Determinare il dominio e la derivata delle seguenti funzioni e studiarne la monotonia ed eventuali massimi/minimi

$$f(x) = \log\left(\frac{|x+2|}{|x|-1}\right) \tag{1}$$

$$f(x) = \sqrt{|x|}\exp(|x|^3) \tag{2}$$

$$f(x) = \arctan\left(-\frac{|x|}{x-1}\right) \tag{3}$$

$$f(x) = e^{(x^2+|x-1|)} \tag{4}$$

Determinare il dominio e studiare la derivabilità delle seguenti funzioni

(5)

$$f(x) = |x|\log(1-x^2)$$

(6)

$$f(x) = \begin{cases} x^2\sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

1)

$$f(x) = \log\left(\frac{|x+2|}{|x|-1}\right)$$

Sol.

Dominio: l'argomento deve essere strettamente positivo, cioè si deve risolvere la disequazione $\frac{|x+2|}{|x|-1} > 0$. Poichè il numeratore è sempre strettamente positivo tranne nel punto $x = -2$ dove si annulla, tale disequazione è soddisfatta per gli x tali che $|x| > 1, x \neq -2$.
Quindi $D(f) =]-\infty, -2[\cup]-2, -1[\cup]1, +\infty[$.
Teoremi sulla derivabilità di funzioni composte garantiscono che f è derivabile in ogni punto del suo dominio eccetto nei punti in cui si annullano i moduli che in questo caso non appartengono al dominio della funzione.
Si ha allora

$$\forall x \in D(f) \quad f'(x) = \frac{sign(x+2)(|x|-1) - |x+2|sign(x)}{(|x+2|)(|x|-1)}.$$

Per lo studio della monotonia studiamo il segno di f': poichè $|x| - 1$ e $|x+2|$ sono sempre positivi in $D(f)$, sarà sufficiente studiare il segno di

$$\begin{aligned} sign(x+2)(|x|-1) - |x+2|sign(x) &= sign(x+2)[|x| - 1 - (x+2)sign(x)] \\ &= -sign(x+2)(1 + 2sign(x)) \end{aligned}$$

che ha lo stesso segno di $-sign(x+2)sign(x)$. Quindi

- f è monotona decrescente in $]-\infty, -2[$;
- f è monotona crescente in $]-2, -1[$;
- f è monotona decrescente in $]1, +\infty[$;

Poichè la derivata prima non si annulla mai in punti interni al dominio, non esistono punti di non derivabilità e gli estremi degli intervalli di definizione di f non appartengono al dominio,allora la funzione non ha massimi/minimi relativi nè assoluti.

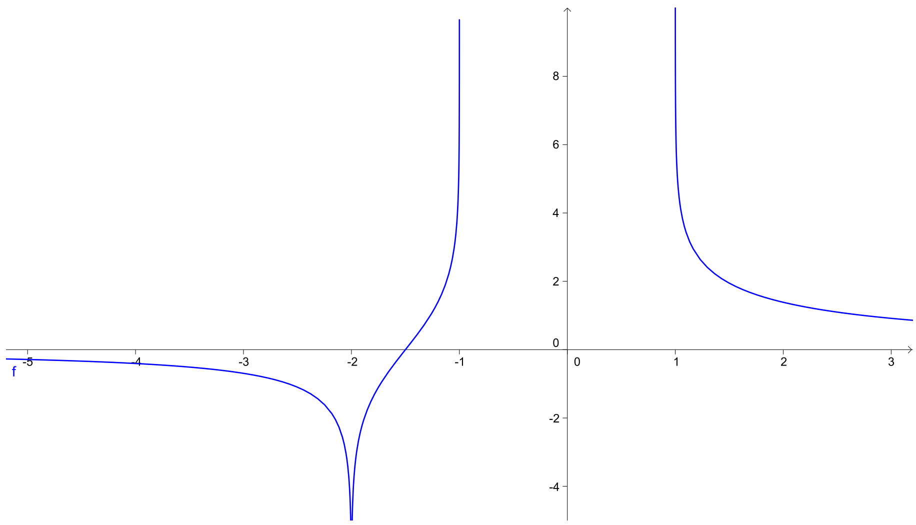

Figura 1: Grafico di $f(x) = \log\left(\frac{|x+2|}{|x|-1}\right)$

2)

$$f(x) = \sqrt{|x|}\exp(|x|^3)$$

Sol:

