Funzioni continue

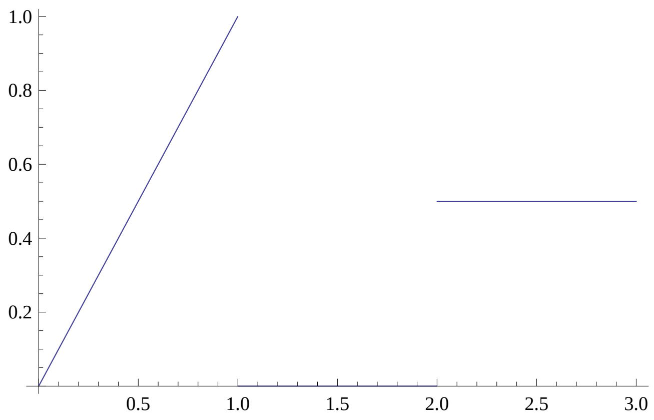
Definizione di limite e di funzione continua

■ Esercizio 1.

Dire quali delle seguenti funzioni sono continue.

■ $f : [0, 1] \bigcup [2, 3] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x & x \in [0, 1] \\ \frac{1}{2} & x \in [2, 3] \end{cases}$

```
Plot[Piecewise[{{x, x <= 1}, {1 / 2, x >= 2}}], {x, 0, 3}]
```



f è continua.

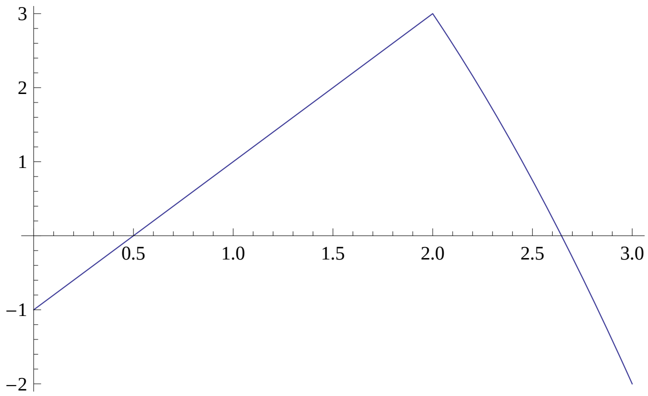
Infatti, fissiamo y∈[0,1]. Per tale fissato y posso trovare un suo intorno in [0,1] che non interseca [2,3]. In tale intorno quindi $f(x) = x$, e quindi $\lim_{x\to y} f(x) = y = f(y)$.

Analogamente, se fissiamo y∈[2,3], possiamo trovare un suo intorno in [2,3] che non interseca [0,1]. In tale intorno quindi $f(x) = \frac{1}{2}$, e quindi $\lim_{x\to y} f(x) = \frac{1}{2} = f(y)$.

Così $\forall\ y \in [0, 1] \bigcup [2, 3]\ \exists\ \lim_{x\to y} f(x) = f(y)$.

- $f : [0, 3] \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & x \in [0, 2] \\ 7 - x^2 & x \in]2, 3] \end{cases}$

```
Plot[Piecewise[{{2 x - 1, x ≤ 2}, {7 - x^2, x > 2}}], {x, 0, 3}]
```



f è continua. Sia, infatti, $y \in [0, 2[$. Per tale fissato y posso trovare un suo intorno in $[0, 2[$ che non interseca $]2,3]$ e sul quale quindi la funzione vale $f(x) = 2x - 1$, e quindi $\lim_{x\to y} f(x) = 2y - 1 = f(y)$. Analogamente per ogni fissato $y \in]2, 3]$ posso trovare un suo intorno in $]2, 3]$ che non interseca $[0,2[$ e sul quale quindi la funzione vale $f(x) = 7 - x^2$, quindi $\lim_{x\to y} f(x) = 7 - y^2 = f(y)$. Inoltre, $\exists \lim_{x\to 2} f(x) = 3 = f(2)$.
Cioè $\forall\ y \in [0, 3]\ \exists \lim_{x\to y} f(x) = f(y)$.

