7 novembre 2008 - PROVA INTERMEDIA - Analisi Matematica

NOME:	**MATRICOLA**:

Rispondere UNICAMENTE su questo foglio, scrivendo le risposte e le spiegazioni richieste.

Stabilire la verità (V) o falsità (F) di ciascuna delle seguenti affermazioni, marcando con una crocetta il simbolo corrispondente e **Motivando brevemente la risposta**. Ogni risposta corretta vale $1,5$ punti, ogni risposta errata $-1,5$ punto, La mancata risposta comporta punteggio nullo. Verranno dati punteggi parziali in caso di motivazione incompleta della risposta

Nel seguito riportiamo esercizi risolti. In blu sono invece riportati commenti ed indicazioni per aiutare lo studente a risolvere l'esercizio - non sono da riportare in un eventuale scritto

(V) (F) Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione limitata ha limite.

F. Per provare che un'affermazione è falsa, occorre esibire un controesempio. Successioni non convergenti si possono in generale costruire a partire dalla successione $(-1)^n$ Controesempio: $a_n = (-1)^n$ è una successione limitata che non ha limite

(V) (F) Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successioni in $\mathbb{R}$. Se hanno entrambe limite allora $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ha limite.

Si tratta di forma indeterminata legata alla somma. Per provare che l'affermazione è falsa, costruiamo un controesempio, manipolando ancora la successione $(-1)^n$ **F**. Controesempio: $a_n = (-1)^n + n$ e $b_n = -n$; si ha che $lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$, $lim_{n\to+\infty} b_n = -\infty$ e
$\nexists\ lim_{n\to+\infty}(a_n + b_n) = lim_{n\to+\infty}(-1)^n$.

(V) (F) Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successione in $\mathbb{R}$ tale che esista $\lim_{n\to+\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$. Se $a_n > 0$ per ogni n, allora $a > 0$.

F. Nella costruzione di un contoesempio di una successione convergente, si suggerisce di pensare a successioni semplici, per esempio razionali Controesempio: $a_n = \frac{1}{n}$, in quanto $\frac{1}{n} > 0$ per ogni n e $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$.

(V) (F) Si dice che esiste $\lim_{n\to+\infty} a_n = -1$ se $\forall\epsilon > 0\ \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} : \exists n \geq n_\epsilon : |a_n + 1| \leq \epsilon$.

F. La definizione corretta è: $\forall\epsilon > 0\ \exists\, n_\epsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_\epsilon\ |a_n + 1| \leq \epsilon$.

(V) (F) Sia $f : [0, 8] \to \mathbb{R}$ $f(x) = \begin{cases} x & x \in [0, 6] \\ 1/2 & x \in]6, 8] \end{cases}$. Allora f è continua.

F. per provare che f non è continua in 6 dobbiamo esibire due successioni convergenti a 6 che abbiano limiti diversi Sciegliamo $x_n = 6 - 1/n$ e $y_n = 6 + 1/n$. Poiché $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = 6 \neq \lim_{n\to+\infty} f(y_n) = \frac{1}{2}$, allora la funzione f non è continua in 6.

(V) (F) Sia $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continua, e tale che non esiste $lim_{x\to+\infty} f(x)$. Allora non esiste $lim_{x\to+\infty} f(\frac{3x^2+7x-1}{x^2+5})$.

F. Infatti per le proprietà delle funzioni continue e il teorema sui limiti della composizione, esiste
$lim_{x\to+\infty} f(\frac{3x^2+7x-1}{x^2+5}) = f(3)$ lo studente noti che, in generale, per provare che una affermazione è falsa, si usa un controesempio. In questo caso sarebbe quindi stato possibile usare un controesempio, ma esisteva un risultato piú generale, che dica che l'affermazione era sempre falsa

(V) (F) Se $f : [0, 2[\to \mathbb{R}$ è continua, allora f ha massimo.

F. Controesempio: Sia $f : [0, 2[\to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \frac{1}{2-x}$. Allora f è una funzione continua in $[0, 2[$ e non ha massimo, in quanto $\lim_{x\to2} f(x) = +\infty$. si noti che la funzione è definita soltanto per $x < 2$, quindi non dobbiamo distinguere limiti da destra o sinistra

(V) (F) Se $f : [0, 2[\to \mathbb{R}$ è continua, allora $f([0, 2[)$ è un intervallo.

V. Per il teorema di Bolzano.

(V) (F) $x^2 + x^4 = x^4 + o(x^4)$ per $x \to 0$.