Dominio: $D(f) = \mathbb{R}$.
Per $x \neq 0$ la funzione è derivabile di derivata prima

$$f'(x) = \left[\frac{1}{2}|x|^{-1/2}sign(x) + 3|x|^2 sign(x)\sqrt{|x|}\right]\exp(|x|^3).$$

Studiamo la derivabilità in $x = 0$ utilizzando la definizione di derivata. Studiamo quindi

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{|x|}\exp(|x|^3)}{x}$$

che non esiste e quindi la funzione non è derivabile in $x = 0$.
Studiamo la monotonia: Per $x < 0$ si ha $f'(x) < 0$ quindi f è monotona decrescente nell'intervallo $]-\infty, 0[$;
per $x > 0$ si ha $f'(x) > 0$ quindi f è monotona crescente nell'intervallo $]0, +\infty[$.
Non esistono punti in cui la derivata prima si annulla. Il punto $x = 0$ è un punto di non derivabilità e $f(0) = 0$ mentre $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ quindi esso risulta il punto di minimo assoluto.

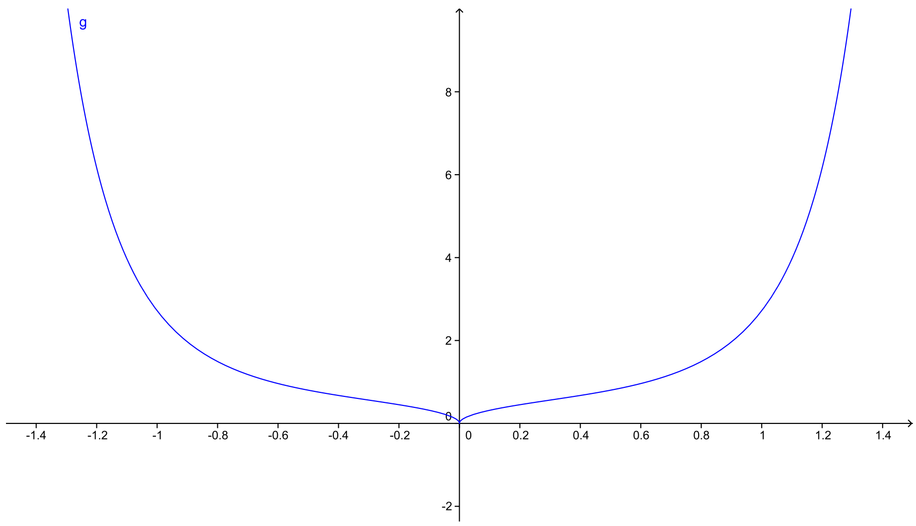

Figura 2: Grafico di $f(x) = \sqrt{|x|}\exp(|x|^3)$

3)

$$f(x) = \arctan\left(-\frac{|x|}{x-1}\right)$$

Sol:

Dominio: $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Teoremi sulla derivabilità di funzioni composte garantiscono che f è derivabile in ogni punto del suo dominio eccetto nei punti in cui si annullano i moduli, cioè $x = 0$. Allora

$$\forall x \in D(f)\setminus\{0\} \quad f'(x) = -\left(\frac{sign(x)(x-1) - 2x|x|}{(x-1)^2}\right)\left(\frac{1}{1+\frac{x^2}{(x-1)^2}}\right) = -\frac{sign(x)(x-1-2x^2)}{(x-1)^2+x^2}$$

Poichè

$$\lim_{x\to 0^+} -\frac{sign(x)(x-1-2x^2)}{(x-1)^2+x^2} = 1$$

mentre

$$\lim_{x\to 0^-} -\frac{sign(x)(2x^2-x+1)}{(x-1)^2+x^2} = -1$$

la funzione non è derivabile in $x = 0$.