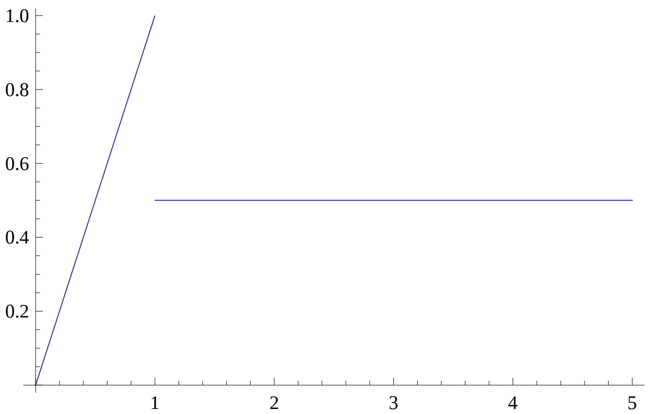
Esercizio 2.

Sia $f : [0, 5] \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x & x \in [0, 1] \\ \frac{1}{2} & x \in]1, 5] \end{cases}$

Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.

```
Plot[Piecewise[{{x, x <= 1}, {1/2, x > 1}}], {x, 0, 5}]
```

Il grafico di f è il seguente:



- f è continua.

Falso. Infatti $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \frac{1}{2} \neq 1 = f(1)$.

f non è continua in 1.

Vero. Infatti $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \frac{1}{2} \neq 1 = f(1)$.

- $f([0, 5])$ è un intervallo.

Vero. Infatti essendo f continua su $[0, 1]$, intervallo, per il teorema di Bolzano, anche $f([0, 1])$ è un intervallo, in particolare $f([0, 1]) = [0, 1]$. Analogamente essendo f continua su $]1, 5]$, vale $f(]1, 5])$ intervallo, in particolare $f(]1, 5]) = \left\{\frac{1}{2}\right\}$. Così $f([0, 5]) = f([0, 1]) \cup \left\{\frac{1}{2}\right\} = [0, 1] \cup \left\{\frac{1}{2}\right\} = [0, 1]$.

Si noti che in questo caso $f([0, 5])$ è un intervallo nonostante non valgano le ipotesi del teorema di Bolzano (perchè f non è continua):

- $f([0, 5])$ non è un intervallo.

Falso. Vedi punto precedente.

Esercizio 3.

`Sia f:]0,+∞[→ℝ e supponiamo che esistano` $\lim_{x\to 0} f(x) = 3$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 5$.
`Dire se le affermazioni seguenti sono vere.`

- esiste $\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = 3$.

Vero. Lo verifichiamo con la definizione di limite.
Se $f : A \to \mathbb{R}$ e x_0 è punto di accumulazione per A, diciamo che $\exists \lim_{x\to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R} \iff \forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successione in $A - \{x_0\}$ tale che $x_n \overset{n\to\infty}{\to} x_0$, il limite della successione $f(x_n)$ è l, cioè $f(x_n) \overset{n\to\infty}{\to} l$.
Il punto 0 è nel derivato di $]0,\infty[$. Sapendo per ipotesi che $\exists \lim_{x\to 0} f(x) = 3$, poichè la successione $\frac{1}{n} \to 0$, applico la definizione di limite ottenendo che esiste $\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = 3$.

- esiste $\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = 5$.

Falso. Per il teoriema di unicità del limite per le successioni e perchè abbiamo già visto che esiste $\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = 3$.

- non abbiamo informazioni sufficienti a garantire l'esistenza del limite della successione $f\left(\frac{1}{n}\right)$.

Falso. Per il punto precedente.

Esercizio 4

`Sia f:]0,+∞[→ℝ` continua.
Dire se le affermazioni seguenti sono vere.

- Esiste $\lim_{x\to\infty} f\left(\frac{2x^2+5}{x^2-3}\right)$.

Vero. Richiamiamo il seguente teorema sul limite di una funzione composta:
$\exists \lim_{x\to x_0} f(g(x)) = m \Leftrightarrow ((\exists \lim_{x\to x_0} g(x) = l)$ e $((g(x)\neq l \; \forall\, x \neq x_0)$ oppure $(f$ continua in $l))$ e $\left(\exists \lim_{y\to l} f(y) = m\right)\right)$.

