Esercizi di Analisi Matematica II

CdL in "Ingegneria Edile e Architettura"
a.a. 2015 - 2016, Bologna

1. **Integrali doppi su triangoli e parallelogrammi** Calcolare i seguenti integrali
   - $\iint_R y\,dxdy$ con R triangolo di vertici $(0,0),(1,1),(2,1)$;
   - $\iint_R x\,dxdy$ con R triangolo di vertici $(1,-1),(2,0),(0,1)$;
   - $\iint_R (x-y)\,dxdy$ con R parallelogrammo di vertici $(1,1),(2,2),(2,3),(1,2)$;
   - $\iint_R (x+y)\,dxdy$ con R parallelogrammo di vertici $(-1,-1),(-3,-1),(-4,-2),(-2,-2)$;
2. **Integrali doppi: metodo per riduzione** Calcolare per riduzione $\iint_R f(x,y)\,dxdy$ con
   - $f(x,y)=xy^2$; $R=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid y\geq x^2\,;\,x\geq y^2\}$;
   - $f(x,y)=x$; $R=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid xy\geq 1\,;\,2x+2y\leq 5\}$;
   - $f(x,y)=e^y$; $R=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid y\leq \lg x\,;\,y\geq \frac{x-1}{e-1}\}$;
   - $f(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2}$; $R=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid 0\leq x\leq 1\,;\,x\leq y\leq 1\}$;
   - $f(x,y)=x^2e^{x+y}$; $R=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid y\geq x^2\,;\,x+2y\leq 1\}$;
   - $f(x,y)=xy^2$; $R=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid y^2-1\leq x\leq 0\}$;
   - $f(x,y)=\frac{x}{1+y^2}$; $R=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid xy\leq 1\,;\,0\leq x,y\leq 2\}$;
   - $f(x,y)=xy$; $R=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x^2\leq x+y\leq 1\}$;
   - $f(x,y)=\sin(x+y)$; $R=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid 1\leq x+y\leq 2\,;\,x,y\geq 0\}$.
3. **Integrali doppi: coordinate polari** Calcolare, passando in coordinate polari, i seguenti integrali
   - $\iint_R x\,dxdy$ con $R=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2\leq 4\,;\,y\geq |x|\}$;
   - $\iint_R (xy+1)\,dxdy$ con $R=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x^2+2y^2\leq 1\}$;
   - $\iint_R (x^2+y)\,dxdy$ con $R=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid (x-1)^2+(y-2)^2\leq 2\}$;
   - $\iint_R (x^2-y^2)\,dxdy$ con $R=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2\leq 1\,;\,x+y\geq 0\}$.
4. **Integrali doppi: baricentro di lamine** Calcolare il baricentro delle seguenti figure piane
   - R triangolo di vertici $(1,0),(2,1),(4,0)$ e densità $\mu(x,y)=x$;
   - R triangolo di vertici $(-2,1),(0,-1),(1,2)$ e densità $\mu(x,y)=e^y$;
   - R parellologrammo di vertici $(1,0),(1,1),(0,2),(0,1)$ e densità $\mu(x,y)=y$;
   - R parellologrammo di vertici $(1,-1),(2,-1),(0,-2),(1,-2)$ e densità $\mu(x,y)=x$;
   - R disco di raggio 2, centro il punto $(1,2)$ e densità $\mu(x,y)=y$;
   - R con $R=\{x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid 0\leq x\leq\pi\,;\,0\leq y\leq \sin x\}$ e densità $\mu(x,y)=y$
5. **Integrali doppi: momento d'inerzia** Calcolare il momento d'inerzia, rispetto ad una retta $r_{(a,b)}$ perpendicolare al piano xy e passante per il punto (a,b), delle seguenti figure piane (si suppone la densità $\mu(x,y)\equiv 1$)
   - $R=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2\leq 1\}$, e $(a,b)=(1,1)$;
   - $R=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid y^2\leq x\leq 1\}$, e $(a,b)=(0,0)$;
   - $R=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid 0\leq x\leq 1\,;\,0\leq y\leq\sqrt{x}\}$, e $(a,b)=(0,1)$;
   - $R=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x^2+(y-1)^2\leq 1\}$, e $(a,b)=(1,0)$.

