-Capelli). *Un sistema lineare ammette soluzioni se e solo se i ranghi della matrice completa e incompleta sono uguali.*

Dimostrazione.
Il sistema ammette soluzioni se e solo se la colonna dei termini noti è combinazione lineare delle colonne dei coefficienti, dove gli elementi di una soluzione costituiscono gli scalari della combinazione lineare. $\square$

Teorema 4.9. *Un sistema lineare omogeneo ammette soluzioni diverse dalla ovvia se e solo se il rango della matrice dei coefficienti è minore del numero delle incognite.*

Dimostrazione.
Il sistema ammette soluzioni diverse dalla ovvia se e solo se si può ridurre ad un sistema a gradini (quindi con matrice a gradini equivalente per righe a quella originaria) con meno equazioni che incognite. $\square$

Capitolo 5

Applicazioni lineari.

5.1 Linearità.

Dati spazi vettoriali $(V, +, \cdot, \mathbb{K})$ e $(W, \oplus, \odot, \mathbb{K})$ sullo stesso campo, un'applicazione $F : V \to W$ è detta *applicazione* (o *trasformazione*) *lineare* se soddisfa le due condizioni:

1) $\forall v, v' \in V,\ F(v + v') = F(v) \oplus F(v')$,

2) $\forall v \in V$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $F(\lambda \cdot v) = \lambda \odot F(v)$.

Proposizione 5.1. *F è lineare se e solo se*

$$1')\ \forall v, v' \in V,\quad \forall \lambda, \lambda' \in \mathbb{K} \qquad F(\lambda \cdot v + \lambda' \cdot v') = \lambda \odot F(v) \oplus \lambda' \odot F(v').$$

Per cui le condizioni 1) e 2) della definizione di applicazione lineare equivalgono alla condizione $1'$) della proposizione.

Proposizione 5.2. *Se F è lineare, allora $F(O_V) = O_W$.*

Per cui un'applicazione da V a W che non manda O_V in O_W non può essere lineare (si vedano gli esempi 10 e 11 che seguono).

Esempi.
1) Dati due spazi vettoriali qualsiasi V e W è sempre definita l'applicazione lineare nulla:

$$\begin{aligned} \overline{O} : V &\longrightarrow W \\ v &\longmapsto O_W. \end{aligned}$$

2) Su ogni spazio vettoriale V è definita l'applicazione identità:

$$\begin{aligned} \mathrm{Id}_V : V &\longrightarrow V \\ v &\longmapsto v. \end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} : \mathfrak{C}(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} &\longmapsto \lim_{n\to\infty} a_n. \end{aligned}$$

4)

$$\begin{array}{cccc} \left.\dfrac{d}{dx}\right|_{x_0} : & \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ deriv. in } x_0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & & \longmapsto & \left.\dfrac{df}{dx}\right|_{x_0}. \end{array}$$

5)

$$\begin{array}{cccc} \dfrac{d}{dx} : & \mathcal{C}^{k+1}(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^{k}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ & f & \longmapsto & \dfrac{df}{dx}(x) = f'(x). \end{array}$$

6)

$$\begin{array}{cccc} \int_a^b dx : & \mathcal{R}([a,b],\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & f & \longmapsto & \int_a^b f(x)\,dx. \end{array}$$

7)

$$\begin{array}{cccc} p : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & x. \end{array}$$

8) Con $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ fissata,

$$\begin{array}{cccc} f_A : & \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K}^m \\ & \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \end{array}$$

L'applicazione f_A si dice trasformazione lineare canonicamente associata ad A.

9) Con V spazio vettoriale dei segmenti di un piano uscenti da un punto M, W sottospazio dei segmenti uscenti da M e giacenti su una fissata retta $\overline{r}$, è

lineare la proiezione ortogonale su $\overline{r}$.

10) Ogni *traslazione* di uno spazio vettoriale V, di *ampiezza* $\overline{v} \in V$, cioè l'applicazione

$$\begin{array}{rccc} \alpha_{\overline{v}}: & V & \to & V \\ & v & \mapsto & v+\overline{v}, \end{array}$$

NON è lineare se $\overline{v} \neq O_V$.

11) NON è lineare l' applicazione

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & ax+b \end{array}$$

se $b \neq 0$.

12) NON è lineare l' applicazione

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & ax^n \end{array}$$

se $a \neq 0$ e $n \in \mathbb{N} - \{1\}$.

Proposizione 5.3. *La composizione di due applicazioni lineari è un'applicazione lineare. L'inversa di un'applicazione lineare invertibile è anch'essa lineare.*

Teorema 5.1 (fondamentale delle applicazioni lineari). *Dati due spazi vettoriali V, W su $\mathbb{K}$, data comunque una base $\mathcal{B}$ di V, esiste ed è unica l'applicazione lineare che ai vettori di $\mathcal{B}$ fa corrispondere vettori di W comunque assegnati.*

Dimostrazione. (caso di $\dim V = n$)
Se $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ e ad ogni v_i assegniamo un vettore $w_i \in W$; costruiamo F come segue: per ogni $v \in V$ esiste ed è unica la n-pla $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ tale che $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$; definiamo $F(v) = \sum_{i=1}^n \lambda_i w_i$. Si verifica che F è lineare e che ogni altra applicazione lineare che mandi ogni v_i in w_i coincide con F. $\square$

5.2 Isomorfismi.

Un *isomorfismo* da V a W è un'applicazione lineare biiettiva. Due spazi vettoriali si dicono *isomorfi* se esiste un isomorfismo da uno all'altro.

Proposizione 5.4. *Se F è un isomorfismo, l'applicazione inversa F^{-1} è anch'essa un isomorfismo. Inoltre la composizione di due isomorfismi è un isomorfismo.*

L'isomorfismo è quindi una relazione di equivalenza nella classe di tutti gli spazi vettoriali su $\mathbb{K}$.

Un *endomorfismo* di uno spazio vettoriale V è un'applicazione lineare da V a se stesso. Un *automorfismo* è un endomorfismo biiettivo.

Esempi.
1) Un automorfismo di $\mathbb{R}^2$ è l'applicazione

$$\begin{array}{rccc} F: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & (-y,x). \end{array}$$

2) Nello spazio dei segmenti di un piano uscenti da M, le rotazioni attorno ad M sono degli automorfismi.

3) Per ogni spazio vettoriale V su $\mathbb{K}$ e per ogni $\lambda \in \mathbb{K}$, è un endomorfismo di V (automorfismo per $\lambda \neq 0$) la *dilatazione di ampiezza* λ definita da

$$\begin{array}{rccc} \Theta_\lambda: & V & \to & V \\ & v & \mapsto & \lambda v. \end{array}$$

Teorema 5.2. *Dato uno spazio vettoriale V di dimensione n su $\mathbb{K}$, data una sua base ordinata $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$, l'applicazione*

$$\begin{array}{rccc} \Phi_{\mathcal{B}}: & V & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ & v & \longmapsto & (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \end{array}$$

che ad ogni vettore v associa la sua n-pla di coordinate rispetto a $\mathcal{B}$ è un isomorfismo.

Corollario 5.1. *Ogni spazio vettoriale di dimensione n su $\mathbb{K}$ è isomorfo a $\mathbb{K}^n$; tutti gli spazi vettoriali di dimensione n su $\mathbb{K}$ sono fra loro isomorfi.*

Il corollario precedente giustifica la denominazione di *spazio vettoriale standard di dimensione n su $\mathbb{K}$* che denota $\mathbb{K}^n$. TALI SPAZI SONO GLI AMBIENTI IN CUI SIMULEREMO TUTTI GLI SPAZI VETTORIALI DI DIMENSIONE FINITA. Ciò ha senso in particolare per la parte terza della seguente proposizione.

Proposizione 5.5. *Siano V e W spazi vettoriali qualunque su $\mathbb{K}$, e sia $F : V \to W$ lineare. Siano $v_1, \dots, v_k \in V$ vettori distinti. In tal caso:*

1. *se $F(v_1), \dots, F(v_k)$ sono linearmente indipendenti, allora anche $v_1, \dots, v_k$ lo sono;*

2. *se F è iniettiva e $v_1, \dots, v_k$ sono linearmente indipendenti, allora anche $F(v_1), \dots, F(v_k)$ lo sono;*

3. *se F è un isomorfismo, allora $v_1, \dots, v_k$ sono linearmente indipendenti se e solo se $F(v_1), \dots, F(v_k)$ lo sono.*

Teorema 5.3. *Siano V e W spazi vettoriali su $\mathbb{K}$ di dimensione finita. Allora V è isomorfo a W se e solo se $\dim V = \dim W$.*

5.3 Nucleo e immagine.

Data una qualunque applicazione lineare $F : V \to W$, possiamo sempre definire i due insiemi *nucleo* di F come $\mathrm{Ker}\ F \overset{def}{=} F^{-1}(\{O_W\})$ e *immagine* di F come $\mathrm{Im}\ F \overset{def}{=} F(V)$, cioè

$$\mathrm{Ker}\ F = \{v \in V \mid F(v) = O_W\}$$

$$\mathrm{Im}\ F = \{F(v) \mid v \in V\}.$$

Proposizione 5.6. *L'insieme* $\mathrm{Ker}\ F$ *è sottospazio vettoriale di V e* $\mathrm{Im}\ F$ *è sottospazio vettoriale di W.*

Proposizione 5.7. *Sia $F : V \to V'$ un'applicazione lineare tra spazi vettoriali e sia $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ una base ordinata di V. Allora*

$$\mathrm{Im}\ F = L(F(v_1), \dots, F(v_n)).$$

Teorema 5.4 (equazione dimensionale). *Se V è di dimensione finita, allora:*

$$\dim(\text{Ker } F) + \dim(\text{Im } F) = \dim V.$$

Proposizione 5.8. *Un'applicazione lineare F è iniettiva se e solo se* $\text{Ker } F = \{O_V\}$ *(cioè se* $\dim(\text{Ker } F) = 0$*).*

Teorema 5.5. *Un endomorfismo su uno spazio di dimensione finita è invertibile se e solo se è suriettivo se e solo se è iniettivo.*

Dimostrazione.
$F : V \to V$ è iniettivo $\Leftrightarrow$ $\dim(\text{Ker } F) = 0$ $\Leftrightarrow$ $\dim(\text{Im } F) = \dim V$ $\Leftrightarrow$ $\text{Im } F = V$ $\Leftrightarrow$ F è suriettiva. $\square$

Capitolo 6

Rappresentazioni matriciali di applicazioni lineari.

6.1 Applicazioni lineari, basi, matrici.

L'insieme delle applicazioni lineari da uno spazio vettoriale $(V, \oplus, \odot, \mathbb{K})$ ad uno spazio vettoriale $(W, +, \cdot, \mathbb{K})$ si denota $\mathrm{L}(V, W)$. In particolare, se $V = W$ scriveremo $\mathrm{End}(V)$ invece che $\mathrm{L}(V, V)$. Su tale insieme definiamo una somma e un prodotto per scalari come segue. Comunque dati $\lambda \in \mathbb{K}$, $F, G \in \mathrm{L}(V, W)$ sia, $\forall v \in V$

$$(F + G)(v) \stackrel{def}{=} F(v) + G(v),$$

$$(\lambda \cdot F)(v) \stackrel{def}{=} \lambda \cdot F(v).$$

Proposizione 6.1. $(\mathrm{L}(V, W), +, \cdot, \mathbb{K})$ *è uno spazio vettoriale.*

Nel seguito, $\circ$ indicherà la solita composizione di applicazioni.

Proposizione 6.2. $(\mathrm{End}(V), +, \circ)$ *è un anello unitario, non commutativo se* $\dim V > 1$.

Siano ora V, W spazi vettoriali su $\mathbb{K}$, con $\dim V = n$, $\dim W = m$, siano $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$, $\mathcal{B}' = (w_1, \dots, w_m)$ basi ordinate di V e W rispettivamente. Data un'applicazione lineare $F : V \to W$, scriviamo (in colonna) le m-ple di coordinate, rispetto a $\mathcal{B}'$, dei trasformati dei vettori di $\mathcal{B}$:

$$[F(v_1)]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} c_{11} \\ \vdots \\ c_{m1} \end{pmatrix}, \ldots, [F(v_n)]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} c_{1n} \\ \vdots \\ c_{mn} \end{pmatrix}.$$

Sia $C = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$.

Teorema 6.1. *Per ogni* $v \in V$*, se* $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$*, allora*

$$[F(v)]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = C \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}
[F(v)]_{\mathcal{B}'} &= [F(x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n)]_{\mathcal{B}'} \\
&= [x_1 F(v_1) + \cdots + x_n F(v_n)]_{\mathcal{B}'} \\
&= x_1 \begin{pmatrix} c_{11} \\ \vdots \\ c_{m1} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} c_{1n} \\ \vdots \\ c_{mn} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

□

La matrice C è detta *matrice associata a* F *rispetto a* $\mathcal{B}$ *e* $\mathcal{B}'$, e viene indicata con $[F]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$.

Esempi.
1) Siano V, W gli spazi vettoriali dei polinomi in x, a coefficienti reali, di grado rispettivamente ≤ 3 e ≤ 2; siano $\mathcal{B} = (1, x, x^2, x^3)$, $\mathcal{B}' = (1, x, x^2)$. La matrice associata alla derivata è quella formata dalle colonne di coordinate,

rispetto a $\mathcal{B}'$, delle derivate dei polinomi di $\mathcal{B}$:

$$\left[\frac{d}{dx}\right]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix};$$

ciò significa che per ottenere la derivata di un polinomio p posso: metterne i coefficienti (coordinate rispetto a $\mathcal{B}$) in colonna, moltiplicarli a destra della matrice, ottenendo così le coordinate di $\dfrac{dp(x)}{dx}$ rispetto a $\mathcal{B}'$; il polinomio derivato si ottiene moltiplicando tali coordinate per i polinomi di $\mathcal{B}'$ e sommando.

2) Sia $V = W = \mathbb{R}^3$, e sia $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$ la base canonica. Se $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è definita da $F(x, y, z) = (2x-z, 3x, 4y)$, la matrice sarà ottenuta trasformando i vettori della base canonica e scrivendo in colonna le coordinate dei trasformati:

$$[F]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Teorema 6.2. *Per ogni coppia di basi $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ fissata, l'applicazione che ad ogni trasformazione lineare $F : V \to W$ associa la matrice $[F]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ è un isomorfismo di spazi vettoriali da $(\mathrm{L}(V, W), +, \cdot, \mathbb{K})$ a $(\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}), +, \cdot, \mathbb{K})$.*

Vediamo ora che le matrici associate a una applicazione lineare si comportano bene rispetto alla composizione delle applicazioni stesse.

Proposizione 6.3. *Siano $F : V \to W$ e $G : W \to U$ due trasformazioni lineari e siano $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ e $\mathcal{B}''$ basi ordinate rispettivamente di V, W e U. Allora*

$$[G \circ F]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}''} = [G]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}''} \cdot [F]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}.$$

Corollario 6.1. *La trasformazione lineare $F; V \to W$ è un isomorfismo se e solo se la matrice $[F]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ è invertibile, dove $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ sono basi ordinate qualunque di V e W. Inoltre si ha*

$$[F^{-1}]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = ([F]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'})^{-1}.$$

In particolare, se $W = V$ e $\mathcal{B}' = \mathcal{B}$ si ha $[F^{-1}]_{\mathcal{B}} = ([F]_{\mathcal{B}}^{-1}$.

Un *omomorfismo* (di anelli, di campi, ecc.) f da $(A, \top, \perp)$ a $(B, +, \cdot)$ è un'applicazione $f : A \to B$ tale che

$$f(a \top b) = f(a) + f(b) \quad \text{e} \quad f(a \perp b) = f(a) \cdot f(b).$$

In ogni caso, un *isomorfismo* è un omomorfismo biiettivo.

Consideriamo ora il caso di $W = V$, $\mathcal{B}' = \mathcal{B}$. La matrice associata ad un endomorfismo F sarà quadrata; si denoterà con $[F]_{\mathcal{B}}$.

Teorema 6.3. *Per ogni base $\mathcal{B}$ fissata, l'applicazione che ad ogni endomorfismo $F : V \to V$ associa la matrice $[F]_{\mathcal{B}}$ è un isomorfismo di anelli da $(\mathrm{End}(V), +, \circ)$ a $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \cdot)$.*

6.2 Cambiamenti di base.

In uno spazio vettoriale V su $\mathbb{K}$, di dimensione finita, siano $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$, $\mathcal{B}' = (w_1, \ldots, w_n)$ due basi ordinate di V. Il *cambiamento di base* da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ è l'applicazione da $\mathbb{K}^n$ a sè che alla n-pla di coordinate di ogni $v \in V$ rispetto a $\mathcal{B}$ fa corrispondere la n-pla di coordinate dello stesso v rispetto a $\mathcal{B}'$.