Poichè $2x^2 - x + 1$ e $(x-1)^2 + x^2$ sono sempre positivi, la derivata ha lo stesso segno di $sign(x)$. Allora:

- la funzione è derivabile nell'intervallo $]-\infty, 0[$ con derivata strettamente negativa, quindi essa risulta monotona decrescente in $]-\infty, 0[$;

- la funzione è derivabile nell'intervallo $]0, 1[$ con derivata strettamente positiva, quindi essa risulta monotona crescente in $]0, 1[$

- la funzione è derivabile nell'intervallo $]1, +\infty[$ con derivata strettamente positiva, quindi essa risulta monotona crescente in $]1, +\infty[$

Osservare che pur essendo monotona crescente negli intervalli $]0, 1[$ e $]1, +\infty[$ essa non è monotona nell'unione: per vedere questo è sufficiente notare che la funzione è positiva in $]0, 1[$ e negativa in $]1, +\infty[$.

La derivata prima non si annulla mai in punti interni del dominio e gli estremi degli intervalli di definizione di f non appartengono al dominio, quindi gli eventuali punti di massimo/minimo vanno ricercati tra i punti di non derivabilità della funzione, in questo caso $x = 0$.

Si ha che $f(0) = 0$ e $f(x) > 0$ per $x < 1$, quindi $x = 0$ è un punto di minimo locale. Esso tuttavia non è un punto di minimo assoluto poichè per $x > 1$ la funzione è negativa.

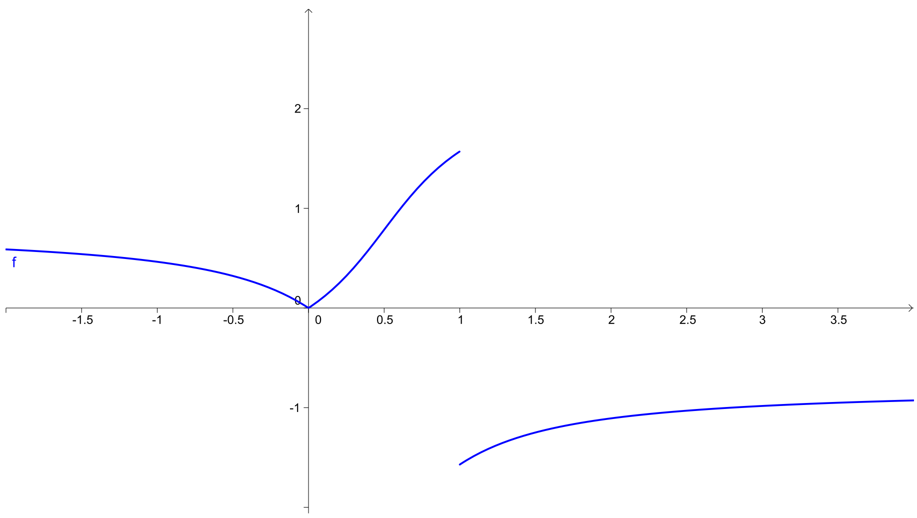

Figura 3: Grafico di $f(x) = \arctan(-\frac{|x|}{x-1})$

4)

$$f(x) = e^{(x^2+|x-1|)}$$

Sol:
$D(f) = \mathbb{R}$.
Teoremi sulla derivabilità di funzioni composte garantiscono che f è derivabile in ogni punto del suo dominio eccetto nei punti in cui si annulla il valore assoluto, cioè $x = 1$. Allora

$$\forall x \in D(f) \setminus \{1\} \quad f'(x) = (2x + sign(x-1))e^{(x^2+|x-1|)}.$$