F. $x^2 + x^4 = x^2 + o(x^2)$ per $x \to 0$.

svolgere i seguenti esercizi, riportando i passaggi principali della soluzione

ESERCIZIO 1 *(3 punti)* Calcolare $\lim_{n\to+\infty}\frac{4e^n+3n^8-log(n)}{e^n+2n^8+5log(n)}$

Poiché $3n^8-log(n)=o(4e^n)$ e $2n^8+5log(n)=o(e^n)$, allora

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{4e^n+3n^8-log(n)}{e^n+2n^8+5log(n)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{4e^n+o(4e^n)}{e^n+o(e^n)}=4.$$

ESERCIZIO 2 *(3 punti)* Determinare il dominio della funzione f, definita da $f(x)=log\left(\frac{x-2}{|x|-5}\right)$

Per determinare il dominio imponiamo che l'argomento del log sia positivo $D(f)=\{x:\frac{x-2}{|x|-5}>0\}$, quindi si ha:

consideriamo il segno del primo fattore: $x-2$	$-------------2+++++++$
consideriamo il segno del secondo fattore $\lvert x\rvert-5$	$+++-5----------5++++$
determiniamo il segno del prodotto come prodotto dei segni	$----5++++++++2--5++++$

IL dominio di f risulta quindi $D(f)=]-5,2]\cup]5,+\infty[$

ESERCIZIO 3 *(3 punti)* Siano f e g due funzioni, definite sul loro dominio naturale dalle espressioni $f(x)=log(x)$, $g(x)=x-7$. Dire se esiste la composizione $f\circ g$ ed eventualmente calcolarla

Abbiamo che $f:]0;+\infty[\to\mathbb{R}$ e $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.
Quindi non esiste la composizione $f\circ g$ perché $Codominio(g(x))=\mathbb{R}\not\subseteq Dominio(f(x))=]0;+\infty[$.
Per poter fare la composizione dovrei prendere una restrizione del dominio della funzione g.

$\boxed{\texttt{ESERCIZIO 4}}$ *(3 punti)* Calcolare il seguente limite $lim_{x\to0}\frac{log(cos(5x))}{exp(sin(2x))-1}$

Poiché $\cos(5x)=1-(5x)^2/2+o(x^2)$, e $log(1+y)=y+o(y)$, allora

$$log(\cos(5x))=log(1-(5x)^2/2+o(x^2))=-(5x)^2/2+o(x^2)+o\Big(-(5x)^2/2+o(x^2)\Big)=-(5x)^2/2+o(x^2)$$

Poiché $sin(2x)=2x+o(x)$ e $exp(y)=1+y+o(y)$, allora

$$e^{sin(2x)}=exp(2x+o(2x))=1+2x+o(2x)+o(2x+o(2x))=1+2x+o(x)$$

Sostituendo nel limite si ottiene

$$\lim_{x\to0}\frac{log(\cos(5x))}{e^{sin(2x)}-1}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{25}{2}x^2+o(x^2)}{2x+o(x)}=0$$

ESERCIZIO 5 *(3 punti)*

Calcolare il seguente limite $lim_{x\to+\infty}\frac{(1+x)^{11}-(7+x)^{11}}{\sin(2/x)\cos(1/x)x^{11}}$

Raccogliamo in ciascun termine x^{11} e lo cancelliamo:

$$lim_{x\to+\infty}\frac{(1+x)^{11}-(7+x)^{11}}{sin(2/x)cos(1/x)x^{11}}=lim_{x\to+\infty}\frac{(\frac{1}{x}+1)^{11}-(\frac{7}{x}+1)^{11}}{sin(2/x)cos(1/x)}$$

Al numeratore notiamo che $y=1/x\to0$ se $y\to+\infty$, e usiamo il fatto che $(1+y)^{11}=1+11y+o(y)$. Al denominatore svilupiamo ogni fattore. si noti che per ciascun fattore è necessario trovare il termine di ordine massimo, e un o-piccolo. Sarà quindi necessario sviluppare il seno al primo ordine: , e sarà sufficiente sviluppare il coseno all'ordine 0 Gli sviluppi dei fattori al denominatore saranno quindi:

$$sin(2/x)=2/x+o(2/x),\quad cos(1/x)=1+o(1)$$

Sostituendo si ottiene

$$lim_{x\to+\infty}\frac{(1+\frac{11}{x}+o(\frac{1}{x}))-(1+\frac{77}{x}+o(\frac{1}{x}))}{\left(\frac{2}{x}+o(\frac{1}{x})\right)(1+o(1))}=-\frac{66}{2}=-33$$