Proposizione 6.4. *Ogni cambiamento di base è un automorfismo di $\mathbb{K}^n$.*

Teorema 6.4. *Il cambiamento di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ si ottiene moltiplicando la colonna delle coordinate di ogni $v \in V$, rispetto a $\mathcal{B}$, a destra di un'opportuna matrice $\underset{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Tale matrice ha come i-esima colonna $(\forall i \in \{1, \ldots, n\})$ la n-pla delle coordinate di v_i rispetto a $\mathcal{B}'$.*

Dimostrazione.
$\underset{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}{M}$ è la matrice associata all'applicazione identità rispetto alle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$, cioè $\underset{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}{M} = [\mathrm{Id}_V]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$. □

Proposizione 6.5. *La matrice di ogni cambiamento di base è invertibile.*

Lemma 6.1. *Siano $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ tre basi ordinate di V con $\dim V = n$. Allora:*

1. $\underset{\mathcal{B}\to\mathcal{B}}{M} = I_n$;

2. $\underset{\mathcal{C}\to\mathcal{B}}{M} = \underset{\mathcal{B}\to\mathcal{C}}{M}^{-1}$;

3. $\underset{\mathcal{B}\to\mathcal{D}}{M} = \underset{\mathcal{C}\to\mathcal{D}}{M} \cdot \underset{\mathcal{B}\to\mathcal{C}}{M}$.

ATTENZIONE: per costruire la matrice bisogna conoscere le coordinate dei vettori di $\mathcal{B}$ rispetto a $\mathcal{B}'$. Se, come spesso succede, conosciamo $\mathcal{B}'$ in funzione di $\mathcal{B}$, basta invertire (quando lo sapremo fare) la matrice del cambiamento di base da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$.

Esempio.
Trovare la matrice dei cambiamenti di base in $\mathbb{R}^2$ da $\mathcal{B}' = ((1,2),(1,3))$ alla base naturale $\mathcal{B} = ((1,0),(0,1))$ e da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$. La matrice del cambiamento di base da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$ è:

$$\underset{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

La matrice del cambiamento di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ è dunque

$$\underset{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}{M} = \underset{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}{M}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Teorema 6.5. *Siano V e V' due spazi vettoriali di dimensione rispettivamente n e m e sia $F : V \to V'$ una trasformazione lineare. Siano inoltre $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ due basi ordinate di V e $\mathcal{B}'$, $\mathcal{C}'$ due basi ordinate di V'. Allora*

$$[F]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}'} = \underset{\mathcal{B}'\to\mathcal{C}'}{M} \cdot [F]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \cdot \underset{\mathcal{C}\to\mathcal{B}}{M} = \underset{\mathcal{B}'\to\mathcal{C}'}{M} \cdot [F]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \cdot \underset{\mathcal{B}\to\mathcal{C}}{M}^{-1}.$$

In particolare se $V = V'$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$ e $\mathcal{C} = \mathcal{C}'$ si ha

$$[F]_{\mathcal{C}} = \underset{\mathcal{B}\to\mathcal{C}}{M} \cdot [F]_{\mathcal{B}} \cdot \underset{\mathcal{B}\to\mathcal{C}}{M}^{-1}.$$

Dimostrazione.
$[F]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}'} = [\mathrm{Id}_{V'} \circ F \circ \mathrm{Id}_V]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}'} = [\mathrm{Id}_{V'}]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{C}'} \cdot [F]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \cdot [\mathrm{Id}_V]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \underset{\mathcal{B}'\to\mathcal{C}'}{M} \cdot [F]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \cdot \underset{\mathcal{C}\to\mathcal{B}}{M} = \underset{\mathcal{B}'\to\mathcal{C}'}{M} \cdot [F]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \cdot \underset{\mathcal{B}\to\mathcal{C}}{M}^{-1}$. □

Date $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ esse si dicono *simili* se esiste una matrice invertibile $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tale che sia

$$B = P^{-1} \cdot A \cdot P.$$

La similitudine è una relazione di equivalenza sull'insieme $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Osservazione 6.1. Una matrice *scalare* (cioè del tipo λI_n) è simile solo a se stessa. Si può dimostrare che tale proprietà caratterizza le matrici scalari.

Teorema 6.6. $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *rappresentano lo stesso endomorfismo su uno spazio vettoriale V se e solo se sono simili.*

Capitolo 7

Determinanti.

7.1 Permutazioni.

Una *permutazione* di un insieme è una qualunque applicazione biiettiva dall'insieme a se stesso.

Proposizione 7.1. *L'insieme delle permutazioni di un qualunque insieme non vuoto, con l'operazione di composizione, costituisce un gruppo.*

Prevalentemente tratteremo permutazioni dell'insieme $\{1, 2, \ldots, n\}$; l'insieme di tali permutazioni si indica con S_n.

Esempio.
La permutazione $\sigma \in S_3$ definita da

$$\sigma : \begin{array}{ccc} 1 & \mapsto & 3 \\ 2 & \mapsto & 1 \\ 3 & \mapsto & 2. \end{array}$$

Corollario 7.1. $(S_n, \circ)$ *è un gruppo di* $n!$ *elementi, non abeliano per* $n > 2$.

Data una permutazione $\sigma \in S_n$, una coppia (k, i) di interi in $\{1, \ldots, n\}$ si dice *in inversione* per σ se

$$k < i \ \text{ e } \ \sigma(i) < \sigma(k).$$

σ si dice *pari* (o *di classe pari*) se il numero di coppie in inversione per σ è pari, (*di classe*) *dispari* altrimenti. Il *segno* (o *parità*) di σ è il numero

$$\mathrm{sgn}(\sigma) \overset{def}{=} \begin{cases} +1 & \text{se } \sigma \text{ è pari} \\ -1 & \text{se } \sigma \text{ è dispari.} \end{cases}$$

Proposizione 7.2. *In ogni S_n valgono:*

1. *la permutazione identica è di classe pari;*
2. *per ogni $\sigma \in S_n$, σ e σ^{-1} hanno la stessa parità;*
3. $\mathrm{sgn}(\sigma \circ \tau) = \mathrm{sgn}(\sigma) \cdot \mathrm{sgn}(\tau)$.

Dati comunque, in $\{1, \dots, \}$, $h \neq k$, chiamiamo *trasposizione* di h e k la permutazione α_{hk} definita da:

$$\alpha_{hk}(i) \overset{def}{=} \begin{cases} k & \text{se } i = h \\ h & \text{se } i = k \\ i & \text{se } i \neq h, k. \end{cases}$$

Proposizione 7.3. *Ogni trasposizione è una permutazione è di classe dispari.*

7.2 Determinante.

Data $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, si chiama *determinante* di A l'elemento di $\mathbb{K}$

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \overset{def}{=} \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdot \dots \cdot a_{n\sigma(n)}.$$

Esempi.
1) $|a_{11}| = a_{11}$.

2) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

3) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$.

4) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = -23$, $\quad \begin{vmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 1 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & -9 \end{vmatrix} = 33$.

7.3 Proprietà dei determinanti.

Proposizione 7.4. $|{}^tA| = |A|$.

Questa proposizione consente di "raddoppiare" tutti i teoremi sui determinanti: ogni enunciato valido che coinvolga le righe di una matrice varrà anche per le colonne.

Teorema 7.1. *Sia* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. *Se A ha una riga (colonna) nulla, allora* $|A| = 0$.
2. *Se A ha due righe (colonne) uguali, allora* $|A| = 0$.
3. *Se A è triangolare (in particolare diagonale), allora*

$$|A| = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Cosa succede al determinante se applichiamo operazioni elementari di riga (o di colonna) a una matrice? Possiamo utilizzare tali operazioni per semplificare il calcolo del determinante?

Teorema 7.2. *Se $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si ottiene da A:*

1. *scambiando due righe (colonne) di A, allora* $|B| = -|A|$;
2. *moltiplicando una sola riga (colonna) di A per $\lambda \in \mathbb{K}$, allora* $|B| = \lambda |A|$;
3. *sommando ad una riga (colonna) una combinazione lineare di ALTRE righe (colonne), allora* $|B| = |A|$.

Teorema 7.3 (di Binet). *Per ogni* $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|\,.$$

Corollario 7.2. *Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ammette inversa allora*

$$|A| \neq 0 \quad \text{e} \quad \left|A^{-1}\right| = \frac{1}{|A|}.$$

Dimostrazione.
Si ha $1 = |I_n| = |A \cdot A^{-1}| = |A| \cdot |A^{-1}|$. $\square$

Si può dimostrare che vale anche il viceversa e questo permette di sapere quando una matrice quadrata è invertibile.

Teorema 7.4. *Una matrice A è invertibile* $\Leftrightarrow |A| \neq 0$.

7.4 Sviluppo di Laplace.

Sia $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Fissati due sottoinsiemi $I \subset \{1, \ldots, m\}$ e $J \subset \{1, \ldots, n\}$, si può formare una *sottomatrice* B di A prendendo gli elementi di A i cui indici di riga stanno in I e i cui indici di colonna stanno in J, cioè

$$B = (a_{i_h j_k})_{\substack{i_h \in I \\ j_k \in J}} .$$

Una sottomatrice quadrata viene anche chiamata *minore* .

Un minore si dice *principale* se $I = J$.

Esempio.
Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -9 & \sqrt{6} \\ 5 & -1 & 3 & 4 & 8 \\ -2 & 7 & \pi & -6 & -1 \\ 1/3 & -5 & -8 & 6 & -\pi \end{pmatrix}$$

allora la sottomatrice estratta da A mediante i sottoinsiemi $I = \{2, 4\}$, $J = \{1, 4, 5\}$ è

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 8 \\ 1/3 & 6 & -\pi \end{pmatrix}.$$

Un minore ($I = \{1, 2\}$, $J = \{1, 3\}$) è B, ma non è principale; un minore principale ($I = \{2, 4\} = J$) è C:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Sia ora $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Il minore corrispondente a $I = \{1, \ldots, n\} - \{i\}$ e $J = \{1, \ldots, n\} - \{j\}$ si indica $A_{\hat{i}}^{\hat{j}}$ e viene chiamato *minore complementare dell'elemento* a_{ij}. Il *cofattore* (o *complemento algebrico*) dell'elemento a_{ij} è:

$$A_{ij} \stackrel{def}{=} (-1)^{i+j} \left| A_{\hat{i}}^{\hat{j}} \right|.$$

Esempio.
Nella matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 1 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & -9 \end{pmatrix}$$

abbiamo:

$$a_{23} = 7, \qquad A_{\hat{2}}^{\hat{3}} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad A_{23} = +6.$$

Teorema 7.5 (di Laplace). *Sia* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. *per ogni* $r \in \{1, \ldots, n\}$ *vale:*

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{rj} A_{rj}$$

e anche

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ir} A_{ir}.$$

Le espressioni a secondo membro si chiamano *sviluppo di Laplace di* $|A|$, rispettivamente secondo la r-esima riga e secondo la r-esima colonna.

Esempio.
Calcoliamo il determinante di

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 1 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & -9 \end{pmatrix},$$

utilizzando il teorema di Laplace; con lo sviluppo secondo la 3^a colonna:

$$|A| = 6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + 7 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + (-9) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 33;$$

con lo sviluppo secondo la 1^a riga:

$$|A| = 0 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 4 & -9 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & -9 \end{vmatrix} + 6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 33.$$

Chiaramente, più zeri ci sono in una riga o colonna, più agevole è lo sviluppo; possiamo allora eseguire operazioni di riga che non cambino il determinante per ottenere una riga o colonna con molti zeri.

Esempio.
Per la precedente matrice A, possiamo considerare una matrice B ottenuta da A sottraendo alla 3^a riga la 2^a moltiplicata per 2, poi sviluppare secondo la 1^a colonna:

$$|A| = |B| = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 1 & 5 & 7 \\ 0 & -6 & -23 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ -6 & -23 \end{vmatrix} = 33.$$

7.5 Matrice inversa.

Indichiamo con $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ l'insieme delle matrici invertibili.

Proposizione 7.5. $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), \cdot)$ *è un gruppo, non abeliano per* $n > 1$.

Teorema 7.6. *Sia* $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$*. Allora*

$$A^{-1} = (b_{ij}), \quad \textit{con} \;\; b_{ij} = \frac{A_{ji}}{|A|}.$$

Quindi un metodo per calcolare l'inversa di A consiste in: costruire la matrice dei complementi algebrici, formarne la trasposta, dividerla per $|A|$.

Esempio.
Con

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 1 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & -9 \end{pmatrix}$$

abbiamo

$$A^{-1} = \frac{1}{33} {}^t\!\begin{pmatrix} -73 & 23 & -6 \\ 51 & -12 & 6 \\ -9 & 6 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -73/33 & 17/11 & -3/11 \\ 23/33 & -4/11 & 2/11 \\ -2/11 & 2/11 & -1/11 \end{pmatrix}.$$

7.6 Determinante di un endomorfismo.

Proposizione 7.6. *Se* $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *sono simili,allora* $|A| = |B|$.

Dimostrazione.
Si ha: $|B| = |P^{-1}AP| = |P^{-1}| \cdot |A| \cdot |P| = |A|$. □

ATTENZIONE: non vale l'implicazione inversa; è facile trovare matrici NON simili, con uguale determinante. Per esempio le matrici

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

hanno entrambe determinante nullo, ma non sono simili.
Il teorema precedente garantisce la buona definizione del *determinante* di un endomorfismo T su uno spazio vettoriale V come il determinante della matrice che rappresenta T rispetto ad una base qualunque.

Proposizione 7.7. *Valgono le seguenti relazioni:*

1. $\det(\mathrm{Id}_V) = 1$;
2. $\det(T \circ T') = \det(T) \cdot \det(T')$.

7.7 Rango di una matrice e determinante.

Conveniamo che la matrice quadrata di ordine 0 abbia determinante $= 1$.

Teorema 7.7. *Sia* $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$, *allora* $\mathrm{rk}A = r$ *se e solo se:*

1. *esiste un minore di* A *di ordine* r *con determinante* $\neq 0$, *e*
2. *ogni minore di* A *di ordine* $> r$ *ha determinante* $= 0$.

Data $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$, dato un suo minore M ottenuto dagli insiemi di indici I e J, chiamiamo *orlato* di M ogni minore di A ottenuto aggiungendo un indice di riga a I e un indice di colonna a J.

Teorema 7.8 (di Kronecker). *Si ha* $\mathrm{rk}A = r$ *se e solo se:*

1. *esiste un minore* M *di* A *di ordine* r *con determinante* $\neq 0$, *e*

2. ogni orlato di M ha determinante $= 0$.

Esempio.
La matrice
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -3 \\ 3 & 6 & -1 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & -1 \\ 5 & 10 & 5 & -9 \end{pmatrix}$$
ha minori (ognuno orlato del precedente)
$$O_1 = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}, \quad O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix},$$
$$O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 6 & -1 & 5 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$
con determinanti $\neq 0$, ma ogni orlato di O_3 ha determinante nullo. Perciò $\mathrm{rk}A = 3$.

7.8 Sistemi di Cramer.

Teorema 7.9 (di Cramer). *Dato un sistema di n equazioni lineari in n incognite*
$$A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$
con $|A| \neq 0$, esso ammette esattamente una soluzione.

Dimostrazione.
Esiste A^{-1}, e allora, moltiplicando a sinistra ambo i membri per A^{-1}, si ottiene
$$\mathbf{x} = A^{-1} \cdot A \cdot \mathbf{x} = A^{-1} \cdot \mathbf{b}.$$
□

Dalla dimostrazione otteniamo un metodo per la risoluzione di un sistema *di Cramer* (o *normale*), cioè con matrice incompleta $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$: moltiplicare per A^{-1} la colonna dei termini noti. Purtroppo tale metodo è molto oneroso dal punto di vista computazionale perchè è necessario il calcolo di A^{-1}. Si può ovviare seguendo il seguente procedimento.

Teorema 7.10. *Sia $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ un sistema di Cramer allora la soluzione* $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ *del sistema si ottiene con la seguente formula (di Cramer):*

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{|A_1|}{|A|} \\ \vdots \\ x_n = \dfrac{|A_n|}{|A|} \end{cases}$$

dove A_i è la matrice ottenuta da A sostituendo la colonna $A^{(i)}$ con $\mathbf{b}$.

Sia ora dato un sistema possibile di m equazioni in n incognite, con matrice incompleta e completa di rango r. Un nuovo metodo per la risoluzione è il seguente.

1) Trovare un minore M della matrice incompleta di ordine r e determinante $\neq 0$.

2) Eliminare le $m - r$ equazioni i cui coefficienti non compaiono in M.

3) Trasformare in altrettanti parametri le $n - r$ incognite i cui coefficienti non compaiono in M, e portarle, con i loro coefficienti, nei termini noti.

4) Ora abbiamo un sistema di Cramer, con termini noti dipendenti da $n - r$ parametri, avente M come matrice incompleta. Risolviamolo, per esempio con la formula di Cramer.