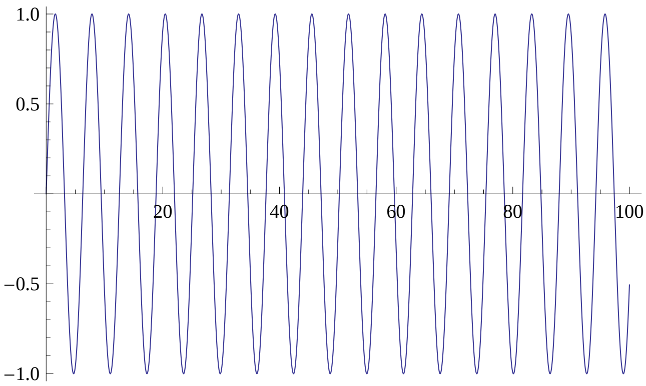
Verifichiamo che valga il secondo membro dell'equivalenza con $g(x) = \frac{2x^2+5}{x^2+6}$:

- $\exists \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+5}{x^2+6} = 2$.
- f continua in 2 per ipotesi.
- $\exists \lim_{y\to 2} f(y) = f(2)$ perchè f è continua in 2 per ipotesi.

- Esiste $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

Falso. Un controesempio è dato dalla funzione $f(x) = \sin(x)$, che non ha limite per x→∞ Il grafico di f è riportato qui sotto.
Per vedere che f non ha limite per x→∞ troviamo due successioni x_k, x_n per cui $f(x_k)$ e $f(x_n)$ hanno limiti diversi e applichiamo la definizione di limite data nell'esercizio 3. Per esempio:
Per $x_k = 2\,k\pi$ vale $f(2\,k\pi) = 0 \;\forall\, k \in \mathbb{N}$, mentre per $x_n = \frac{\pi}{2} + 2\,n\pi$ vale $f\left(\frac{\pi}{2} + 2\,n\pi\right) = 1 \;\forall\, n \in \mathbb{N}$.

```
Plot[Sin[x], {x, 0, 100}]
```



- Non abbiamo informazioni sufficienti a garantire l'esistenza di $\lim_{x\to\infty} f\left(\frac{3\,e^x-5\,x}{e^x+x^5}\right)$.

Falso. Verifichiamo che valga il teorema enunciato al punto precedente con $g(x) = \frac{3\,e^x-5\,x}{e^x+x^5}$:

- $\exists \lim_{x\to\infty} \frac{3\,e^x+5\,x}{e^x+x^5} = 3$.
- f continua in 3 per ipotesi.
- $\exists \lim_{y\to 3} f(y) = f(3)$ perchè f è continua in 3 per ipotesi.

- Esiste $\lim_{x\to 4} f(x)$.

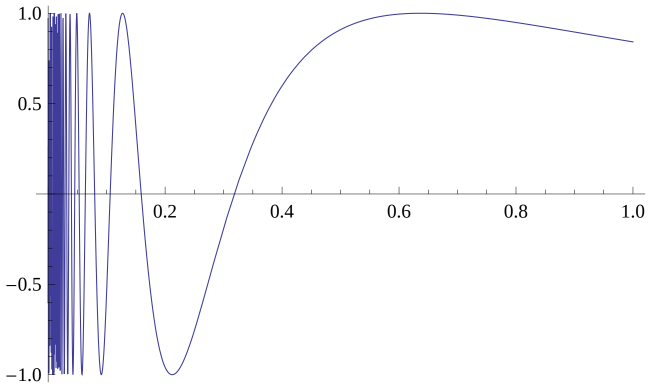
Vero. Perchè 4 è punto di continuità di f, quindi, per definizione di funzione continua in un punto, esiste $\lim_{x\to 4} f(x) = f(4)$.

- Esiste $\lim_{x\to 0} f(x)$.

Falso. Un controesempio è dato dalla funzione $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, il cui grafico è riportato di sotto.

Il limite non esiste perchè troviamo come nel caso precedentemente esaminato della funzione $\sin(x)$ due successioni $x_k = \frac{1}{2\,k\pi}$ e $x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\,n\pi}$ che hanno limiti diversi.

```
Plot[Sin[1 / x], {x, 0, 000 000 000 001, 1}]
```



Esercizio 5

Sia f:[0,+∞[→ℝ e supponiamo che esista $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$.
Dire se le affermazioni seguenti sono vere.

