Calcolo differenziale

Determinare il gradiente delle funzioni seguenti, nel punto indicato. Scrivere inoltre il piano tangente al grafico nel medesimo punto:

$$f(x,x) = e^{x+3y} + x \quad \textit{nel punto} \quad (0,2)$$

$$f(x,x) = sin(x-y^2) \quad \textit{nel punto} \quad (1,1)$$

$$f(x,x,z) = cos(y-z) + log(x) \quad \textit{nel punto} \quad (1,2,3)$$

$$f(x,x,z) = x^3y + e^z \quad \textit{nel punto} \quad (1,2,3)$$

Determinare la matrice Jacobiana delle funzioni seguenti:

$$f(x,y) = (ye^x, x^2y), \quad f(x,y) = (sin(x-y), x^2+y^2)$$

$$f(x,y,z) = (ye^{z-2}, x^2y), \quad f(x,y,z) = (z + cos(xy), xyz^5)$$

Derivata della composizione

Sia $g_1 \in \mathcal{C}^{(1)}\Big(\mathbf{R}^2;\mathbf{R}\Big)$. Calcolare la derivata delle funzioni seguenti:

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \qquad f(t) = g\Big(t^3, cos(t)\Big).$$

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \qquad f(t) = g\Big(e^{3t}, t^4\Big).$$

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \qquad f(t) = g\Big(sin(t), t^4 - t^3\Big).$$

Sia $g_1 \in \mathcal{C}^{(1)}(\mathbf{R}^3;\mathbf{R})$. Calcolare il gradiente delle funzioni seguenti:

$$f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}, \qquad f(x,y) = g\Big(xy^2, y, x^2+y^2\Big).$$

$$f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}, \qquad f(x,y) = g\Big(xy, sin(x), x^2-y\Big).$$

$$f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}, \qquad f(x,y) = g\Big(x, ysin(x), x^2cos(y)\Big).$$

Massimi e minimi relativi

Determinare i punti critici delle funzioni seguenti e classificarli:

1. $f(x,y) = 2x^2 + 3xy + 8y^2 - 15x - 25y + 35$
2. $f(x,y) = -3x^2 + xy - 4y^2 + 16x + 13y - 37$
3. $f(x,y) = x^2 + 3xy + y^2 - 8x - 7y + 11$
4. $f(x,y) = 3x^2 + 2xy - y^2 - 14x - 2y + 15$
5. $f(x,y) = x\,(x^2 + y^2 - 4)$
6. $f(x,y) = x(x^2 + 2y^2 - 3)$
7. $f(x,y) = x(y - x^2 + 1)$
8. $f(x,y) = (x - y)(y^2 - x)$
9. $f(x,y) = x^3 + y^3 + xy$
10. $f(x,y) = x^3 - y^3 + xy$

Sia $f \in \mathcal{C}\,(R^3; R)$, $\nabla f(0,1,2) = 0$. Dire quale delle seguenti affermazioni è vera:

1. $(0,1,2)$ è un estremante relativo per f
2. se la matrice hessiana di f nel punto $(0,1,2)$ ha un autovalore positivo, allora $(0,1,2)$ è un punto di minimo relativo per f
3. se la matrice hessiana di f nel punto $(0,2,1)$ è definita negativa, allora $(0,2,1)$ è un punto di massimo relativo per f

Sia $v : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$; dire quale delle seguenti affermazioni è vera:

1. Se $v \in \mathcal{C}^{(2)}$ e (b,c) è punto di minimo relativo per v, allora $\mathcal{H}_v(b,c)$ è definita positiva
2. Se $v \in \mathcal{C}^{(1)}$ e $\nabla v(b,c) = 0$, allora (b,c) è estremante relativo per v
3. Se $v \in \mathcal{C}^{(2)}$ e (b,c) è punto critico tale che $\mathcal{H}_v(b,c)$ è definita negativa, allora è punto di massimo relativo per v.
4. Se (b,c) è punto di massimo relativo per v, allora $v \in \mathcal{C}^{(1)}$ e $\nabla v(b,c) = 0$