Definizione di limite e di funzione continua

1) Dire quali delle funzioni seguenti sono continue:

- $f : [0,1] \cup [2,3] \to R$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} x & se \;\; x \in [0,1] \\ \frac{1}{2} & se \;\; x \in [2,3]. \end{cases}$$

- $f : [0,3] \to R$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} 2x-1 & se \;\; x \in [0,2] \\ 7-x^2 & se \;\; x \in]2,3]. \end{cases}$$

2) Sia $f : [0,5] \to R$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} x & se \;\; x \in [0,1] \\ \frac{1}{2} & se \;\; x \in]1,5]. \end{cases}$$

Dire quali, fra le affermazioni seguenti, sono vere:

- f é continua
- f non é continua in 1
- $f([0,5])$ é un intervallo
- $f([0,5])$ non é un intervallo

3) Sia $f :]0,+\infty[\to R$ e supponiamo che esistano $\lim_{x\to 0} f(x) = 3$, $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 5$. Dire se le affermazioni seguenti sono vere:

- esiste $\lim_{n\to +\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = 3$
- esiste $\lim_{n\to +\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = 5$
- non abbiamo informazioni sufficienti a garanire l' esistenza del limite della successione $f\left(\frac{1}{n}\right)$.

4) Sia $f :]0,+\infty[\to R$ continua. Dire se le affermazioni seguenti sono vere:

- esiste $\lim_{x\to +\infty} f\left(\frac{2x^2+5}{x^2-3x}\right)$

- esiste $\lim_{x \to +\infty} f(x)$
- non abbiamo informazioni sufficienti a garanire l' esistenza di $\lim_{x \to +\infty} f\left(\frac{3e^x - 5x}{e^x + x^5}\right)$.
- esiste $\lim_{x \to 4} f(x)$
- esiste $\lim_{x \to 0} f(x)$

5) Sia $f : [0, +\infty[\to R$ e supponiamo che esista $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$. Dire se le affermazioni seguenti sono vere:

- f e' inferiormente limitata
- $\mathcal{D}(f)$ é inferiormente limitato
- $\inf f = -\infty$
- Non abbiamo informazioni sufficienti a garantire l'esistenza di minimo per f
- Non esiste $\min f$

Teorema degli zeri e dei valori intermedi

Dire se le affermazioni seguenti sono vere

1) Sia $f : [3,5] \to R$ continua e tale $f(3) = 2$, $f(5) = 7$ Allora esiste $x \in]3,5[$ tale che $f(x) = 4$.

2) Sia $f : [3,5] \cup [6,7] \to R$ continua e tale $f(3) = -2$, $f(7) = 5$ Allora

- esiste $x \in [3,5]$ tale che $f(x) = 4$.
- non sono verificate le ipotesi del teorema degli zeri, quindi non possiamo dire se la funzione si annulla.

3) Sia $f : [0, +\infty[\to R$ $f(x) = -e^{3x} + x^4 + 4\cos(x)$. Allora

- Esiste $\lim_{x\to+\infty} f(x)$
- f ha almeno uno zero

4) Sia $f :]-\infty, 5[\to R$ continua e tale che esiste $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 3$, e $f(4) = -2$

- f ha almeno uno zero
- f non assume il valore 5
- f assume tutti i valori in $]-2, 3[$
- $f(]-\infty, 4]) = [-2, 3[$

Teorema di Weiestrass

Dire se le affermazioni seguenti sono vere:

1) Sia $f : [0,4] \to R$ $f(x) = e^{-x} + x^8 - 7$. Allora f ha massimo.

2) Sia $f : [0,4[\to R$ continua. Allora f verifica le ipotesi del teorema di Weiestrass, e quindi ha massimo.

3) Sia $f :]0,4[\to R$ $f(x) = \frac{e^x + x^4}{x}$. Allora

- f verifica le ipotesi del teorema di Weiestrass, e quindi ha massiimo
- $\sup f = +\infty$, quindi f non ha massimo