- f è inferiormente limitata.

Falso. Se lo fosse, per definizione di funzione inferiormente limitata, esisterebbe $m \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) \geqslant m \;\forall\, x \geqslant 0$.
Ma allora, per ogni successione (x_n) in $[0, \infty[$, $f(x_n) \geq m$. Questo è in contrapposizione con l'ipotesi $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$.

- $\mathcal{D}(f)$ è inferiormente limitato.

Vero. $\mathcal{D}(f) = [0, +\infty[$. $0 = \inf \mathcal{D}(f)$.

- $\inf f = -\infty$

Vero. Dall'ipotesi che $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$. Infatti, per definizione $\inf f = -\infty$ se $\forall\, m \in \mathbb{R}\; \exists\, x \in \mathcal{D}(f)$ tale che $f(x) < m$. Ma questo è vero perchè $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$.

- Non abbiamo informazioni sufficienti a garantire l'esistenza di minimo per f.

Falso. Il minimo non esiste (vedi punto successivo):

- Non esiste min f.

Vero. Infatti, qualora esistesse $x \in [0, \infty[$ tale che $f(x) = \inf f$, poiché inf f = -∞, dovrebbe essere $f(x) = -\infty$. Ma questo è assurdo.

Teorema degli zeri e dei valori intermedi

Dire se le affermazioni seguenti sono vere:

Esercizio 1.

Sia $f : [3;\, 5] \to \mathbb{R}$ continua e tale $f(3) = 2$, $f(5) = 7$ Allora esiste x∈]3,5[tale che $f(x) = 4$.

Vero. Essendo f continua per ipotesi, per il teorema dei valori intermedi $f([3, 5])$ è un intervallo che chiamiamo I. Per ipotesi si sa che $\{2, 7\} \subset I$, quindi tutti i numeri compresi tra 2 e 7 sono contenuti nell'intervallo I. In particolare $4 \in I = f([3, 5])$ quindi esiste $x \in [3, 5]$ tale che $f(x) = 4$, ma $f(3) = 2$ e $f(5) = 7$, quindi non possono essere i punti 3 o 5 ad aver immagine 4, cioè $x \in]3, 5[$.

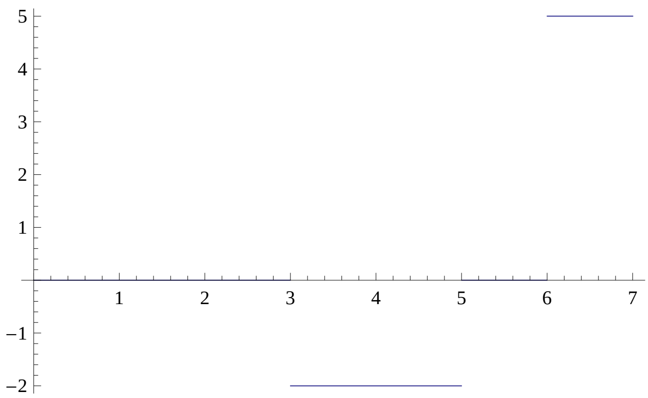
■ Esercizio 2.

Sia $f : [3; 5] \cup [6; 7] \to \mathbb{R}$ continua e tale che $f(3) = -2$, $f(7) = 5$. Allora

a) esiste $x \in [3, 5]$ tale che $f(x) = 4$.

Falso. Un controesempio è dato dalla funzione $f(x) = \begin{cases} -2 & x \in [3, 5] \\ 5 & x \in [6, 7] \end{cases}$ che è continua su $[3, 5] \cup [6, 7]$ ma non assume mai il valore 4 in $[3,5] \cup [6,7]$.