Esempio.
Dato il sistema

$$\begin{cases} z - 3t = 1 \\ 3x + 6y - z + 5t = 2 \\ 2x + 4y + z - t = -1 \\ 5x + 10y + 5z - 9t = -6, \end{cases}$$

la matrice incompleta è l'ultima trattata nel precedente paragrafo; la completa è

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -1 & 5 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & -1 & -1 \\ 5 & 10 & 5 & -9 & -6 \end{pmatrix}$$

e l'ulteriore orlato del minore O_3 già considerato ha determinante nullo (perciò il rango della completa è anch'esso 3). Applicando il metodo con $M = O_3$, otteniamo

$$\begin{cases} x = \gamma \\ \\ z - 3t = 1 \\ 6y - z + 5t = 2 - 3\gamma \\ 4y + z - t = -1 - 2\gamma \end{cases}$$

risolvendo il sistema tramite la formula di Cramer:

$$|M| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 6 & -1 & 5 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -16, \qquad |M_1| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2-3\gamma & -1 & 5 \\ -1-2\gamma & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2\gamma - 10,$$

$$|M_2| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 6 & 2-3\gamma & 5 \\ 4 & -1-2\gamma & -1 \end{vmatrix} = 68, \quad |M_3| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 6 & -1 & 2-3\gamma \\ 4 & 1 & -1-2\gamma \end{vmatrix} = 24,$$

e quindi

$$\begin{cases} y = \dfrac{2\gamma - 10}{\text{-16}} = \dfrac{5-\gamma}{8} \\ \\ z = \dfrac{68}{\text{-16}} = -\dfrac{17}{4} \\ \\ t = \dfrac{24}{\text{-16}} = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

che, ricordando $x = \gamma$, fornisce le soluzioni.

Capitolo 8

Rappresentazioni di sottospazi.

8.1 Rango, nucleo, immagine.

Un sistema lineare possibile si dice *di rango* r se le sue matrici completa e incompleta hanno rango r. Si dice *minimo* se il suo rango è uguale al numero delle sue equazioni.

Teorema 8.1. *Sia* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ *la matrice che rappresenta una trasformazione lineare* $T : V \to W$ *rispetto alle basi* $\mathcal{B}$ *e* $\mathcal{B}'$*, e sia* r *il suo rango. Allora*

a) $\dim(\mathrm{Im}\ T) = r$

b) $\dim(\mathrm{Ker}\ T) = n - r$.

Dimostrazione.
a) Come abbiamo già visto, i trasformati dei vettori di $\mathcal{B}$ formano un insieme di generatori di Im T. Attraverso $\Phi_{\mathcal{B}'}$ a tali trasformati corrispondono le colonne di A e ad Im T corrisponde lo spazio colonna di A.
b) Si deduce immediatamente dall'equazione dimensionale di T: $\dim(\mathrm{Ker}\ T) = n - \dim(\mathrm{Im}\ T)$. □

Con la notazione dell'ultimo teorema, notiamo che un vettore di V appartiene a Ker T se e solo se la n-pla delle sue coordinate rispetto a $\mathcal{B}$ è una soluzione del sistema lineare omogeneo

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \left.\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right\} m \text{ zeri.}$$

Diremo che il sistema *rappresenta* Ker T. Tale sistema è minimo se e solo se il rango di A è m. Ogni sistema ottenuto da questo compiendo operazioni di riga sulla matrice dei coefficienti rappresenta lo stesso sottospazio.

Si noti che, se nello studio del rango di A abbiamo individuato un minore M di ordine r con $|M| \neq 0$ e tale che ogni suo orlato abbia determinante $= 0$, ne possiamo ottenere due utili informazioni:

1) le righe di A da cui abbiamo estratto M possono essere utilizzate come n-ple di coefficienti di un sistema minimo che rappresenta Ker T rispetto a $\mathcal{B}$;

2) le colonne di A da cui abbiamo estratto M possono essere utilizzate come m-ple di coordinate, rispetto a $\mathcal{B}'$, di vettori di una base di Im T.

8.2 Rappresentazione cartesiana e parametrica di sottospazi.

Dato uno spazio vettoriale V su $\mathbb{K}$, di dimensione n, ogni suo sottospazio vettoriale U può essere rappresentato come nucleo o come immagine di opportune trasformazioni lineari. Nel primo caso si otterrà una rappresentazione cartesiana, nel secondo una rappresentazione parametrica del sottospazio U.

Teorema 8.2. *Ogni sottospazio vettoriale U di dimensione k dello spazio vettoriale V (di dimensione n) può essere rappresentato, rispetto ad una base di V, da un sistema di $n-k$ equazioni lineari omogenee in n incognite, di rango $n-k$.*

Un tale sistema si dice *rappresentazione cartesiana* del sottospazio.
Una *rappresentazione parametrica* di un sottospazio U è invece quella in cui ogni vettore di U viene rappresentato come combinazione lineare di vettori

di una base di U. In tal caso U viene visto come immagine di una trasformazione lineare iniettiva.

Esempi.
Negli esempi seguenti V è uno spazio vettoriale di dimensione 5 su $\mathbb{R}$. Le coordinate x, y, z, t, u sono scritte rispetto ad una fissata base $\mathcal{B}$ di V.

1) Il sistema, di rango 2

$$\begin{cases} x - 2y + z - t - u = 0 \\ 3x - z + 2u = 0 \end{cases}$$

è rappresentazione cartesiana di un sottospazio U di V di dimensione 3. U viene visto come Ker T, con $T : V \to \mathbb{R}^2$ rappresentata, rispetto a $\mathcal{B}$ e alla base naturale di $\mathbb{R}^2$, dalla matrice dei coefficienti

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

2) Invece, la scrittura

$$\begin{cases} x = \alpha - 2\beta \\ y = 2\alpha + 3\beta \\ z = -\alpha + \beta \\ t = 3\alpha \\ u = \alpha + 2\beta \end{cases}$$

è una rappresentazione parametrica di un sottospazio W di dimensione 2; infatti ogni vettore si può vedere come combinazione lineare dei vettori w_1 e w_2 (che risultano linearmente indipendenti, quindi formano una base di W) le cui coordinate si ottengono ponendo rispettivamente $\alpha = 1$, $\beta = 0$ e $\alpha = 0, \beta = 1$:

$$[v]_{\mathcal{B}} = [\alpha w_1 + \beta w_2]_{\mathcal{B}} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

W viene visto come Im S, con $S : \mathbb{R}^2 \to V$ rappresentato, rispetto alla base naturale di $\mathbb{R}^2$ e a $\mathcal{B}$, dalla matrice (di rango 2)

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \\ -1 & 1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Come passare dalla forma cartesiana a quella parametrica? Facile: si risolve il sistema.

Esempio.
Per il sottospazio U dato prima, si ottiene

$$\begin{cases} x = \gamma \\ y = 2\gamma + \varepsilon/2 - \delta/2 \\ z = 3\gamma + 2\varepsilon \\ t = \delta \\ u = \varepsilon \end{cases}.$$

Per passare dalla forma parametrica a quella cartesiana si deve prima trovare una base del sottospazio, fissando i parametri come sopra (cioè trovando i trasformati della base naturale), poi applicare il seguente metodo per trovare una rappresentazione cartesiana di una chiusura lineare.

Con V di dimensione n su $\mathbb{K}$ e $\mathcal{B}$ base fissata, siano dati vettori $v_1, \ldots, v_k$ linearmente indipendenti. Siano

$$[v_1]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \ldots, [v_k]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix}.$$

La matrice formata da queste colonne ha rango k, dato che i vettori sono linearmente indipendenti. In essa si può dunque trovare un minore M di ordine k con $|M| \neq 0$. Si formi ora la matrice

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & x_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & x_n \end{pmatrix};$$

si ha che M è un minore anche di questa matrice. Imponiamo a questa matrice di avere anch'essa rango k: in questo modo imponiamo alla colonna delle x di essere combinazione lineare delle altre, perciò imponiamo al generico vettore di V (di coordinate $(x_1, \ldots, x_n)$) di essere combinazione lineare di $v_1, \ldots, v_k$. Per fare ciò, costruiamo gli $n-k$ orlati di M e imponiamo ai loro determinanti di essere 0. Ne vengono le $n-k$ equazioni lineari omogenee di un sistema minimo che rappresenta la chiusura lineare di $\{v_1, \ldots, v_k\}$ rispetto a $\mathcal{B}$.

Esempio.
Con W come sopra, abbiamo visto che $W = L(\{w_1, w_2\})$. Nella matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & x \\ 2 & 3 & y \\ -1 & 1 & z \\ 3 & 0 & t \\ 1 & 2 & u \end{pmatrix}$$

ci sono minori di ordine 2 a determinante $\neq 0$. Scegliamo, per esempio,

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix};$$

allora il sistema cercato è ottenuto imponendo di esser nulli ai determinanti dei tre orlati di M:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & x \\ 2 & 3 & y \\ 3 & 0 & t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -2 & x \\ -1 & 1 & z \\ 3 & 0 & t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -2 & x \\ 3 & 0 & t \\ 1 & 2 & u \end{pmatrix}$$

cioè

$$\begin{cases} -9x - 6y + 7t = 0 \\ -3x - 6z - t = 0 \\ 6x - 4t + 6u = 0 \end{cases}.$$

Capitolo 9

Equazioni algebriche.

9.1 Funzioni polinomiali.

Dato un campo $\mathbb{K}$, ogni funzione polinomiale da $\mathbb{K}$ a $\mathbb{K}$ nella variabile x è una combinazione lineare delle funzioni potenza x^h ($h \in \mathbb{N}$).

I *coefficienti* della funzione sono gli scalari per cui sono moltiplicate le potenze di x. Il *grado* di una funzione polinomiale f è il massimo esponente di una potenza di x avente coefficiente non nullo, e viene denotato $\deg f$.

Le funzioni costanti non nulle hanno dunque grado 0, mentre non è definito (o è posto convenzionalmente a $-\infty$) il grado della costante nulla:

Teorema 9.1 (Principio di annullamento delle funzioni polinomiali). *Sia $\mathbb{K}$ un campo infinito. Una funzione polinomiale su $\mathbb{K}$ è la funzione costante nulla (cioè vale 0 per ogni $x \in \mathbb{K}$) se e solo se tutti i suoi coefficienti sono nulli.*

Osservazione 9.1. Tale teorema non vale in campi finiti. Per esempio la funzione polinomiale $x + x^2$ a coefficienti in $\mathbb{Z}_2$ è la funzione costante nulla.

Corollario 9.1 (Principio di identità delle funzioni polinomiali). *Sia $\mathbb{K}$ un campo infinito. Due funzioni polinomiali su $\mathbb{K}$ sono uguali (cioè associano lo stesso valore ad ogni $x \in \mathbb{K}$) se e solo se hanno coefficienti ordinatamente uguali.*

Un *polinomio su $\mathbb{K}$ in una indeterminata* è una successione finita di elementi di $\mathbb{K}$. Indicheremo con $\mathbb{K}[X]$ l'insieme di tutti i polinomi a coefficienti in $\mathbb{K}$,

che risulta essere uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ rispetto alle usuali operazioni di somma di polinomi e prodotto di un polinomio per uno scalare.
Ad ogni polinomio viene associata la funzione polinomiale che ha, ordinatamente, come coefficienti gli elementi della successione. Tale corrispondenza risulta essere una trasformazione lineare sempre suriettiva.

CONVENZIONE: I polinomi dovrebbero essere ben distinti dalle funzioni polinomiali. Nei casi maggiormente considerati in questo corso, cioè con campi infiniti, le due teorie si equivalgono, essendo le due strutture $\mathbb{K}[X]$ e $\mathbb{K}[x]$ isomorfe. Confonderemo quindi le due nozioni, scrivendo indifferentemente "polinomio" o "funzione polinomiale".

L'insieme dei polinomi e delle funzioni polinomiali su $\mathbb{K}$, in una indeterminata, verrà quindi indicato con $\mathbb{K}[x]$.

Denotiamo con 0 e 1 i polinomi costanti che mandano ogni elemento di $\mathbb{K}$ rispettivamente in 0 e in 1 di $\mathbb{K}$. Un polinomio si dice *monico* se il coefficiente del termine (cioè della potenza di x) di grado massimo è 1.

Proposizione 9.1. *Siano $p = a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m$ e $q = b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n$ polinomi non nulli su $\mathbb{K}$. Allora:*

1. *$p+q$ ha grado $\leq \max\{m,n\}$, e il suo i-esimo coefficiente è $c_i = a_i+b_i$;*
2. *se $\lambda \in \mathbb{K}-\{0\}$, $\lambda\cdot p$ ha grado m e il suo i-esimo coefficiente è $d_i = \lambda\cdot a_i$;*
3. *$p\cdot q$ ha grado $m+n$ e il suo i-esimo coefficiente è*

$$e_i = \sum_{h=0}^{i} a_h b_{i-h}.$$

Proposizione 9.2. *Se p è un qualunque polinomio, e $\lambda \in \mathbb{K}$, allora*

$$0+p=p, \quad \lambda\cdot 0 = 0, \quad 0\cdot p = 0, \quad 1\cdot p = p.$$

Proposizione 9.3. *L'insieme $\mathbb{K}[x]$, con somma e prodotto per scalari, è uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$. Se $\mathbb{K}$ è un campo infinito, esso è di dimensione infinita e una sua base è l'insieme $\{x^h \mid h \in \mathbb{N}\}$.*

Proposizione 9.4. *L'insieme* $\mathbb{K}[x]$, *con somma e prodotto di polinomi, è un anello commutativo unitario.*

Teorema 9.2. *Dati* $f, g \in \mathbb{K}[x]$, *con* $g \neq 0$, *esistono unici* $q, r \in \mathbb{K}[x]$ *tali che*

$$f = qg + r,$$

dove $r = 0$ *oppure* $\deg r < \deg g$.

I polinomi q ed r dell'ultimo teorema si chiamano rispettivamente *quoziente* e *resto* della divisione di f per g. Se $r = 0$, diciamo che g *divide* f.

Proposizione 9.5. *Dati polinomi non nulli* f, g, *esiste ed è unico il polinomio monico* d *tale che:*

1. d *divide* f *e* g,

2. *se un polinomio divide* f *e* g, *allora divide anche* d.

Tale polinomio d si chiama *massimo comun divisore* di f e g. Se $d = 1$, allora f e g si dicono *primi fra loro.*

Un polinomio p si dice *irriducibile* se i suoi unici divisori sono le costanti e i polinomi $\lambda p \quad (\lambda \neq 0)$.

Teorema 9.3 (della fattorizzazione unica). *Sia* $f \in \mathbb{K}[x]$, $f \neq 0$. *Allora esiste ed è unico (a meno dell'ordine) il modo di scrivere*

$$f = \lambda p_1 \cdot \dots \cdot p_r$$

con $\lambda \in \mathbb{K}$ *e* $p_1, \dots, p_r$ *polinomi irriducibili monici.*

9.2 Equazioni algebriche.

Una *equazione algebrica in una incognita, a coefficienti in* $\mathbb{K}$, *di grado* n è ogni espressione del tipo

$$p(x) = 0,$$

dove $p \in \mathbb{K}[x]$ e $\deg p = n$. *Soluzione* dell'equazione è ogni elemento $\alpha \in \mathbb{K}$ tale che sia

$$p(\alpha) = 0.$$

Le soluzioni dell'equazione si chiamano anche *radici* del polinomio p.

Teorema 9.4 (di Ruffini). *Un elemento* $\alpha \in \mathbb{K}$ *è soluzione della equazione algebrica* $p(x) = 0$ *se e solo se* p *è divisibile per il polinomio* $(x - \alpha)$.

Un campo $\mathbb{K}$ si dice *algebricamente chiuso* se ogni polinomio $p \in \mathbb{K}[x]$ con $\deg p > 0$ ammette almeno una radice in $\mathbb{K}$.

Teorema 9.5 (fondamentale dell'algebra). $\mathbb{C}$ *è algebricamente chiuso.*

$\mathbb{R}$ invece NON è algebricamente chiuso (si pensi al polinomio $x^2 + 1$).

Una soluzione α dell' equazione algebrica $p(x) = 0$ si dice *di molteplicità* r se p è divisibile per $(x - \alpha)^r$ ma non per $(x - \alpha)^{r+1}$.

Corollario 9.2. *Sia* $p(x) = 0$ *un'equazione algebrica di grado* n*, a coefficienti in* $\mathbb{C}$*. Allora la somma delle molteplicità delle soluzioni è uguale a* n*.*

Consideriamo ora $\mathbb{R}$ come sottoinsieme (anzi sottocampo) di $\mathbb{C}$, e $\mathbb{Q}$ come sottoinsieme (sottocampo) di $\mathbb{R}$.

Proposizione 9.6. *Sia* $p \in \mathbb{R}[x]$*. L'equazione algebrica* $p(x) = 0$*, considerata a coefficienti complessi, se ammette una soluzione* $\alpha = a + ib$*, ammette come soluzione anche il complesso coniugato* $\overline{\alpha} = a - ib$*.*

Corollario 9.3. *Ogni* $f \in \mathbb{R}[x]$*,* $f \neq 0$ *si scompone in modo unico come*

$$f = \lambda p_1 \cdot \dots \cdot p_r$$

con $\lambda \in \mathbb{R}$ *e* $p_1, \dots, p_r$ *polinomi irriducibili monici di grado 1 e 2 a coefficienti in* $\mathbb{R}$*.*

Corollario 9.4. *Ogni polinomio a coefficienti reali, di grado dispari, ammette almeno una radice reale.*

Dato un polinomio $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ definito da $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, ogni coppia di coefficienti consecutivi <u>non nulli</u> (a_i, a_j) si chiamerà *permanenza* se i due coefficenti sono dello stesso segno, *variazione* altrimenti.