Per quanto riguarda la derivabilità in $x = 1$ si ha che

$$\lim_{x\to 1^+}(2x + sign(x-1))e^{(x^2+|x-1|)} = 3e$$

mentre

$$\lim_{x\to 1^-}(2x + sign(x-1))e^{(x^2+|x-1|)} = e$$

quindi la funzione non è derivabile in $x = 1$.
Per studiare il segno della derivata prima è sufficiente studiare il segno di $2x + sign(x-1)$ in $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ visto che $e^{(x^2+|x-1|)}$ è sempre strettamente positivo.
Il segno di $2x + sign(x-1)$ è lo stesso di quello di $2x - 1$.
Allora poichè f è derivabile in $]1, +\infty[$ con $f' > 0$ in tale intervallo risulta monotona crescente.
Poichè f è derivabile in $]-\infty, 1[$ dallo studio del segno di f' risulta che f è monotona decrescente in $]-\infty, 1/2[$ e monotona crescente in $]1/2, 1[$.
Inoltre, essendo f continua in $x = 1$ essa risulta monotona crescente anche in $]1/2, +\infty[$, quindi il punto di non derivabilità $x = 1$ non è nè un massimo relativo nè un minimo relativo.
Invece $x = 1/2$ risulta dallo studio precedente un punto di minimo.

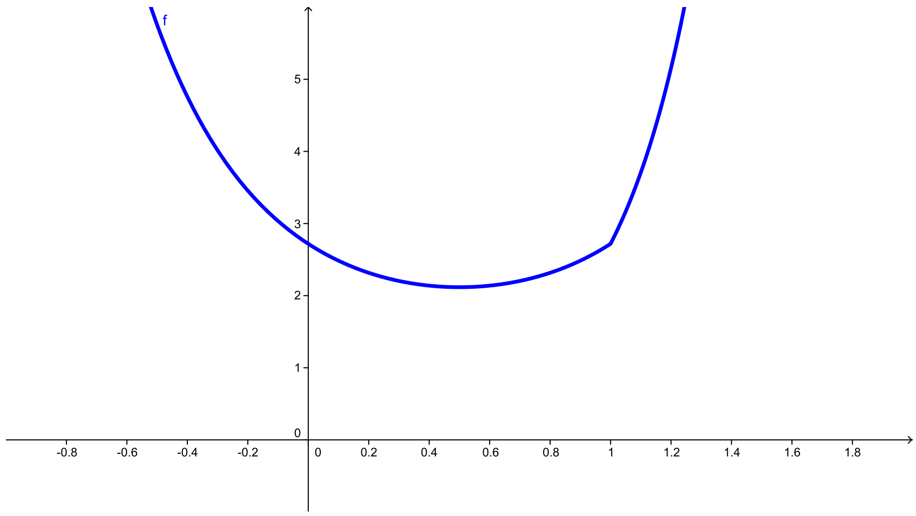

Figura 4: Grafico di $f(x) = e^{(x^2+|x-1|)}$

5)
$$f(x) = |x| \log(1 - x^2)$$

Sol:
Dominio: f è definita quando l'argomento del logaritmo è strettamente positivo quindi $D(f) =]-1, 1[$.
Per teoremi di composizione e prodotto tra funzioni derivabili, la funzione f risulta sicuramente derivabile in tutti i punti del suo dominio a parte in $x = 0$ e si ha
$$f'(x) = sign(x) \log(1 - x^2) - 2\frac{x|x|}{1 - x^2} \quad \forall x \in D(f) \setminus \{0\}$$
. Studiamo la derivabilità in $x = 0$: dagli sviluppi di Taylor si ha
$$f(x) = |x|(-x^2 + o(x^2)) = o(x)$$
per $x \to 0$ per cui la funzione è derivabile in $x = 0$ con derivata nulla.
In sintesi si ha
$$f'(x) = sign(x) \log(1 - x^2) - 2\frac{x|x|}{1 - x^2} \quad \forall x \in D(f)$$