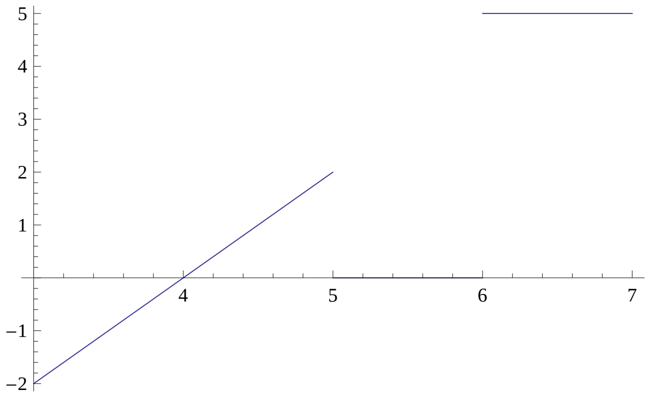
```
Plot[Piecewise[{{-2, 3 < x <= 5}, {5, x >= 6}}], {x, 0, 7}]
```



b) non sono verificate le ipotesi del teorema degli zeri, quindi non possiamo dire se la funzione si annulla.

Vero. In effetti f non è definita su un intervallo $[a, b]$. quindi non sono verificate le ipotesi del teorema. Questo non implicsa che la tesi del teorema sia falsa, ma ci obblida ad una verifica direta. Portiamo due controesempi per vedere che non si può nè garantire nè negare l'esistenza di un punto in cui la funzione sia zero.

Vogliamo dapprima rappresentare graficamente una funzione che sia continua su $[3; 5] \cup [6; 7]$, valga -2 in $x = 3$, 5 in $x = 7$ e che si annulli in un punto del dominio.



Un esempio di funzione continua che vale -2 in $x = 3$, 5 in $x = 7$ e che non si annulla mai in $[3; 5] \cup [6; 7]$ è quella del punto a.

■ Esercizio 3

Sia $f : [0; +\infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = -e^{3x} + x^4 + 4\cos(x)$. Allora:

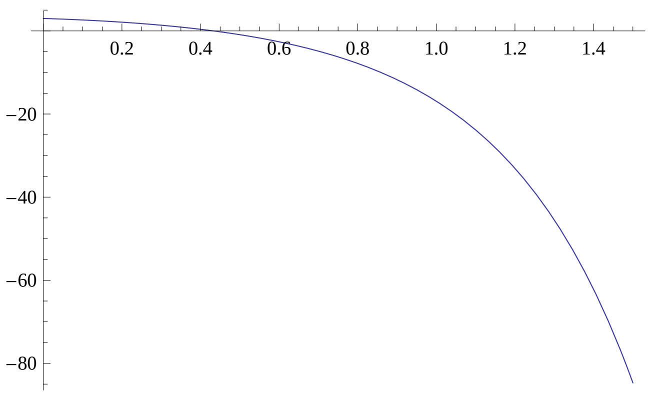
- esiste $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

Vero. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ perchè, essendo $\cos(x) \le 1$ per ogni x, vale $-e^{3x} + x^4 + 4\cos(x) = -e^{3x} + o(e^{3x}) \underset{x \to +\infty}{\to} -\infty$.

- f ha almeno uno zero.

Vero. Osserviamo anzitutto che f è continua perchè somma di funzioni continue. Vogliamo applicare il teorema degli zeri. Osserviamo che $f(0) = -1 + 4 = 3 > 0$, ed esiste $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, pertanto esiste $M > 0$ tale che $f(M) < 0$ e f continua su $[0, M]$ posso applicare il teorema degli zeri concludendo che $\exists\, x$ tale che $f(x) = 0$.

```
Plot[-Exp[3 x] + x^4 + 4 Cos[x], {x, -0, 1.5}]
```



■ Esercizio 4

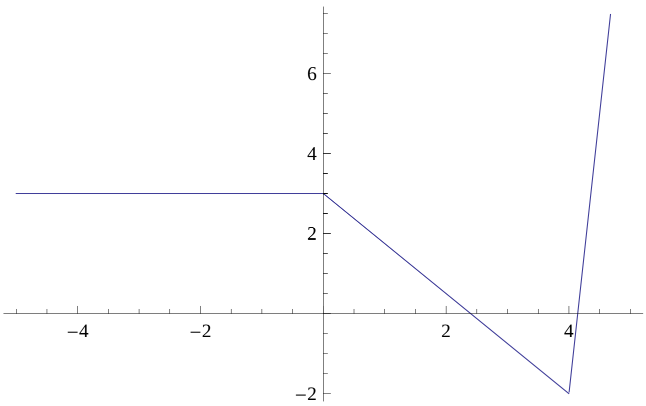
Sia $f :]-\infty, 5[\to \mathbb{R}$ continua e tale che esiste $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 3$ e $f(4) = -2$. Allora:

- f ha almeno uno zero.