Teorema 9.6. *Sia* $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ *un polinomio che ha tutte radici reali. Allora il numero di variazioni di* p *è pari alla somma delle molteplicità delle radici positive.*

Esempio.
Dato il polinomio a radici tutte reali

$$2x - 5x^2 + x^4,$$

la sua successione di coefficienti non nulli $(2, -5, 1)$ presenta due variazioni; perciò la somma delle molteplicità delle radici positive è due. Quindi, visto che zero è una radice di molteplicità uno, il polinomio considerato avrà due radici positive (non necessariamente distinte), una nulla e una negativa.

Teorema 9.7. *Sia $f \in \mathbb{Z}[x]$, $f = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$. Le eventuali radici razionali di f sono della forma p/q, dove p è un intero divisore di a_0 e q è un intero divisore di a_n.*

Esempio.
Dato il polinomio

$$15 + 2x - 7x^2 + 8x^4 - 2x^5,$$

SE vi sono radici razionali, esse possono solo essere numeri della seguente lista: ± 1, $\pm 1/2$, ± 3, $\pm 3/2$, ± 5, $\pm 5/2$, ± 15, $\pm 15/2$

ATTENZIONE: anche se il teorema fondamentale dell'algebra garantisce l'esistenza di soluzioni, non vi sono metodi costruttivi per determinarle, se non mediante approssimazioni successive. Formule esatte e generali per ottenere le soluzioni di equazioni algebriche di grado ≤ 4 mediante operazioni di somma, prodotto, estrazione di radici sui coefficienti esistono (teor. di Cardano, Ferrari) ma NON POSSONO ESISTERE per grado ≥ 5 (teor. di Ruffini, Abel, Galois).

Capitolo 10

Autovalori.

10.1 Autovalori e autovettori.

Dato un endomorfismo $T : V \to V$ di uno spazio vettoriale V su $\mathbb{K}$, uno scalare λ si dice *autovalore di* T se esiste almeno un $v \in V - \{O_V\}$ per cui sia

$$T(v) = \lambda \cdot v$$

e in tal caso si chiama *autovettore di* T *relativo a* λ ogni $v \in V$ (compreso il vettore nullo) per cui valga tale uguaglianza. L'insieme degli autovalori di T viene detto *spettro* di T e sarà indicato con $\mathrm{Sp}(T)$.

Proposizione 10.1. *Dato un autovalore* λ *di un endomorfismo* T*, l'insieme*

$$U_\lambda = \{v \in V \mid T(v) = \lambda \cdot v\}$$

costituisce sottospazio vettoriale di V*.*

L'insieme U_λ viene detto *autospazio di* T *relativo a* λ (o semplicemente *autospazio relativo a* λ).

Proposizione 10.2. *Se* λ *è un autovalore di* T*, si ha* $U_\lambda = \mathrm{Ker}\ (T - \lambda \mathrm{Id}_V)$*.*

Corollario 10.1. 0 *è autovalore di* T *se e solo se* T *non è iniettiva, e in tal caso* $U_0 = \mathrm{Ker}\ (T)$*.*

Esempi.
1) Ogni dilatazione Θ_λ di V ha λ come unico autovalore e tutto V come

autospazio.

2) L'endomorfismo di $\mathbb{R}^2$ rappresentato, rispetto alla base naturale, dalla matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ ha autovalori 2 e 5, e i relativi autospazi sono quelli di equazioni $y = 0$ e $x = 0$ rispettivamente.

3) L'applicazione "derivata", come endomorfismo di $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, ha come autovalori tutti i numeri $\lambda \in \mathbb{R}$, e come autospazi $U_\lambda = L(\{e^{\lambda x}\})$.

4) Con V spazio vettoriale dei segmenti di un piano uscenti dal punto M, ogni rotazione di un angolo diverso da quello giro o quello piatto manda ogni segmento non nullo in un segmento che non gli è proporzionale; perciò essa non ha autovalori.

Proposizione 10.3. *Autovettori non nulli di un endomorfismo relativi ad autovalori distinti sono linearmente indipendenti.*

10.2 Polinomio caratteristico.

Sia ora V di dimensione finita n, e l'endomorfismo $T : V \to V$ sia rappresentato, rispetto ad una fissata base ordinata $\mathcal{B}$, dalla matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Teorema 10.1. *L'elemento $\lambda \in \mathbb{K}$ è autovalore di T se e solo se $|A - \lambda I_n| = 0$. In tal caso U_λ è rappresentato, rispetto a $\mathcal{B}$, dal sistema lineare omogeneo $(A - \lambda I_n) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$.*

Dimostrazione. $\exists v \in V - \{O_V\}$ tale che $T(v) = \lambda v \Leftrightarrow \exists \mathbf{x} \in \mathbb{K}^n - \{\mathbf{0}\}$ tale che $A \cdot \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x} = \lambda I_n \cdot \mathbf{x} \Leftrightarrow \exists \mathbf{x} \in \mathbb{K}^n - \{\mathbf{0}\}$ tale che $A \cdot \mathbf{x} - \lambda I_n \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow$ vi sono soluzioni diverse dalla ovvia per il sistema omogeneo $(A - \lambda I_n) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow |A - \lambda I_n| = 0$. □

La funzione polinomiale in x su $\mathbb{K}$ data da $|A - xI_n|$, le cui radici sono, per il teorema precedente, gli autovalori di T, si indica con $p_A(x)$ e si chiama *polinomio caratteristico* di A, e, grazie alla proposizione seguente, anche di T.

Gli *autovalori*, lo *spettro*, gli *autovettori* e gli *autospazi* di una matrice quadrata qualunque A sono rispettivamente gli autovalori, lo spettro, gli autovettori e gli autospazi dell'endomorfismo canonicamente associato ad A (vedi esempio 8 pag.31).

Proposizione 10.4. *Se due matrici sono simili, esse hanno uguale polinomio caratteristico.*

Dimostrazione.
Siano A e B matrici simili allora esiste $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tale che $B = P^{-1}AP$. Per cui si ha:

$$\begin{aligned} p_B(x) &= |B - xI_n| = \left|P^{-1}AP - xI_n\right| = \left|P^{-1}(A - xI_n)P\right| \\ &= \left|P^{-1}\right| \cdot |A - xI_n| \cdot |P| = |A - xI_n| = p_A(x). \square \end{aligned}$$

Non vale il viceversa infatti, ad esempio le matrici

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

hanno lo stesso polinomio caratteristico, x^2, ma non sono simili come precedentemente visto.

Esempi.
1) L'endomorfismo T su $\mathbb{R}^2$ definito da $T((x, y)) = (-y, x)$ è rappresentato, rispetto alla base naturale, dalla matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, il cui polinomio caratteristico $x^2 + 1$ non ha radici.

Si noti che l'endomorfismo definito nello stesso modo su $\mathbb{C}$ ha, invece, autovalori i e $-i$.

2) L'endomorfismo su $\mathbb{R}^2$ rappresentato, rispetto alla base naturale, dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 17/4 & -3\sqrt{3}/4 \\ -3\sqrt{3}/4 & 11/4 \end{pmatrix}$$

ha come polinomio caratteristico

$$\begin{aligned} \left(\frac{17}{4} - x\right)\left(\frac{11}{4} - x\right) - \frac{27}{16} &= x^2 - 7x + 10 \\ &= (x - 2)(x - 5). \end{aligned}$$

L'autospazio associato all'autovalore 2 è dato dal sistema $(A - 2I_2) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$, cioè
$$\begin{pmatrix} 9/4 & 3\sqrt{3}/4 \\ 3\sqrt{3}/4 & 3/4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
che naturalmente non è minimo, e si riduce all'equazione $y = \sqrt{3}x$. L'autospazio ha dunque come base $\{(1, \sqrt{3})\}$.
Per l'autovalore 5, con calcoli analoghi si arriva all'equazione $x = -\sqrt{3}y$, cioè all'autospazio con base $\{(-\sqrt{3}, 1)\}$.

3) La matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ ha polinomio caratteristico $(x-2)(x-5)$, da cui si ricavano gli autovalori e gli autospazi già trovati.

Proposizione 10.5. *Sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ e sia $p_A(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$. Allora si ha*

1. $a_n = (-1)^n$
2. $a_{n-1} = (-1)^{n-1}\mathrm{tr}(A)$
3. $a_0 = |A|$.

Osservazione 10.1. Sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ una matrice triangolare (in particolare diagonale), ricordando che $|A| = \Pi_{i=1}^n a_{ii}$ si ha che
$$p_A(x) = \prod_{i=1}^n (a_{ii} - x),$$
quindi gli autovalori di A sono gli elementi della diagonale principale e la loro molteplicità come radici di $p_A(x)$ è pari al numero di volte che essi vi compaiono.

Esempio.
Consideriamo la matrice
$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
ha come autovalori: $\lambda_1 = 3$ con molteplicità algebrica due e $\lambda_2 = 0$ con molteplicità algebrica uno.

10.3 Diagonalizzabilità.

Dato un endomorfismo su uno spazio vettoriale V e un suo autovalore λ, la *molteplicità geometrica* dell'autovalore è definita come la dimensione del suo autospazio ed è indicata con $m_g(\lambda)$.

Sia ora V di dimensione finita n; la *molteplicità algebrica* di un autovalore λ dell'endomorfismo T è definita come la molteplicità di λ in quanto radice del polinomio caratteristico di T ed è indicata con $m_a(\lambda)$.
Si osservi che $\sum\limits_{\lambda \in Sp(T)} m_a(\lambda) \leq n$.

Teorema 10.2. *Per ogni autovalore λ vale:*

$$1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda) \leq n.$$

Proposizione 10.6. *Sia T rappresentato dalla matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ e sia λ un suo autovalore. Allora:*

$$m_g(\lambda) = n - \operatorname{rk}(A - \lambda I_n).$$

Esempi.
1) Le due matrici viste prima hanno due autovalori, ognuno di molteplicità algebrica e geometrica 1.

2) La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (e ogni endomorfismo da essa rappresentato) ha come unico autovalore 0, che ha molteplicità geometrica 1 e algebrica 2.

Una matrice si dice *diagonalizzabile per similitudine* se esiste una matrice diagonale simile ad essa. Un endomorfismo si dice *diagonalizzabile* se esiste una matrice diagonale che lo rappresenti rispetto ad una base.

Teorema 10.3. *Un endomorfismo T su uno spazio vettoriale V di dimensione n risulta diagonalizzabile se e solo se esiste una base di V formata da autovettori di T.*

Una tale base viene detta *spettrale*.

Corollario 10.2. *Data $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, essa risulta diagonalizzabile per similitudine (e ogni endomorfismo da essa rappresentato risulta diagonalizzabile) se e solo se la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori è uguale a n.*

Proposizione 10.7. *Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ è diagonalizzabile per similitudine, allora:*

1. *ogni autovalore ha molteplicità algebrica e geometrica uguale;*

2. *la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori è uguale a n.*

ATTENZIONE: le condizioni precedenti sono solo necessarie. Per esempio un endomorfismo può avere somma delle molteplicità algebriche degli autovalori inferiore alla dimensione dello spazio; in tal caso, anche se ogni molteplicità geometrica coincidesse con quella algebrica dello stesso autovalore, NON si avrebbe diagonalizzabilità.

Proposizione 10.8. *Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ammette n autovalori distinti, allora A è diagonalizzabile per similitudine.*

ATTENZIONE: quest'ultima è una condizione solo sufficiente. È facile trovare matrici con un numero di autovalori minore di n, ma la cui somma delle molteplicità geometriche è uguale ad n; tali matrici sono diagonalizzabili per similitudine (per esempio I_n).

Proposizione 10.9. *Sia A diagonalizzabile per similitudine. Ogni matrice diagonale sulla cui diagonale principale compaiano gli autovalori di A, ripetuti ognuno con la sua molteplicità, è simile ad A.*

Esempio.
La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 17/4 & -3\sqrt{3}/4 \\ -3\sqrt{3}/4 & 11/4 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile per similitudine, in quanto c'è una base spettrale per $\mathbb{R}^2$: $\{(1, \sqrt{3}), (-\sqrt{3}, 1)\}$. Le due possibili matrici diagonali ad essa simili (le sue *diagonalizzate per similitudine*) sono $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Capitolo 11

Forma bilineari e quadratiche.

In questo capitolo considereremo campi $\mathbb{K}$ nei quali $1+1 \neq 0$.

11.1 Matrici particolari.

Una matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si dice *simmetrica* se ${}^tA = A$, cioè se $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$ vale $a_{ij} = a_{ji}$. Indicheremo con $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ l'insieme delle matrici simmetriche di ordine n su $\mathbb{K}$.

Esempio.
È simmetrica la matrice reale

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & \pi \\ 1 & 0 & 2/3 \\ \pi & 2/3 & 5 \end{pmatrix}.$$

$A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si dice *antisimmetrica* se ${}^tA = -A$, cioè se $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$ vale $a_{ij} = -a_{ji}$. Indicheremo con $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ l'insieme delle matrici antisimmetriche di ordine n su $\mathbb{K}$.

Esempio.
È antisimmetrica la matrice reale

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & -\sqrt{2} \\ -3 & 0 & -1 \\ \sqrt{2} & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Proposizione 11.1. *Per ogni matrice antisimmetrica $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ valgono:*

1. *tutti gli elementi della diagonale principale sono nulli;*
2. *se n è dispari, $|A| = 0$.*

Teorema 11.1. *Per ogni $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ e $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ sono sottospazi vettoriali di $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Inoltre:*

1. $\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{K})) = \frac{n(n+1)}{2}$ *e* $\dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{K})) = \frac{n(n-1)}{2}$
2. $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ *e quindi ogni matrice A si scrive in modo unico come somma di una matrice simmetrica e di una antisimmetrica. Tali matrici sono rispettivamente $\frac{A+{}^tA}{2}$ e $\frac{A-{}^tA}{2}$.*

Una matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si dice *ortogonale* se ${}^tA = A^{-1}$. L'insieme delle matrici ortogonali di ordine n si indica $\mathrm{O}_n(\mathbb{K})$ e costituisce, con il prodotto riga per colonna, sottogruppo di $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

Proposizione 11.2. *Per ogni $A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{K})$ vale $|A| = \pm 1_{\mathbb{K}}$.*

Una matrice ortogonale A si dice *speciale* se $|A| = 1_{\mathbb{K}}$. L'insieme delle matrici ortogonali speciali di ordine n su $\mathbb{K}$ si indica con $\mathrm{SO}_n(\mathbb{K})$ ed è un sottogruppo di $\mathrm{O}_n(\mathbb{K})$.

11.2 Forme bilineari.

Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$. Si chiama *forma bilineare su V* ogni applicazione $f : V \times V \to \mathbb{K}$ tale che per ogni $u, u', v, v' \in V$, per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, sia

$$f(\lambda u + \mu u', v) = \lambda f(u, v) + \mu f(u', v)$$

$$f(u, \lambda v + \mu v') = \lambda f(u, v) + \mu f(u, v').$$

Una forma bilineare f su V si dice *simmetrica* se per ogni $u, v \in V$ vale

$$f(u, v) = f(v, u).$$

Una forma bilineare f su V si dice *alternante* se per ogni $v \in V$ vale

$$f(v, v) = 0.$$

Una forma bilineare f su V si dice *antisimmetrica* se per ogni $u, v \in V$ vale

$$f(u, v) = -f(v, u).$$

Proposizione 11.3. *Ogni forma bilineare alternante è antisimmetrica.*

Esempi.
1) È una forma bilineare (non simmetrica) l'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f((x, y), (x', y')) = xx' + 2xy' - yx' + 3yy' \,.$$

2) Sono forme bilineari tutti i prodotti di *forme lineari* (o *funzionali lineari*), cioè di applicazioni lineari da V a $\mathbb{K}$ (ma ovviamente non tutte le forme bilineari sono prodotti di forme lineari).

3) È una forma bilineare alternante, e quindi antisimmetrica, su $\mathbb{R}^2$ l'applicazione che alla coppia di elementi di $\mathbb{R}^2$ $\left(\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}\right)$ associa $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$.

4) È una forma bilineare simmetrica l'applicazione $\bullet$ che ad ogni coppia di elementi di $\mathbb{K}^n$ fa corrispondere il loro prodotto scalare naturale.

5) È una forma bilineare simmetrica su $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'applicazione che ad ogni coppia di funzioni continue (f, g) fa corrispondere l'integrale $\int_a^b f(x)g(x)dx$.