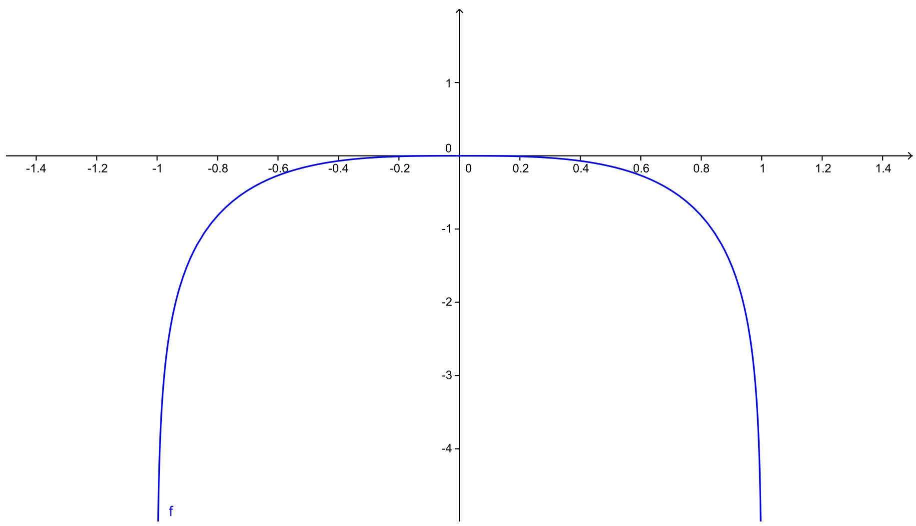

Figura 5: Grafico di $f(x) = |x| \log(1 - x^2)$

6)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Sol:
$D(f) = \mathbb{R}$.
Per teoremi sulla derivabilità di prodotto e composizione di funzioni, risulta

$$\forall x \in D(f) \setminus \{0\} \quad f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

Studiamo la derivabilità in $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

quindi la funzione è derivabile su tutto $\mathbb{R}$ con derivata

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Notare che la funzione f' non è continua in $x = 0$.

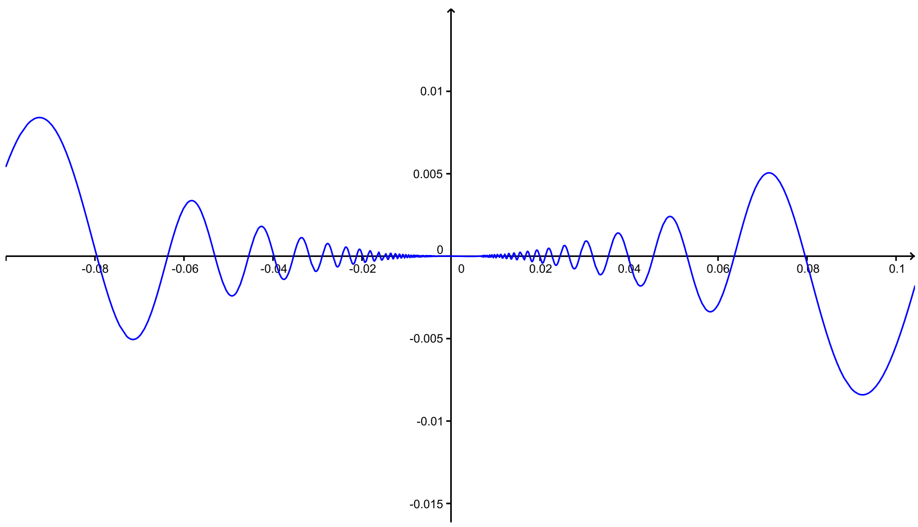

Figura 6: Grafico di f(x)