Vero. Osserviamo che, poichè $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 3 > 0$, per il teorema di permanenza del segno, esiste un intorno di $-\infty$ ove f è sempre positiva, cioè $\exists\, M < 0$ tale che $f(x) > 0\ \forall\ x \leq M$. Fissiamo $m < M$. Allora f è continua su $[m, 4]$, $f(m) > 0$, $f(4) < 0$. Possiamo dunque applicare il teorema degli zeri sull'intervallo $[m, 4]$ per concludere che esiste $x \in]\, m, 4[$ tale che $f(x) = 0$.

- f non assume il valore 5

Falso. Un controesempio è portato da una funzione che sia definita in maniera continua su $]-\infty, 5[$ in modo tale che $\exists \lim_{x\to-\infty} f(x) = 3$, $\exists\ f(4) = -2$ e $\exists \lim_{x\to 5} f(x) = a$ dove a è un numero arbitrario tale che $a > 5$.



- f assume tutti i valori in $[-2, 3[$.

Vero. Essendo f continua su $]-\infty, 4]$ che è un intervallo, per il teorema dei valori intermedi $f(]-\infty, 4])$ è un intervallo, in particolare è l'intervallo delimitato da $\inf_{]-\infty,4]} f$ e $\sup_{]-\infty,4]} f$. Poiché $f(4) = -2$, $\inf_{]-\infty,4]} f \leq 2$. Allo stesso modo, poichè esiste $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 3$, $\sup_{]-\infty,4]} f \geq 3$. D'altra parte il valore -2 è assunto da f in 4, così $[-2, 3[\, \subset f(]-\infty, 4])$.

- $f(]-\infty, 4]) = [-2, 3[$

Falso. La funzione f definita in risposta alla seconda domanda assume il valore 5 che è fuori dall'intervallo $[-2, 3[$.

Teorema di Weierstrass

Dire se le affermazioni seguenti sono vere.

■ Esercizio 1

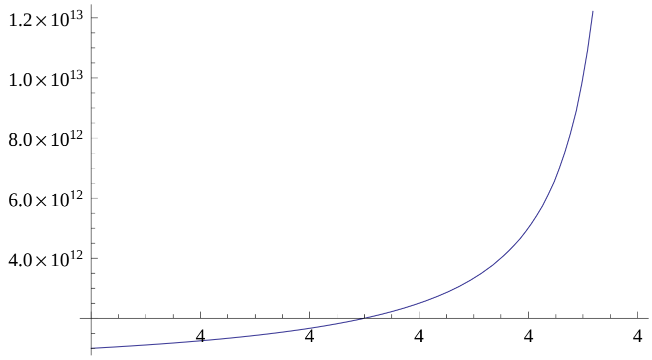
Sia $f : [0, 4] \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x} + x^8 - 7$. Allora f ha massimo.

Vero. Perchè sono valide le ipotesi del teorema di Weierstrass: f è continua su $[0, 4]$ perchè somma di funzioni continue su $[0, 4]$ e $[0, 4]$ è un intervallo chiuso e limitato.

■ Esercizio 2

Sia $f : [0, 4[\to \mathbb{R}$ continua. Allora f verifica le ipotesi del teorema di Weierstrass e quindi ha massimo.

Falso. Perchè $[0, 4[$ non è un intervallo chiuso. Un controesempio è dato dalla funzione continua in $[0, 4[$ $f(x) = \frac{1}{4-x}$ che tende a $+\infty$ per $x \to 4^-$.



■ Esercizio 3

Sia $f :]0, 4[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{(e\wedge x + x\wedge 4)}{x}$. Allora

- f verifica le ipotesi del teorema di Weierstrass e quindi ha massimo.

Falso. L'intervallo $]0, 4[$ infatti non è chiuso. La funzione f non ha massimo perchè $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$ (vedi punto successivo).

- $\sup_{x\in]0,4[} f = +\infty$ quindi f non ha massimo.

Vero. Infatti $\exists \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x + x^4}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$.