6) È una forma bilineare su $\mathbb{K}^n$ l'applicazione che, data una fissata matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, ad ogni coppia di n-ple $((x), (y))$ associa l'elemento di $\mathbb{K}$

$${}^t\mathbf{x} \cdot A \cdot \mathbf{y},$$

cioè

$$\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

11.3 Rappresentazione matriciale.

Sia $f : V \times V \to \mathbb{K}$ una forma bilineare su uno spazio vettoriale V di dimensione n e sia $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ una fissata base ordinata di V. Definiamo $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tale che

$$a_{ij} \overset{def}{=} f(v_i, v_j),$$

per ogni $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

Teorema 11.2. *Per ogni* $u, v \in V$*, se* $[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, *allora*

$$f(u, v) = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Dimostrazione. Analoga a quella per la rappresentazione matriciale delle applicazioni lineari.

Diciamo che la matrice A *rappresenta* f rispetto alla base $\mathcal{B}$ e scriviamo $A = [f]_{\mathcal{B}}$.

Proposizione 11.4. *Se la forma bilineare* f *è simmetrica, la matrice* A *che la rappresenta rispetto ad una qualunque base è simmetrica. Se* f *è antisimmetrica,* A *è antisimmetrica.*

Teorema 11.3. *Sia* $f : V \times V \to \mathbb{K}$ *una forma bilineare su* V *e siano* $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ *due basi ordinate di* V*. Allora*

$$[f]_{\mathcal{C}} = {}^t\underset{\mathcal{C}\to\mathcal{B}}{M} \cdot [f]_{\mathcal{B}} \cdot \underset{\mathcal{C}\to\mathcal{B}}{M}.$$

Date matrici $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, esse si dicono *congruenti* se esiste una matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tale che sia

$$B = {}^t P \cdot A \cdot P.$$

La congruenza è una relazione di equivalenza in $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Proposizione 11.5. *Matrici congruenti hanno uguale rango.*

Teorema 11.4. $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *rappresentano la stessa forma bilineare su uno spazio vettoriale* V *se e solo se sono congruenti.*

Si può allora definire il *rango* di una forma bilineare come il rango di una qualunque matrice che la rappresenti.

Teorema 11.5 (di diagonalizzabilità per congruenza). *Ogni matrice simmetrica è congruente ad una matrice diagonale.*

Corollario 11.1. *Per ogni forma bilineare simmetrica* f *su* V *esiste una base di* V *rispetto a cui* f *è rappresentata da una matrice diagonale.*

11.4 Matrici simmetriche reali.

Il teorema di diagonalizzabilità per congruenza garantisce che, data una matrice simmetrica $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, esistono una matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ e una matrice diagonale D tali che sia

$$D =^t P \cdot A \cdot P.$$

Sia ora $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matrice reale simmetrica qualunque. Si può dimostrare che il polinomio caratteristico di A ha tutte radici reali.

Teorema 11.6 (Teorema spettrale). *Data $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ simmetrica, esistono una matrice P ortogonale e una matrice D diagonale tali che*

$${}^tP \cdot A \cdot P = P^{-1} \cdot A \cdot P = D,$$

cioè A è diagonalizzabile per similitudine.

Teorema 11.7. *Tutte le matrici diagonali congruenti ad A hanno lo stesso numero di elementi positivi e lo stesso numero di elementi negativi. Essi sono rispettivamente la somma delle molteplicità (algebriche, uguali a quelle geometriche) degli autovalori positivi di A, e la somma delle molteplicità degli autovalori negativi.*

Si dice *indice* della forma bilineare simmetrica rappresentata da A la somma delle molteplicità degli autovalori negativi di A.

Osservazione 11.1. Notiamo quindi che nel calcolo del segno degli autovalori di una forma bilineare (o della matrice simmetrica associata) si può ricorrere al teorema 9.6 in quanto, come osservato prima, il polinomio caratteristico ha tutte radici reali.

11.5 Forme quadratiche.

Un'applicazione $q : V \to \mathbb{K}$ viene detta *forma quadratica* se esiste una forma bilineare simmetrica f su V (che si dirà *associata* a q) tale che per ogni $v \in V$ sia

$$q(v) = f(v, v).$$

Proposizione 11.6. *Le forme quadratiche su $\mathbb{K}^n$ sono tutte e sole le funzioni polinomiali in $x_1, \ldots, x_n$ omogenee di grado 2.*

Il *rango* della forma quadratica q è il rango della forma bilineare associata f.

Sia ora f la forma bilineare simmetrica associata a q, e sia $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice che rappresenta f rispetto ad una fissata base $\mathcal{B}$.

Teorema 11.8. *Per ogni $v \in V$, se $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, allora*

$$q(v) = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}(x_i)^2 + 2\sum_{i<j} a_{ij}x_ix_j.$$

Diciamo che A *rappresenta* q rispetto a $\mathcal{B}$ e scriveremo $A = [q]_{\mathcal{B}}$. Il polinomio di 2^o grado in $x_1, \dots, x_n$ dell'enunciato è detto *polinomio quadratico* di q rispetto a $\mathcal{B}$.

Teorema 11.9. *Data la forma quadratica q, la forma bilineare simmetrica ad essa associata risulta essere la f definita, per ogni $u, v \in V$, da*

$$f(u, v) = \frac{1}{2}\left(q(u+v) - q(u) - q(v)\right).$$

Il teorema precedente suggerisce il modo di scrivere la matrice che rappresenta una data forma quadratica q rispetto ad una base $\mathcal{B}$: calcolare la forma bilineare f associata, poi valutare f sulle coppie di vettori di $\mathcal{B}$.

11.5.1 Forme quadratiche reali.

Sia ora $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. L'*indice* di una forma quadratica reale q è l'indice della forma bilineare simmetrica associata.

Una forma quadratica q si dirà:

- *semidefinita positiva* se $q(v) \geq 0$, per ogni $v \in V$;
- *semidefinita negativa* se $q(v) \leq 0$, per ogni $v \in V$;
- *definita positiva* se è semidefinita positiva e $q(v) = 0 \Leftrightarrow v = O_V$;

- *definita negativa* se è semidefinita negativa e $q(v) = 0 \Leftrightarrow v = O_V$;

- *non definita se non è semidefinita positiva nè semidefinita negativa.*

Proposizione 11.7. *Una forma quadratica q su V di dimensione n*

1. *è semidefinita positiva se e solo se l'indice di q è zero;*

2. *è semidefinita negativa se e solo se l'indice di q è uguale al rango;*

3. *è definita positiva se e solo se l'indice di q è zero e il rango di q è n;*

4. *è definita negativa se e solo se l'indice di q è uguale a n;*

5. *è non definita se e solo se l'indice di q è maggiore di zero ed è minore del rango.*

11.5.2 Forme canoniche.

Siccome in un campo algebricamente chiuso ogni elemento ammette radice quadrata si ha il seguente teorema.

Teorema 11.10. *Sia $\mathbb{K}$ un campo algebricamente chiuso. Data qualunque matrice simmetrica $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, essa è congruente ad una matrice diagonale in cui i primi r elementi della diagonale principale sono uguali a 1, e gli altri sono uguali a 0, dove r è il rango di A.*

Corollario 11.2. *Data una qualunque forma quadratica q su uno spazio vettoriale di dimensione finita su un campo algebricamente chiuso, esiste una base rispetto a cui q è associata al polinomio quadratico*

$$(x_1)^2 + \cdots + (x_r)^2,$$

dove r è il rango di q.

Corollario 11.3. *Date $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ simmetriche su un campo algebricamente chiuso, esse sono congruenti se e solo se hanno uguale rango.*

In particolare i precedenti teoremi e corollari si applicano al caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Teorema 11.11. *Data una qualunque matrice simmetrica $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ di rango r e indice k , essa è congruente ad una matrice diagonale in cui i primi $r - k$ elementi della diagonale principale sono uguali a 1, i successivi k sono uguali a -1, e gli altri sono uguali a 0.*

Corollario 11.4 (Teorema di Sylvester, Legge d'inerzia). *Data una qualunque forma quadratica q su uno spazio vettoriale reale di dimensione finita, esiste una base rispetto alla quale q è rappresentato dal al polinomio quadratico*

$$(x_1)^2 + \cdots + (x_h)^2 - (x_{h+1})^2 - \cdots - (x_{h+k})^2,$$

dove $h + k$ è il rango e k è l'indice di q.

Corollario 11.5. *Date $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ simmetriche, esse sono congruenti se e solo se hanno stesso rango e stesso indice.*

Le matrici dei due teoremi precedenti vengono chiamate *forme canoniche per congruenza* delle matrici simmetriche A e delle forme quadratiche associate.

Esistono forme canoniche per similitudine: tale può essere considerata una matrice diagonale (QUANDO ESISTA) simile ad una matrice data (magari dopo una standardizzazione dell'ordine degli autovalori). In certi casi esistono forme canoniche per similitudine (naturalmente non diagonali) anche per matrici non diagonalizzabili per similitudine ("forma canonica di Jordan" e "forma canonica razionale").

Capitolo 12

Spazi vettoriali euclidei.

12.1 Prodotti scalari.

Dato uno spazio vettoriale V su $\mathbb{R}$, si chiama *prodotto scalare* su V ogni forma bilineare su V che sia simmetrica e la cui forma quadratica associata sia definita positiva. Si usa indicare (una volta che sia stato fissato) il prodotto scalare di due vettori v, v' con $\langle v, v' \rangle$.

Esempi di prodotto scalare:
1) Il prodotto scalare naturale $\bullet$ su $\mathbb{R}^n$.

2) Su $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$, l'integrale $\int_a^b f(x)g(x)dx$. Si noti che tale integrale non è un prodotto scalare su $\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

3) È un prodotto scalare, detto standard, su $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ l'applicazione $\langle A, B \rangle \stackrel{def}{=} \mathrm{tr}\,({}^tA \cdot B) = \mathrm{tr}\,(A \cdot {}^tB)$. Si noti che:

$$\langle A, B \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ij}.$$

4) Anche applicazioni meno "naturali" come

$$\langle (x,y),(x',y') \rangle \stackrel{def}{=} xx' + 2xy' + 2yx' + 5yy'$$

rientrano nella definizione di prodotto scalare.

Uno *spazio vettoriale euclideo* (o *spazio di prodotto scalare*) è una struttura $(V, \langle , \rangle)$, dove $\langle , \rangle$ è un prodotto scalare. Una *norma* (o meglio: *norma euclidea*) su uno spazio vettoriale euclideo è l'applicazione $\| \ \| : V \to \mathbb{R}$ definita da

$$\|v\| \stackrel{def}{=} \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

per ogni $v \in V$.

Proposizione 12.1. *Sia $\| \ \|$ una norma euclidea su V. Allora per ogni $v, w \in V$ e per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ si ha:*

1. $\|v\| \geq 0$.
2. $\|v\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v = O_V$.
3. $\|\lambda \cdot v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$.
4. $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$.

Una *distanza* (*euclidea*) su V è l'applicazione $d : V \times V \to \mathbb{R}$ definita da

$$d(u, v) \stackrel{def}{=} \|v - u\|$$

per ogni $u, v \in V$.

Proposizione 12.2. *Sia d una distanza euclidea su V. Allora per ogni $u, v, w \in V$ e per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ si ha:*

1. $d(u, v) \geq 0$.
2. $d(u, v) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u = v$.
3. $d(u, v) = d(v, u)$.
4. $d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$.

Teorema 12.1 (di Cauchy-Schwarz). *In uno spazio vettoriale euclideo V, per ogni $u, v \in V$, vale*

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \, \|v\|.$$

12.2 Ortogonalità.

In V spazio vettoriale euclideo si definiscono *ortogonali* i vettori $u, v \in V$ se $\langle u, v\rangle = 0$. Si noti che il vettore nullo è ortogonale ad ogni vettore di V.

Dato un sottoinsieme $\mathcal{S} \neq \emptyset$ di uno spazio vettoriale euclideo V, il *complemento ortogonale* di $\mathcal{S}$ è definito come l'insieme

$$\mathcal{S}^{\perp} \overset{def}{=} \{v \in V \mid \forall u \in \mathcal{S},\ \langle u, v\rangle = 0\}$$

che viene detto *complemento ortogonale* di $\mathcal{S}$.

Proposizione 12.3. *Per qualunque $\mathcal{S}$ non vuoto, $\mathcal{S}^{\perp}$ costituisce sottospazio vettoriale e $S^{\perp} = L(S)^{\perp}$. Inoltre valgono le seguenti proprietà:*

1. $\{0_V\}^{\perp} = V$;
2. $V^{\perp} = \{0_V\}$;
3. $(S^{\perp})^{\perp} = L(S)$;
4. *se W è un sottospazio vettoriale di V allora $(W^{\perp})^{\perp} = W$.*

Proposizione 12.4. *Se V è di dimensione finita e W è un suo sottospazio, allora $V = W \oplus W^{\perp}$. Per cui* $\dim W + \dim W^{\perp} = \dim V$.

Quindi, per ogni $v \in V$ esistono esattamente un $w \in W$ e un $w' \in W^{\perp}$ tali che $v = w + w'$. Il vettore w viene detto *proiezione ortogonale* di v su W e sarà indicato con $p_W(v)$.

In uno spazio vettoriale euclideo, si definisce *coseno dell'angolo* tra i vettori $u, v \in V - \{O_V\}$ il numero

$$\cos \widehat{uv} \overset{def}{=} \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\,\|v\|}.$$

Per cui poniamo $\widehat{uv} = \arccos \dfrac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\,\|v\|}$.

12.3 Insiemi ortonormali.

Un insieme di vettori di uno spazio vettoriale euclideo V si dice *ortogonale* se i suoi vettori sono a due a due ortogonali; si dice *ortonormale* se è ortogonale e tutti i suoi vettori hanno norma 1.

Esempi.
1) Rispetto al prodotto scalare naturale, la base naturale di $\mathbb{R}^n$ è un insieme ortonormale.

2) Rispetto al prodotto scalare $\int_{-\pi}^{+\pi} dx$, l'insieme $\{sen(kx) \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{cos(kx) \mid k \in \mathbb{N}\}$ è ortogonale.

Proposizione 12.5. *Ogni insieme ortogonale di vettori non nulli è linearmente indipendente.*

Teorema 12.2. *Ogni spazio vettoriale euclideo ammette basi ortonormali.*

Per ridurre una base $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ di uno spazio vettoriale euclideo di dimensione n ad una base ortonormale, si impiega il *procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt*:

1) si *normalizza* il vettore v_1, cioè lo si divide per la propria norma, ponendo

$$u_1 \stackrel{def}{=} \frac{v_1}{\|v_1\|};$$

2) costruiti che siano $u_1, \ldots, u_i$, definiamo

$$w_{i+1} \stackrel{def}{=} v_{i+1} - \sum_{j=1}^{i} \langle v_{i+1}, u_j \rangle u_j$$

e normalizziamo:

$$u_{i+1} \stackrel{def}{=} \frac{w_{i+1}}{\|w_{i+1}\|};$$

in questo modo, giunti ad u_n, abbiamo ottenuto un insieme ortonormale di n vettori $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$, che necessariamente è una base.

Esempio.
Data in $\mathbb{R}^3$, rispetto al prodotto scalare naturale, la base $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$, con

$$v_1 = (1, 2, 0),\ v_2 = (-1, 1, 1),\ v_3 = (2, 0, 3),$$

eseguiamo l'ortonormalizzazione:

$$\begin{aligned}
u_1 = &\ \frac{v_1}{\|v_1\|} = \tfrac{(1,2,0)}{\sqrt{5}};\\
w_2 = &\ v_2 - \langle v_2, u_1\rangle u_1 = (-1,1,1) - \tfrac{1}{\sqrt{5}}\tfrac{(1,2,0)}{\sqrt{5}} = \tfrac{(-6,3,5)}{5},\\
u_2 = &\ \frac{w_2}{\|w_2\|} = \tfrac{\frac{1}{5}(-6,3,5)}{\sqrt{\frac{36+9+25}{25}}} = \tfrac{(-6,3,5)}{\sqrt{70}};\\
w_3 = &\ v_3 - \langle v_3, u_1\rangle u_1 - \langle v_3, u_2\rangle u_2 = (2,0,3) - \tfrac{2}{\sqrt{5}}\tfrac{(1,2,0)}{\sqrt{5}} - \tfrac{3}{\sqrt{70}}\tfrac{(-6,3,5)}{\sqrt{70}} =\\
= &\ \tfrac{(130,-65,195)}{70} = \tfrac{(26,-13,39)}{14},\\
u_3 = &\ \frac{w_3}{\|w_3\|} = \tfrac{\frac{1}{14}(26,-13,39)}{\sqrt{\frac{676+169+1521}{196}}} = \tfrac{(26,-13,39)}{\sqrt{2366}}.
\end{aligned}$$

Le basi ortonormali sono particolarmente interessanti per le due seguenti proprietà.

Proposizione 12.6. *Sia $\mathcal{B} = (u_1, \ldots, u_n)$ una base ortonormale di $(V, \langle , \rangle)$. Per ogni $v \in V$, le coordinate di v rispetto a $\mathcal{B}$ sono $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, dove, per ogni $i \in \{1, \ldots, n\}$,*

$$\lambda_i = \langle v, u_i\rangle.$$

Per cui si ha: $v = \sum_{i=1}^n \langle v, u_i\rangle u_i$.