6. **Integrali tripli: metodo di riduzione per fili e per strati** Calcolare mediante riduzione per fili o per strati $\iiint_R f(x,y,z)\,dxdydz$ con
   - $f(x,y,z) = x+2 \quad ; \quad R = [1,2]\times[-1,3]\times[2,4]\,;$
   - $f(x,y,z) = x^2y \quad ; \quad R = [-1,1]\times[0,2]\times[1,3]\,;$
   - $f(x,y,z) = x^2+y^2 \quad ; \quad R = [1,2]\times[-1,0]\times[0,1]\,;$
   - $f(x,y,z) = x^2-y^2 \quad ; \quad R = [2,4]\times[0,1]\times[2,3]\,;$
   - $f(x,y,z) = e^{x+y+z} \quad ; \quad R = [2,6]\times[1,2]\times[-1,0]\,;$
   - $f(x,y,z) = xe^x \quad ; \quad R = [0,1]\times[1,2]\times[2,3]\,;$
   - $f(x,y,z) = \sin(x+y+z) \quad ; \quad R = [1,3]\times[1,2]\times[-2,4]\,;$
   - $f(x,y,z) = xyz \quad ; \quad R = [0,1]\times[0,1]\times[0,1]\,.$

7. **Integrali tripli: coordinate cilindriche** Passando in coordinate cilindriche calcolare $\iiint_R f(x,y,z)\,dxdydz$ con
   - $f(x,y,z) = x^2+y^2 \quad ; \quad R = \{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \mid 1\le x^2+y^2\le 2\,;\ -1\le z\le 2\}\,;$
   - $f(x,y,z) = x-1 \quad ; \quad R = \{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \mid (x-1)^2+y^2\le 4\,;\ 0\le z\le 2\}\,;$
   - $f(x,y,z) = x^2-y^2 \quad ; \quad R = \{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \mid x^2+2y^2\le 2\,;\ -1\le z\le 1\}\,;$
   - $f(x,y,z) = e^z \quad ; \quad R = \{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \mid x^2+(y-2)^2\le 1\,;\ 1\le z\le 2\}\,;$
   - $f(x,y,z) = z^2 \quad ; \quad R = \{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \mid x^2+z^2\le 1\,;\ 0\le y\le 1\}\,;$
   - $f(x,y,z) = z^2(x+y) \quad ; \quad R = \{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \mid x^2+z^2\le 1\,;\ 0\le y\le 1\}\,;$
   - $f(x,y,z) = ze^z \quad ; \quad R = \{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \mid 1\le x^2+(y-1)^2\le 2\,;\ 0\le x\le \pi\}\,;$
   - $f(x,y,z) = \sin x \quad ; \quad R = \{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \mid y^2+(z-1)^2\le 4\,;\ 0\le x\le \pi\}\,;$
   - $f(x,y,z) = 1 \quad ; \quad R = \{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2\le 6\,;\ z\ge x^2+y^2\}\,;$
   - $f(x,y,z) = 1 \quad ; \quad R = \{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2\le 2\,;\ z\le x^2+y^2\}\,;$
   - $f(x,y,z) = 1 \quad ; \quad R = \{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2\le 1\,;\ z^2\le x^2+y^2\}\,.$

8. **Integrali tripli: coordinate sferiche** Passando in coordinate sferiche calcolare $\iiint_R f(x,y,z)\,dxdydz$ con
   - $f(x,y,z) = x \quad ; \quad R = \{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2\le 2\}\,;$
   - $f(x,y,z) = x^2+y^2 \quad ; \quad R = \{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2\le 2\,;\ y\ge 0\}\,;$
   - $f(x,y,z) = x^2-y^2 \quad ; \quad R = \{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2\le 1\,;\ x+y\ge 0\}\,;$
   - $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2 \quad ; \quad R = \{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \mid 1\le x^2+y^2+z^2\le 3\}\,;$
   - $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2 \quad ; \quad R = \{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \mid (x-1)^2+y^2+z^2\le 2\}\,;$
   - $f(x,y,z) = 1+x^2 \quad ; \quad R = \{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \mid x^2+2y^2+z^2\le 2\}\,;$
   - $f(x,y,z) = x^2+y^2-z^2 \quad ; \quad R = \{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \mid 1\le x^2+y^2+z^2\le 2\,;\ z\ge 0\}\,;$
   - $f(x,y,z) = z^2 \quad ; \quad R = \{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2\le 2\,;\ z\le 0\}\,;$
   - $f(x,y,z) = z \quad ; \quad R = \{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \mid 2(x-1)^2+y^2+z^2\le 2\,;\ z\ge 0\}\,.$