Proposizione 12.7. *Sia $\mathcal{B} = (u_1, \ldots, u_n)$ una base ortonormale di $(V, \langle , \rangle)$. Se $[v]_{\mathcal{B}} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ e $[v']_{\mathcal{B}} = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$, allora*

$$\langle v, v'\rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mu_i.$$

Proposizione 12.8. *Sia $(V, \langle , \rangle)$ uno spazio vettoriale euclideo e sia $W \subset V$ un sottospazio vettoriale di dimensione finita. Per ogni $\mathcal{B} = (w_1, \ldots, w_k)$ base ortogonale per W e per ogni $v \in V$ si ha*

$$p_W(v) = \sum_{i=1}^k \frac{\langle v, w_i\rangle}{\|w_i\|^2} w_i.$$

12.4 Endomorfismi ortogonali.

Sia V uno spazio vettoriale euclideo di dimensione finita n, e sia F un endomorfismo su V. F viene detto *ortogonale* se, per ogni $v, v' \in V$, vale

$$\langle F(v), F(v') \rangle = \langle v, v' \rangle.$$

Proposizione 12.9. *Se F è un endomorfismo ortogonale, allora:*

1. *per ogni $v \in V$ vale $\|F(v)\| = \|v\|$;*

2. *per ogni $v, v' \in V$ vale $d\left(F(v), F(v')\right) = d(v, v')$.*

Teorema 12.3. *Sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice che rappresenta l'endomorfismo F su V rispetto ad una base ortonormale. F è ortogonale se e solo se A è ortogonale.*

Proposizione 12.10. *La matrice del cambiamento di base fra due basi ortonormali è ortogonale.*

12.5 Ortogonalità fra sottospazi.

Proposizione 12.11. *Sia U un sottospazio vettoriale h-dimensionale di uno spazio vettoriale euclideo $(V, \langle , \rangle)$ di dimensione n. Rispetto ad una fissata base ortonormale $\mathcal{B}$, sia*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n-h1} & \cdots & a_{n-hn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

un sistema minimo che rappresenta U. Allora i vettori

$$\begin{aligned} &[w_1]_{\mathcal{B}} = (a_{11}, \ldots, a_{1n}) \\ &\vdots \\ &[w_{n-h}]_{\mathcal{B}} = (a_{n-h1}, \ldots, a_{n-hn}) \end{aligned}$$

formano una base di $U^\perp$.

ATTENZIONE: la base dell'enunciato precedente non è, in generale, ortogonale.

Corollario 12.1. *Con $V, U, \mathcal{B}$ come sopra, se*

$$\begin{aligned} &[u_1]_{\mathcal{B}} = (b_{11}, \dots, b_{1n}) \\ &\vdots \\ &[u_h]_{\mathcal{B}} = (b_{h1}, \dots, b_{hn}) \end{aligned}$$

costituiscono una base di U, allora

$$\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{h1} & \cdots & b_{hn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

è un sistema minimo che rappresenta $U^{\perp}$.

In uno spazio vettoriale euclideo $(V, \langle , \rangle)$ siano dati due sottospazi U, W. Essi si dicono *ortogonali* se valgono le seguenti condizioni:

1) $U \not\subset W$ e $W \not\subset U$, e

2) il complemento ortogonale di U in $U + W$ è contenuto in W (o, equivalentemente, viceversa).

Esempi.
1) I due sottospazi di dimensione due di $\mathbb{R}^3$ aventi equazione cartesiana rispettivamente $x - y = 0$ e $z = 0$ sono ortogonali.

2) I due sottospazi di dimensione uno di $\mathbb{R}^3$ aventi equazioni cartesiane rispettivamente $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ e $\begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}$ sono ortogonali.

Capitolo 13

Spazi affini e spazi euclidei.

13.1 Spazi e trasformazioni affini.

Negli esempi di carattere geometrico già si era manifestata l'opportunità di svincolarsi dalla scelta di un punto privilegiato: l'ambiente in cui è possibile operare così è la geometria affine. Questa geometria richiederebbe una trattazione più accurata, ma noi ne daremo una operativa semplificata, più consona agli obiettivi di questo corso.

Otteniamo il nostro scopo ampliando gli insiemi di trasformazioni ammesse tra spazi vettoriali.

Una *trasformazione affine* α da uno spazio vettoriale V ad uno W è definita come la composizione $\tau \circ F : V \to W$, dove $F : V \to W$ è una trasformazione lineare e $\tau : W \to W$ è una traslazione.

Una trasformazione affine è detta *isomorfismo affine* quando F è un isomorfismo tra spazi vettoriali.

Per distinguere meglio il nuovo contesto, gli spazi vettoriali verranno chiamati *spazi affini* quando fra loro considereremo trasformazioni affini e non solo lineari. Se V è lo spazio vettoriale, quando lo consideriamo spazio affine, lo denotiamo $\mathcal{A}(V)$.
La dimensione di uno spazio affine $\mathcal{A}(V)$ è quella dello spazio vettoriale V ad esso associato.

Gli elementi degli spazi affini verranno chiamati *punti* invece che vettori, e saranno denotati con lettere maiuscole.

Così come le basi sono state utilizzate per fissare un isomorfismo tra uno spazio vettoriale di dimensione n su $\mathbb{K}$ e lo spazio vettoriale canonico $\mathbb{K}$, in modo analogo ci interessa fissare un isomorfismo affine tra $\mathcal{A}(V)$ e lo spazio affine $\mathcal{A}(\mathbb{K})$.

Un *riferimento affine* di $\mathcal{A}(V)$ è una coppia $\mathcal{S} = (M, \mathcal{B})$ dove $M \in \mathcal{A}(V)$ è un punto detto *origine* e $\mathcal{B}$ è una base di V.
Dato un punto $P \in \mathcal{A}(V)$ le sue *coordinate affini* rispetto al riferimento affine $\mathcal{S}$ sono le coordinate del vettore $P - M$ rispetto alla base $\mathcal{B}$.

Teorema 13.1. *Ogni trasformazione affine $\alpha : \mathcal{A}(V) \to \mathcal{A}(W)$, $\alpha = \tau \circ F$, dove $dim(V) = n$ e $dim(W) = m$, si rappresenta rispetto ai riferimenti $\mathcal{S} = (M, \mathcal{B})$ e $\mathcal{S}' = (M', \mathcal{B}')$, con un'equazione matriciale*

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

dove A rappresenta F rispetto a $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$, e (b_i) è la colonna delle coordinate affini di $\alpha(M)$ rispetto a $\mathcal{S}'$.

13.2 Sottospazi affini.

Consideriamo fissato uno spazio vettoriale V di dimensione n su $\mathbb{K}$. Un insieme di punti $\mathcal{D}$ viene detto *sottospazio affine di dimensione* k di $\mathcal{A}(V)$ se i suoi punti si possono scrivere come somma di un punto fissato più gli elementi di un sottospazio vettoriale di dimensione k di V, cioè se esistono $P \in \mathcal{A}(V)$ e un sottospazio U di dimensione k di V per cui sia

$$\mathcal{D} = \{P + u \,|\, u \in U\}.$$

In tale situazione, il sottospazio U viene detto *giacitura* del sottospazio affine $\mathcal{D}$, e i suoi elementi *vettori liberi* di $\mathcal{D}$. Ovviamente $P \in \mathcal{D}$ perché $P = P + O_V$.

Si noti che la differenza $P'' - P'$ di due punti di un sottospazio affine $\mathcal{D}$ è sempre un vettore libero di $\mathcal{D}$.

Chiameremo *retta, piano, iperpiano* ogni sottospazio affine di dimensione rispettivamente 1, 2, $n-1$, dove n è la dimensione di V. Inoltre ogni punto di $\mathcal{A}(V)$ è un sottospazio affine di dimensione zero.

Proposizione 13.1. *Ogni sottospazio vettoriale di V è anche sottospazio affine, ed ha se stesso come giacitura.*

Dati i punti $P_0, \dots, P_k \in \mathcal{A}(V)$ essi si dicono *affinemente indipendenti* se $P_1 - P_0, \dots, P_k - P_0$ sono linearmente indipendenti. Altrimenti $P_0, \dots, P_k$ di dicono *affinemente dipendenti*.
È facile dimostrare che tale definizione non dipende dalla scelta di P_0.

Proposizione 13.2. *Valgono le seguenti affermazioni.*

1. *Se* $\dim \mathcal{A}(V) = n$ *esistono al più* $n+1$ *punti affinemente indipendenti.*
2. *Due punti sono affinemente indipendenti se e solo se sono distinti.*
3. *Tre punti sono affinemente indipendenti se e solo se non sono allineati.*
4. *In generale $k+1$ punti sono affinemente indipendenti se non esiste un sottospazio affine di dimensione $k-1$ che li contiene tutti.*

13.3 Rappresentazioni di sottospazi affini.

Proposizione 13.3. *Data una trasformazione lineare $F : V \to W$, per ogni $w \in ImF$ la controimmagine $F^{-1}(\{w\})$ è un sottospazio affine di $\mathcal{A}(V)$.*

Corollario 13.1. *Per ogni sistema lineare possibile su $\mathbb{K}$, in n incognite, di rango r, l'insieme delle soluzioni è un sottospazio affine di $\mathcal{A}(\mathbb{K}^n)$, di dimensione $n-r$.*

Proposizione 13.4. *Dato un qualunque sottospazio affine $\mathcal{D}$ di $\mathcal{A}(V)$, esistono uno spazio vettoriale W, un vettore $w \in W$ e un'applicazione lineare $F : V \to W$ per cui $\mathcal{D} = F^{-1}(\{w\})$.*

Corollario 13.2. *Ogni sottospazio affine di dimensione h di uno spazio affine $\mathcal{A}(V)$ di dimensione n si può rappresentare, rispetto ad un dato riferimento, mediante un sistema lineare possibile di $n-h$ equazioni.*

La rappresentazione indicata viene detta *rappresentazione cartesiana* del sottospazio affine. Ci occupiamo ora di come trovarla, dati punti e vettori liberi di un sottospazio.

Teorema 13.2. *Dati i punti affinemente indipendenti $P_0, \ldots, P_k$, esiste un unico sottospazio affine k-dimensionale che li contiene tutti.*

Corollario 13.3. *Dati k vettori linearmente indipendenti ed un punto, esiste ed è unico il sottospazio affine k-dimensionale contenente il punto ed avente i vettori dati come vettori liberi.*

Corollario 13.4. *Rispetto ad una base fissata $\mathcal{B}$, siano dati i vettori liberi linearmente indipendenti*

$$\begin{aligned} &[v_1]_{\mathcal{B}} = (a_{11}, \ldots, a_{n1}) \\ &\vdots \\ &[v_k]_{\mathcal{B}} = (a_{1k}, \ldots, a_{nk}) \end{aligned}$$

e il punto

$$[P_0]_{\mathcal{B}} = (b_1, \ldots, b_n).$$

Allora i punti del sottospazio k-dimensionale $\mathcal{D}$ contenente P_0 e avente $v_1, \ldots, v_k$ come vettori liberi sono tutti e soli i punti

$$[P]_{\mathcal{B}} = (x_1, \ldots, x_n)$$

tali che la matrice

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & (x_1 - b_1) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & (x_n - b_n) \end{pmatrix}$$

abbia rango k.

I corollari 13.4 e 13.3 consentono rispettivamente di calcolare la rappresentazione cartesiana di un sottospazio, e la sua *rappresentazione parametrica* proveniente da una rappresentazione parametrica della giacitura. In questa, un sottospazio affine viene visto come immagine di uno spazio vettoriale di parametri attraverso una trasformazione affine iniettiva.

Esempio.
In uno spazio vettoriale di dimensione 3, rispetto ad una base $\mathcal{B}$, il piano passante per $[P_0]_{\mathcal{B}} = (1, 5, -3)$ e avente vettori liberi $[v_1]_{\mathcal{B}} = (3, 2, -7)$ e

$[v_2]_{\mathcal{B}} = (8,0,3)$ è caratterizzato dalle equazioni che si ottengono imponendo rango 2 alla matrice

$$\begin{pmatrix} 3 & 8 & (x-1) \\ 2 & 0 & (y-5) \\ -7 & 3 & (z+3) \end{pmatrix}$$

da cui, passando per

$$6(x-1) - 65(y-5) - 16(z+3) = 0,$$

si ottiene la forma cartesiana

$$6x - 65y - 16z + 271 = 0;$$

in alternativa, la forma parametrica è

$$\begin{cases} x = 1 + 3\alpha + 8\beta \\ y = 5 + 2\alpha \\ z = -3 - 7\alpha + 3\beta \end{cases}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Dato un sottospazio affine $\mathcal{D}$ di dimensione $n-2$ di V, si chiama *fascio* di iperpiani per $\mathcal{D}$ l'insieme di tutti gli iperpiani passanti per $\mathcal{D}$.

Proposizione 13.5. *Se il sottospazio affine $(n-2)$-dimensionale $\mathcal{D}$ è rappresentato da un sistema di due equazioni lineari, il generico iperpiano del fascio per $\mathcal{D}$ è rappresentato da un'equazione che è combinazione lineare di tali due equazioni.*

Esempio.
Data in uno spazio 3-dimensionale la retta r di equazioni

$$\begin{cases} -5x + y + 5 = 0 \\ 6y + 5z - 45 = 0 \end{cases},$$

si trovi il piano passante per r e per il punto $[Q]_{\mathcal{B}} = (5,3,11)$.

Un comodo metodo consiste nel formare il fascio di piani per r, e imporre al suo generico elemento il passaggio per Q. Fascio per r:

$$\lambda(-5x + y + 5) + \mu(6y + 5z - 45) = 0;$$

passaggio per Q:

$$\lambda(-25+3+5)+\mu(18+55-45)=0$$

da cui

$$-17\lambda+28\mu=0;$$

una scelta possibile è dunque $(\lambda,\mu)=(28,17)$, perciò il piano cercato ha equazione

$$-140x+130y+85z-625=0.$$

Dato un vettore libero non nullo v di una retta r, la n-pla di coordinate di v rispetto ad una base fissata si dice n-pla di *coefficienti direttivi* (o *numeri direttori*) di r rispetto alla base.

Proposizione 13.6. *Dati, rispetto ad una base $\mathcal{B}$, due punti*

$$[P_0]_{\mathcal{B}}=(b_1,\ldots,b_n),$$
$$[P_1]_{\mathcal{B}}=(b'_1,\ldots,b'_n),$$

il vettore libero P_1-P_0 ha coordinate

$$(b_1-b'_1,\ldots,b_n-b'_n).$$

La retta passante per due punti ha dunque coefficienti direttivi uguali (o proporzionali) alle differenze delle coordinate dei due punti.

Si noti che, per una retta r, la n-pla delle differenze delle coordinate del generico punto meno quelle di un punto fissato $[P_0]_{\mathcal{B}}=(b_1,\ldots,b_n)$ è proporzionale ad ogni n-pla di coefficienti direttivi $(l_1,\ldots,l_n)$. Oltre alla rappresentazione cartesiana di r con un sistema di $n-1$ equazioni (cioè come intersezione di $n-1$ iperpiani), e la rappresentazione parametrica

$$\begin{cases} x_1=b_1+l_1t \\ \vdots \\ x_n=b_n+l_nt \end{cases}$$

si ha anche una speciale forma di rappresentazione cartesiana, la *forma frazionaria*, possibile solo se tutti i coefficienti direttivi sono $\neq 0$:

$$\frac{x_1-b_1}{l_1}=\cdots=\frac{x_n-b_n}{l_n}.$$

Esempi.
1) In un piano, la retta passante per $[P_0]_{\mathcal{B}} = (1, 2)$ e $[P_1]_{\mathcal{B}} = (3, -5)$ si può rappresentare, ponendo uguale a 1 il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} (3-1) & (x-1) \\ (-5-2) & (y-2) \end{pmatrix},$$

in forma cartesiana

$$7x + 2y - 11 = 0,$$

in forma parametrica

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 7t \end{cases},$$

in forma frazionaria

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-7}.$$

2) In uno spazio 3-dimensionale, la retta per $[P_0]_{\mathcal{B}} = (1, 0, 9)$ e $[P_1]_{\mathcal{B}} = (2, 5, 3)$ avrà le rappresentazioni

$$\begin{cases} -5x + y + 5 = 0 \\ 6y + 5z - 45 = 0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 5t \\ z = 9 - 6t \end{cases},$$

$$x - 1 = \frac{y}{5} = \frac{z-9}{-6}.$$

13.4 Parallelismo.

Proposizione 13.7. *Se, rispetto ad un riferimento $\mathcal{S}$, un sottospazio affine $\mathcal{D}$ è rappresentato dal sistema lineare $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$, allora la sua giacitura è rappresentata dal sistema lineare omogeneo associato $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$.*

In uno spazio vettoriale V di dimensione n, un sottospazio affine $\mathcal{D}_1$ di dimensione h si dice *parallelo* ad un sottospazio affine $\mathcal{D}_2$ di dimensione k, con $h \leq k$, se la giacitura di $\mathcal{D}_1$ è contenuta nella giacitura di $\mathcal{D}_2$. In particolare se $h = k$ allora $\mathcal{D}_1$ e $\mathcal{D}_2$ sono paralleli se le loro giaciture coincidono.

Proposizione 13.8. *Siano dati un iperpiano Π, rappresentato dall'equazione*

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b$$

e una retta r di coefficienti direttivi $l_1, \ldots, l_n$. Allora r è parallela a Π se e solo se

$$a_1l_1 + \cdots + a_nl_n = 0.$$

Dimostrazione.
r è parallela a Π se e solo se un suo qualunque vettore libero non nullo appartiene alla giacitura di Π; questa ha equazione $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$, da cui la tesi. □

Proposizione 13.9. *Date due rette r, di coefficienti direttivi $l_1, \ldots, l_n$, ed r', di coefficienti direttivi $l'_1, \ldots, l'_n$; allora r è parallela ad r' se e solo se i coefficienti direttivi sono proporzionali.*

Dimostrazione.
r è parallela ad r' se e solo se un suo qualunque vettore libero è anche vettore libero di r'. □

Proposizione 13.10. *Dati due iperpiani Π e Π' di equazioni rispettivamente*

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b, \qquad a'_1x_1 + \cdots + a'_nx_n = b';$$

allora Π è parallelo a Π' se e solo se $(a_1, \ldots, a_n)$ è proporzionale a $(a'_1, \ldots, a'_n)$.

Dimostrazione.
Sono paralleli se e solo se hanno la stessa giacitura. □

Esempi.
1) In un piano siano dati la retta r di equazione $x - 5y = 3$ e il punto $[P]_{\mathcal{B}} = (4, 2)$. Trovare la retta s passante per P e parallela ad r.

2) Le rette r ed s possono essere viste come iperpiani del piano; la generica retta passante per P ha equazione

$$a(x - 4) + b(y - 2) = 0;$$

la condizione di parallelismo con r richiede che (a, b) sia proporzionale a $(1, -5)$. Perciò una risposta valida è

$$x - 5y + 6 = 0.$$

Proposizione 13.11. *L'intersezione di due sottospazi affini non disgiunti è a sua volta un sottospazio affine.*

Se $\mathcal{D}_1$ e $\mathcal{D}_2$ sono sottospazi affini non paralleli fra loro, allora essi si dicono *incidenti* se $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 \neq \emptyset$ e *sghembi* altrimenti.

13.5 Ortogonalità.

Uno *spazio euclideo* è uno spazio affine $\mathcal{A}(V)$ tale che V è uno spazio vettoriale euclideo. Nel seguito, considereremo uno spazio vettoriale euclideo di dimensione n fissato $(V, \langle , \rangle)$.

D'ora in poi per non appesantire la notazione, denoteremo con V sia lo spazio vettoriale che quello affine ad esso associato.

Una trasformazione affine $\alpha = \tau \circ F$ da V a se stesso è chiamata *uguaglianza* (o *isometria*) se F è una trasformazione ortogonale.

In V, un sottospazio affine $\mathcal{D}_1$ si dice *ortogonale* ad un sottospazio affine $\mathcal{D}_2$ se la giacitura di $\mathcal{D}_1$ è ortogonale alla giacitura di $\mathcal{D}_2$.

$\mathcal{D}_1$ è detto *perpendicolare* a $\mathcal{D}_2$ se $\mathcal{D}_1$ è ortogonale a $\mathcal{D}_2$ e $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 \neq \emptyset$.

Sia ora fissata una base ORTONORMALE $\mathcal{B}$. (In questo caso un riferimento affine viene detto *riferimento cartesiano ortogonale*).

Proposizione 13.12. *Siano dati un iperpiano* Π*, rappresentato dall'equazione*

$$a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = b$$

e una retta r *di coefficienti direttivi* $l_1, \ldots, l_n$*. Allora* r *è ortogonale a* Π *se e solo se* $(l_1, \ldots, l_n)$ *è proporzionale a* $(a_1, \ldots, a_n)$*.*

Dimostrazione.
La giacitura di Π ha equazione $a_1x_1+\cdots+a_nx_n=0$, perciò il vettore libero v di coordinate $(a_1,\ldots,a_n)$ genera il suo complemento ortogonale. La giacitura di r è ortogonale a quella di Π se e solo se coincide con il suo complemento ortogonale, perciò se e solo se un suo vettore è proporzionale a v.

Proposizione 13.13. *Date due rette r, di coefficienti direttivi $l_1,\ldots,l_n$, ed r', di coefficienti direttivi $l'_1,\ldots,l'_n$. Allora r è ortogonale ad r' se e solo se*

$$l_1l'_1+\cdots+l_nl'_n=0.$$

Dimostrazione.
r è ortogonale ad r' se e solo se un suo qualunque vettore libero è ortogonale ad un qualunque vettore libero di r'.

Proposizione 13.14. *Dati due iperpiani Π e Π' di equazioni rispettivamente*

$$a_1x_1+\cdots+a_nx_n=b, \qquad a'_1x_1+\cdots+a'_nx_n=b';$$

Π è ortogonale a Π' se e solo se

$$a_1a'_1+\cdots+a_na'_n=0.$$

Esempio.
Dati, in uno spazio 3-dimensionale reale, una retta r di equazioni

$$\begin{cases} x-2y+5z=1 \\ x-y-z=2 \end{cases}$$

e il piano Π di equazione

$$6x-3y+7z=0,$$

si trovi il piano Π' passante per r e ortogonale a Π.

Costruiamo il fascio di piani passanti per r:

$$\lambda(x-2y+5z-1)+\mu(x-y-z-2)=0;$$

cioè

$$(\lambda+\mu)x+(-2\lambda-\mu)y+(5\lambda-\mu)z+(-\lambda-2\mu)=0;$$

imponendo l'ortogonalità con Π otteniamo la condizione

$$6(\lambda + \mu) - 3(-2\lambda - \mu) + 7(5\lambda - \mu) = 0$$

cioè

$$47\lambda + 2\mu = 0$$

da cui un'equazione per Π':

$$45x - 43y - 57z - 92 = 0.$$

Capitolo 14

Iperquadriche.

14.1 Definizioni generali.

L'ambiente più corretto per lo sviluppo della teoria delle iperquadriche è lo spazio affine. Come già fatto in precedenza, ridurremo tale studio all'ambito vettoriale. D'ora in poi (per necessità tecniche che risulteranno più chiare in seguito) sarà fissato uno spazio vettoriale V su $\mathbb{K}$ di dimensione $n+1$ di cui lo spazio affine $\mathcal{A}$ in questione sarà considerato sottospazio affine n-dimensionale; $\mathcal{B}$ sarà una base ordinata fissata di V, che verrà sempre sottointesa. Il sottospazio affine $\mathcal{A}$ che costituirà l'ambiente della teoria sarà quello di equazione $x_{n+1} = 1$. Per alleggerire la notazione, spesso indicheremo le coordinate di un punto di $\mathcal{A}$ con la n-pla $(x_1, \ldots, x_n)$, invece che con la $n+1$-pla $(x_1, \ldots, x_n, 1)$.

Una *iperquadrica* $\mathcal{Q}$ di $\mathcal{A}$ è l'insieme di punti $P = (x_1, \ldots, x_n)$ tali che $q\left((x_1, \ldots, x_n, 1)\right) = 0$, dove q è la forma quadratica su $\mathbb{K}^{n+1}$, associata ad una forma bilineare simmetrica f su $\mathbb{K}^{n+1}$, e rappresentata dalla matrice simmetrica $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$ detta *discriminante* dell'iperquadrica.

L'*equazione* dell'iperquadrica è l'espressione

$$q\left((x_1, \ldots, x_n, 1)\right) = 0,$$

cioè

$$(x_1 \cdots x_n 1) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n+1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n+11} & \cdots & a_{n+1n+1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Si chiamano *coniche* e *quadriche* rispettivamente le iperquadriche di un piano e di uno spazio 3-dimensionale.

Esempi.
1) La conica $\overline{\Gamma}$ di discriminante

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

ha equazione (in coordinate x, y)

$$x^2 + 2y^2 + 6xy - 2y - 5 = 0.$$

2) La quadrica Θ di discriminante

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -9 \end{pmatrix}$$

ha equazione (in coordinate x, y, z)

$$x^2 + 2y^2 + 4z^2 - 2xy - 2xz - 2yz + 6z - 9 = 0.$$

14.2 Classificazione affine.

Un'iperquadrica si dice *degenere* se il suo discriminante ha determinante nullo. Altrimenti si dice *non degenere*.
Un'iperquadrica può anche essere vuota, se il campo $\mathbb{K}$ di definizione non è algebricamente chiuso.

Teorema 14.1. *Sul campo $\mathbb{R}$, un'iperquadrica non degenere è vuota se e solo se A rappresenta una forma quadratica definita positiva o definita negativa.*

Due iperquadriche non vuote si dicono *affinemente equivalenti* se esiste una trasformazione affine che trasforma una nell'altra.

Teorema 14.2. *Con $\mathbb{R}$ come campo, siano $\mathcal{Q}, \mathcal{Q}'$ due iperquadriche di discriminanti A, A' rispettivamente. Allora $\mathcal{Q}$ e $\mathcal{Q}'$ sono affinemente equivalenti se e solo se A è congruente a $\pm A'$ e il minore $A^{\widehat{n+1}}_{\widehat{n+1}}$ è congruente a $\pm A'^{\widehat{n+1}}_{\widehat{n+1}}$.*

14.3 Coniche reali nel piano affine e euclideo.

In tutto questo paragrafo Γ sarà una fissata conica di un piano affine su $\mathbb{R}$, di discriminante A.

Proposizione 14.1. *Sia Γ non degenere; essa è vuota se e solo se $A_{33} > 0$ e $a_{11} \cdot |A| > 0$.*

Esempio.
Per la conica $\overline{\Gamma}$ dell'esempio precedente, $A_{33} = -7$, perciò la conica non è vuota.

Teorema 14.3. *Ogni conica non degenere e non vuota è affinemente equivalente a una delle coniche di equazione:*

i) $x^2 + y^2 = 1$;

ii) $y = x^2$;

iii) $x^2 - y^2 = 1$.

Una conica si dice rispettivamente *ellisse, parabola, iperbole* se è affinemente equivalente alla conica di equazione 1, 2 o 3.

Teorema 14.4. *Sia Γ non degenere (cioè $|A| \neq 0$), essa è:*

1. *una ellisse non vuota se $A_{33} > 0$ e $a_{11} \cdot |A| \leq 0$;*
2. *una parabola se $A_{33} = 0$;*
3. *un'iperbole se $A_{33} < 0$.*

Osservazione 14.1. La conica non degenere con $A_{33} > 0$ e $a_{11} \cdot |A| > 0$ è detta *ellisse immaginaria*, in quanto, come già detto, non contiene punti reali.

Esempio.
La solita $\overline{\Gamma}$ è dunque un'iperbole.

Proposizione 14.2. *Nessuna conica non degenere contiene rette.*

ATTENZIONE - Iperquadriche anche non degeneri in dimensione superiore possono invece contenere rette.

D'ora in poi Γ sarà una conica non degenere e non vuota.

Proposizione 14.3. *Ogni retta interseca* Γ *in uno, due o nessun punto.*

Le intersezioni retta-conica si ottengono in corrispondenza delle soluzioni della risolvente del sistema delle loro equazioni, che risulta essere un'equazione di primo o di secondo grado. Se la risolvente ha una sola soluzione di molteplicità due, la retta si dice *tangente*; se non ha soluzioni la retta si dice *esterna*; altrimenti si dice *secante*. Quest'ultimo caso si verifica quando la risolvente è di primo grado oppure quando la risolvente è di secondo grado con due soluzioni distinte.

Esempi.
1) Consideriamo la conica

$$\Gamma : x^2 + 4y^2 + 4xy + 2x - 2y = 0$$

(si può verificare che è una parabola) e la retta

$$r : \begin{cases} x = t \\ y = -\frac{1}{2}t \end{cases},$$

e verifichiamo la loro posizione reciproca andando a risolvere il sistema

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 + 4xy + 2x - 2y = 0 \\ x = t \\ y = -\frac{1}{2}t \end{cases}.$$

La risolvente del sistema è l'equazione $3t = 0$ che ha una sola soluzione di molteplicità uno, quindi la retta r è secante a Γ.

2) Sia Γ come sopra e sia

$$s : \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases}.$$

Questa volta se andiamo a considerare il sistema retta-conica, la risolvente è l'equazione $9t^2 = 0$, che ha di nuovo la soluzione $t = 0$, ma questa volta di molteplicità due. Quindi s è tangente a Γ nell'origine (punto ottenuto in corrispondenza di $t = 0$).

Proposizione 14.4. *Sia $P \in \Gamma$, $P = (p_1, p_2)$, e sia A il discriminante di Γ; allora la retta tangente a Γ in P ha equazione cartesiana*

$$(p_1\ p_2\ 1) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Esempio.
Sia $\overline{\Gamma}$ la conica di discriminante

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -5 \end{pmatrix}.$$

Il punto $P = (\sqrt{5}, 0)$ appartiene a Γ. La tangente in P a Γ ha dunque equazione

$$(\sqrt{5}\ 0\ 1) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

cioè $\sqrt{5}x + (3\sqrt{5} - 1)y - 5 = 0$.

D'ora in poi lo spazio ambiente sarà un piano EUCLIDEO, e la base scelta sarà ortonormale.

Sia Γ una conica non degenere. Si chiama *asse* di Γ ogni retta r di simmetria ortogonale per la conica, cioè tale che ogni retta secante, ortogonale ad r, interseca r nel punto medio dei due punti di intersezione della secante con Γ.

Si chiama *centro* un punto C di simmetria centrale per la conica, cioè tale che C è il punto medio fra i due punti d'intersezione con Γ di ogni retta secante contenente C. Se tale punto esiste, allora è unico.

Osservazione 14.2. Ogni parabola ha un solo asse, ogni iperbole ha due assi, ogni ellisse (che non sia una circonferenza) ha due assi, infine la circonferenza ha infiniti assi. Ellisse e iperbole sono coniche a centro mentre la parabola no.

Proposizione 14.5. *Sia Γ una conica a centro di discriminante $A = (a_{ij})$. Allora il centro è il punto C di coordinate:*

$$\left(\frac{A_{31}}{A_{33}}, \frac{A_{32}}{A_{33}}\right)$$

Proposizione 14.6. *Sia Γ una conica non degenere di discriminante A. Ogni asse di Γ ha equazione*

$$(l\ m\ 0) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

dove (l, m) è un autovettore non nullo relativo ad un autovalore non nullo del minore $A_{\widehat{3}}^{\widehat{3}}$ di A.

Esempio.
Consideriamo nuovamente la conica $\overline{\Gamma}$ di discriminante

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -5 \end{pmatrix},$$

per $\overline{\Gamma}$ abbiamo autovalori $(3 \pm \sqrt{37})/2$, da cui si ricava $(l, m, 0) = (6, 1 \pm \sqrt{37}, 0)$, e quindi i due assi di $\overline{\Gamma}$ sono le rette di equazione

$$(9 \pm 3\sqrt{37})x + (20 \pm 2\sqrt{37})y + 1 \pm \sqrt{37} = 0\,.$$

Capitolo 15

Curve e superfici parametrizzate.

15.1 Curve parametrizzate.

In questo paragrafo cercheremo di formalizzare il concetto di curva nello spazio tridimensionale, che intuitivamente tutti abbiamo come “scia lasciata da un punto mobile, e di generalizzarlo al caso n-dimensionale reale.

Curve e superfici hammo come ambiente uno spazio affine o euclideo. Per semplificare la notazione, ma senza vera perdita di generalità, supporremo che tale spazio sia $\mathbb{R}^n$.
Consideriamo lo spazio vettoriale delle funzioni ad una variabile t, continue da un intervallo reale I (non necessariamente chiuso e/o limitato) ad $\mathbb{R}$, che denoteremo con $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$.

Siano $x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$.
Una *curva parametrizzata* $\mathbf{C}$ su I in $\mathbb{R}^n$ è la funzione

$$\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ t & \mapsto & (x_1(t), \ldots, x_n(t)). \end{array}$$

L'intervallo I è detto *intervallo di parametrizzazione* della curva. Si dice anche che l'n-pla $P(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ dà una parametrizzazione di $\mathbf{C}$.

Esempi.
1) La retta scritta in forma parametrica è una curva parametrizzata in cui l'intervallo I è tutto l'asse reale.

2) La circonferenza $\overline{\mathbf{C}}$ di raggio r e centro (α, β) ha per parametrizzazione

$$t \longrightarrow (\alpha + r\cos t, \beta + r\sin t), \qquad\qquad t \in [0, 2\pi].$$

Si dice *supporto* di $\mathbf{C}$ l'insieme

$$\text{supp}\,\mathbf{C} = \{(x_1(t), \ldots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n |\, t \in I\}.$$

ATTENZIONE – Anche se una curva e il suo supporto vengono spesso confusi, sono due cose diverse!

Esempio.
La curva $\widetilde{\mathbf{C}}$ che ha per parametrizzazione

$$t \longrightarrow (\alpha + r\cos t, \beta + r\sin t), \qquad\qquad t \in [0, 4\pi],$$

e $\overline{\mathbf{C}}$ hanno come supporto la stessa circonferenza, ma sono evidentemente diverse, avendo un diverso intervallo di parametrizzazione. Geometricamente $\overline{\mathbf{C}}$ percorre la circonferenza una volta, $\widetilde{\mathbf{C}}$ percorre la circonferenza due volte.

Una curva si dice *piana* se esiste un piano π che contiene il suo supporto, altrimenti si dice *gobba*.
In particolare per verificare che una curva $\mathbf{C} = (x(t), y(t), z(t))$ in $\mathbb{R}^3$ è piana bisogna trovare $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, con $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, tali che $\forall t \in I$ risulta

$$ax(t) + by(t) + cz(t) + d = 0.$$

Esempi.
1) Verifichiamo che la curva

$$\mathbf{E} = (5\cos t, \sqrt{3}\sin t, 0), \qquad\qquad t \in [0, 2\pi],$$

è piana. Si deve avere:

$$5a\cos t + \sqrt{3}b\sin t + d = 0$$

per ogni $t \in [0, 2\pi]$. Tale identità si ottiene ponendo $a = b = d = 0$, quindi $\mathbf{E}$ è una curva piana ed è contenuta nel piano di equazione $z = 0$.

2) Consideriamo la curva

$$\mathbf{G} = (2t^2 - t, t^3 - t^2, 5t + 1), \qquad\qquad t \in \mathbb{R},$$

e verifichiamo che è una curva gobba. Se G fosse piana dovrebbero esistere $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, con $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, per cui

$$a(2t^2 - t) + b(t^3 - t^2) + c(5t + 1) + d = 0,$$

cioè $bt^3 + (2a - b)t^2 + (-a + 5c)t + c + d = 0$, e quindi per il principio di identità dei polinomi si ottiene il sistema omogeneo:

$$\begin{cases} b = 0 \\ 2a - b = 0 \\ -a + 5c = 0 \\ c + d = 0 \end{cases},$$

che ammette la sola soluzione nulla.

Osservazione 15.1. Un metodo operativamente più efficiente per verificare se una curva è piana o gobba è il seguente. Si scelgano tre punti della curva non allineati P_1, P_2, P_3, si trovino le equazioni del piano Π contenente i tre punti e si verifichi che il punto generico della curva soddisfa tali equazioni per ogni valore del parametro.

Esempi.
1) Consideriamo la curva

$$\mathbf{C} = (3\cos^2 t, t, 3\sin^2 t), \qquad\qquad t \in [0, 5].$$

Consideriamo tre punti non allineati appartenenti alla curva, ad esempio $P_1 = (3, 0, 0)$, $P_2 = (0, \pi/2, 3)$, $P_3 = (9/4, \pi/6, 3/4)$, ottenuti rispettivamente per $t = 0, \pi/2, \pi/6$. Il piano passante per questi tre punti ha equazione

$$\Pi: \; x + z - 3 = 0.$$

Ora vediamo se il punto generico della curva appartiene a Π. Si ottiene l'equazione $3\cos^2 t + 3\sin^2 t - 3 = 0$, che chiaramente è verificata per ogni

$t \in [0,5]$. Quindi la curva $\mathbf{C}$ è piana.

2) Consideriamo la curva di equazioni parametriche:

$$\mathbf{M} : (\cos t, \sin t, 3t), \qquad\qquad t \in \mathbb{R},$$

che è un'elica circolare (la classica molla!) di passo costante 6π. Consideriamo i tre punti $P_1 = (1,0,0)$, $P_2 = (0,1,3\pi/2)$, $P_3 = (-1,0,3\pi)$ ottenuti dalle equazioni di $\mathbf{M}$ rispettivamente per $t = 0, \pi/2, \pi$. L'equazione del piano passante per questi tre punti è

$$\Pi' : \ -x - \frac{2}{3\pi} z + 1 = 0.$$

Sostituendo le coordinate del punto generico di $\mathbf{M}$ otteniamo l'equazione $-\cos t - 2t/\pi + 1 = 0$, che non è verificata ad esempio per $t = -\pi/2$. Quindi $\mathbf{M}$ è una curva gobba.

Osservazione 15.2. Nel caso dei sottospazi affini, abbiamo visto che esistono sia una rappresentazione parametrica che una cartesiana. Anche per le curve (o meglio per i loro supporti), in molti casi, esiste una rappresentazione cartesiana. Un metodo per ricavarla è l'eliminazione del parametro. Nell'esempio di pagina 100, $\mathbf{E}$ non era altro che l'ellisse di equazioni:

$$\mathbf{E} : \begin{cases} x^2/25 + y^2/3 = 1 \\ z = 0. \end{cases}$$

Sia $t_0 \in I$, e sia $\mathbf{C}$ la curva parametrizzata da $(x_1(t), \ldots, x_n(t))$ su I. Allora $\mathbf{C}$ si dice *regolare* in t_0 se le funzioni $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ sono derivabili in t_0 e risulta

$$(x_1'(t_0), \ldots, x_n'(t_0)) \neq (0, \ldots, 0),$$

altrimenti il punto si dice *singolare*.
Più in generale diremo che una curva è *regolare* se lo è in ogni punto del suo intervallo di parametrizzazione, ed è *singolare* altrimenti.

Si dice *retta tangente* a $\mathbf{C}$ nel suo punto $P_0 = P(t_0)$ la "retta limite, se esiste, di quella che contiene la corda P_0P al tendere di P verso P_0 lungo $\mathbf{C}$.

Proposizione 15.1. *Sia $\mathbf{C} \subset \mathbb{R}^n$ una curva parametrizzata da $(x_1(t), \ldots, x_n(t))$ e regolare in t_0. Allora $\mathbf{C}$ ammette retta tangente in $P_0 = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ e* *questa ha equazioni parametriche*

$$\begin{cases} x_1 = \bar{x}_1 + x_1'(t_0)s \\ x_2 = \bar{x}_2 + x_2'(t_0)s \\ \vdots \\ x_n = \bar{x}_n + x_n'(t_0)s \end{cases}, \qquad s \in \mathbb{R}.$$

Osservazione 15.3. In $\mathbb{R}^2$ consideriamo la funzione continua $y = f(x)$, con $x \in I$. Questa definisce una curva $\mathbf{C}$ con la parametrizzazione standard:

$$t \longmapsto (t, f(t)), \qquad t \in I.$$

$\mathbf{C}$ risulta regolare in ogni punto in cui esiste $f'(t)$. Sia t_0 un tale punto e sia $P_0 = (t_0, f(t_0))$. Allora la retta tangente in P_0 a $\mathbf{C}$ ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = t_0 + s \\ y = f(t_0) + f'(t_0)s \end{cases}, \qquad s \in \mathbb{R}.$$

Quindi eliminando il parametro s si ottiene l'equazione cartesiana

$$y = f(t_0) + f'(t_0)(x - t_0),$$

come è noto dall'Analisi.

Esempio.
Calcoliamo la tangente all'elica $\mathbf{M}$ dell'esempio precedente nel punto che si ottiene per $t = \pi$, cioè $P = (-1, 0, 3\pi)$.
Il vettore delle derivate $(-\sin t, \cos t, 3)$ calcolato nel punto π risulta $(0, -1, 3)$, e quindi la retta tangente, in forma parametrica, è:

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = -s \\ z = 3\pi + 3s \end{cases}, \qquad s \in \mathbb{R}.$$

15.2 Superfici parametrizzate.

Siano I e I' due intervalli reali (non necessariamente chiusi e/o limitati). Consideriamo una funzione continua f definita su due variabili:

$$\begin{array}{rccl} f: & I \times I' & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (s,t) & \mapsto & f(s,t). \end{array}$$

L'insieme delle funzioni di questo tipo è uno spazio vettoriale, che indicheremo con $\mathcal{C}^0(I \times I', \mathbb{R})$.

Siano $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathcal{C}^0(I \times I', \mathbb{R})$.
Una *superficie parametrizzata* $\mathcal{S}$ su $I \times I'$ in $\mathbb{R}^n$ (con $n \geq 2$) è la funzione

$$\begin{array}{ccc} I \times I' & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ (s,t) & \mapsto & (x_1(s,t), x_2(s,t), \ldots, x_n(s,t)). \end{array}$$

Si dice che l'n-pla $P(s,t) = (x_1(s,t), x_2(s,t), \ldots, x_n(s,t))$ dà una parametrizzazione della superficie $\mathcal{S}$.

Si dice *supporto* di $\mathcal{S}$ l'insieme

$$\operatorname{supp} \mathcal{S} = \{(x_1(s,t), x_2(s,t), \ldots, x_n(s,t)) \in \mathbb{R}^n | (s,t) \in I \times I'\}.$$

Esempi.
Vediamo ora la costruzione di 3 particolari tipi di superficie: il cono, il cilindro e la sfera.
1) Consideriamo una curva parametrizzata $\mathbf{D}$

$$\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ t & \mapsto & (x_1(t), x_2(t), x_3(t)), \end{array}$$

e un punto $V = (a, b, c)$ non appartenente a $\mathbf{D}$.
Il *cono* di *vertice* V e *direttrice* $\mathbf{D}$ è il luogo delle rette, dette *generatrici*, che passano per V, e intersecano $\mathbf{D}$ in un punto.
Calcoliamo le sue equazioni parametriche. Per farlo è sufficiente scrivere la generica retta passante per un punto della direttrice e per il vertice. Sia quindi $P = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ un generico punto appartenente a $\mathbf{D}$, la retta per P e V ha equazioni parametriche

$$\left\{ \begin{array}{l} x = (x_1(t) - a)s + a \\ y = (x_2(t) - b)s + b \\ z = (x_3(t) - c)s + c \end{array} \right. ;$$

le stesse equazioni, al variare di $t \in I$ e di $s \in \mathbb{R}$, danno una parametrizzazione del cono. Chiaramente per ogni fissato valore del parametro t ottengo una generatrice del cono.

Per esempio il cono di vertice $V = (0, 0, -1)$ e con direttrice la circonferenza parametrizzata da

$$t \longmapsto (3\cos t, 3\sin t, 0), \qquad\qquad t \in [0, 2\pi],$$

ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 3s\cos t \\ y = 3s\sin t \\ z = s - 1 \end{cases}, \qquad\qquad (s, t) \in \mathbb{R} \times [0, 2\pi].$$

2) Sia $\mathbf{D}$, come sopra, una generica curva parametrizzata in $\mathbb{R}^3$ e sia $v = (l, m, n)$ un vettore di $\mathbb{R}^3$ diverso da zero. Il *cilindro* di *direttrice* $\mathbf{D}$ e *vettore libero* v è il luogo delle rette, dette *generatrici*, passanti per un punto di $\mathbf{D}$ e con vettore libero v. Analogamente a quanto fatto per il cono, per ottenere equazioni parametriche per il cilindro, consideriamo un punto $P = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ appartenente a $\mathbf{D}$. Allora la retta passante per P e con vettore libero v ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = ls + x_1(t) \\ y = ms + x_2(t) \\ z = ns + x_3(t) \end{cases}.$$

Come prima, le stesse equazioni, al variare di $t \in I$ e di $s \in \mathbb{R}$, danno una parametrizzazione del cilindro. Di nuovo per ogni fissato valore del parametro t ottengo una generatrice del cilindro.

3) Infine, siano fissati $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ e r un numero reale positivo.
La superficie $\mathcal{S}$

$$\begin{array}{ccc} [-\pi/2, \pi/2] \times [0, 2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (\varphi, \psi) & \mapsto & (\alpha + r\cos\varphi\sin\psi, \beta + r\cos\varphi\cos\psi, \gamma + r\sin\varphi) \end{array}$$

è detta *sfera* di raggio r e centro (α, β, γ).
Osserviamo che i parametri φ e ψ sono rispettivamente la latitudine e la longitudine. Quindi per ogni fissato valore del parametro φ si ottiene un parallelo, mentre per ogni fissato valore del parametro ψ si ottiene un meridiano. I punti ottenuti ponendo $\varphi = -\pi/2$ e $\varphi = \pi/2$ sono detti poli della sfera.

Data una superficie $\mathcal{S}$ di parametrizzazione $x_1(s,t), \ldots, x_n(s,t)$ su $I \times I'$, tale che esistano le derivate parziali di $x_1, \ldots, x_n$ consideriamo la matrice

$$J(s,t) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1(s,t)}{\partial s} & \dfrac{\partial x_1(s,t)}{\partial t} \\ \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial x_n(s,t)}{\partial s} & \dfrac{\partial x_n(s,t)}{\partial t} \end{pmatrix};$$

questa è detta *matrice jacobiana* relativa alla data parametrizzazione di $\mathcal{S}$.

La superficie $\mathcal{S}$ si dice *regolare* in $(s_0, t_0) \in I \times I'$ se la matrice jacobiana calcolata in (s_0, t_0) ha rango massimo (cioè 2), altrimenti il punto è detto *singolare*.
Una superficie parametrizzata $\mathcal{S}$ si dice *regolare* se non ha punti singolari, si dice *singolare* altrimenti.

Esempi.
1) Consideriamo un generico cono di vertice $V = (a, b, c)$ e direttrice $\mathbf{D}$

$$\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ t & \mapsto & (x_1(t), x_2(t), x_3(t)), \end{array}$$

tale che le funzioni x_i siano derivabili e verifichiamo che il vertice è un punto singolare. Dalle equazioni parametriche (si veda pagina 104) si trova che la matrice jacobiana è

$$J(s,t) = \begin{pmatrix} x_1(t) - a & x_1'(t)s \\ x_2(t) - b & x_2'(t)s \\ x_3(t) - c & x_3'(t)s \end{pmatrix},$$

che calcolata in $(0, t)$ ha una colonna di zeri e quindi ha rango ≤ 1.

2) Consideriamo ora la sfera parametrizzata dalle equazioni di pagina 105 e verifichiamo che i poli sono punti singolari. Infatti la matrice jacobiana relativa a tale parametrizzazione è:

$$J(\varphi, \psi) = \begin{pmatrix} -r \sin\varphi \sin\psi & r \cos\varphi \cos\psi \\ -r \sin\varphi \cos\psi & -r \cos\varphi \sin\psi \\ r \cos\varphi & 0 \end{pmatrix},$$

che calcolata nei poli ha la seconda colonna di zeri.

Osservazione 15.4. L'essere sigolare o meno può essere, come nel caso dell'esempio precedente, una qualità di un punto della superficie parametrizzata e non del corrispondente supporto. Infatti lo stesso insieme di punti (la sfera) può essere parametrizzato in modo diverso, con punti sigolari diversi da questi.

Esempio.
Consideriamo il cilindro di vettore libero $(0, 0, 1)$ e direttrice l'ellisse di equazioni parametriche

$$\varphi \longmapsto (3\cos\varphi, 2\sin\varphi, 0), \qquad\qquad \varphi \in [0, 2\pi].$$

Le equazioni parametriche del cilindro sono

$$\begin{cases} x = 3\cos\varphi \\ y = 2\sin\varphi \\ z = s \end{cases}, \qquad\qquad (s, \varphi) \in \mathbb{R} \times [0, 2\pi],$$

quindi la sua matrice jacobiana è:

$$J(\varphi, s) = \begin{pmatrix} 3\sin\varphi & 0 \\ 2\cos\varphi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si vede facilmente che per ogni valore di (φ, s) la matrice jacobiana ha rango due. Tale cilindro è quindi una superficie regolare.

Osservazione 15.5. Anche le superfici possono sovente essere espresse in forma cartesiana, che si può ottenere per eliminazione dei parametri.

Esempi.
1) Cerchiamo una forma cartesiana per il supporto della sfera. Ricordiamo che una sua parametrizzazione è

$$\begin{cases} x = \alpha + r\cos\varphi\sin\psi \\ y = \beta + r\cos\varphi\cos\psi \\ z = \gamma + r\sin\varphi \end{cases}, \qquad\qquad (\varphi, \psi) \in [-\pi/2, \pi/2] \times [0, 2\pi],$$

con (α, β, γ) come centro e r come raggio.
Si ha

$$
\begin{aligned}
(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2 &= (\alpha+r\cos\varphi\sin\psi-\alpha)^2+(\beta+r\cos\varphi\cos\psi-\beta)^2\\
&\quad+(\gamma+r\sin\varphi-\gamma)^2\\
&= r^2\cos^2\varphi\sin^2\psi+r^2\cos^2\varphi\cos^2\psi+r^2\sin^2\varphi\\
&= r^2\cos^2\varphi(\sin^2\psi+\cos^2\psi)+r^2\sin^2\varphi\\
&= r^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)\\
&= r^2,
\end{aligned}
$$

quindi una equazione cartesiana per la sfera di centro (α,β,γ) e raggio r è (come forse sospettavate!)

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=r^2.$$

2) Il cono di pagina 105 può essere rappresentato dall'equazione cartesiana:

$$x^2+y^2-9(z+1)^2=0,$$

che si ottiene eliminando i parametri.

3) Il cilindro di pagina 107 ha come equazione cartesiana:

$$\left(\frac{x}{3}\right)^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2=1.$$

Indice analitico