Esprimere i seguente integrale utilizzando il teorema della divergenza ed esplicitando l'integrale curvilineo

- esercizio 1Sia $D = \{(x, y) : x^2 \leq y \leq 4\}$ esprimere il seguente itegrale come integrale curvilineo
$$\int_D \partial_x f(x, y) dx dy$$
- esercizio 2 Sia $D = \{(x, y) : x^2 \leq y \leq 4\}$ esprimere il seguente itegrale come integrale curvilineo
$$\int_D \partial_y f(x, y) dx dy$$
- esercizio 3 Sia $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$ esprimere il seguente itegrale come integrale curvilineo
$$\int_D \partial_y f(x, y) dx dy$$
- esercizio 4 Sia $D = \{(x, y) : 1 + y^2 \leq x \leq 4\}$ esprimere il seguente itegrale come integrale curvilineo
$$\int_D \partial_y f(x, y) dx dy$$
- esercizio 5: Sia $D = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ esprimere il seguente itegrale come integrale curvilineo
$$\int_D \partial_y f(x, y) dx dy$$

Soluzione dell'esercizio 1
$$\int_D \partial_x f(x, y) dx dy = \int_{\partial D} f(x, y) dy.$$
D'altra parte $\partial D = c_1 \cup c_2$, dove

c_1 e' la curva parametrizzata da $\phi_1 : [-2, 2] \to R^2$ $\phi_1(x) = (2 - x, 4)$. Notiamo che ha orientamento indotto dalla normale esterna. Basta verificarlo nel punto $(0, 4) = \phi_1(2)$. Poiche' $\phi_1'(2) = (-1, 0)$ l'orientamento e' quello cercato

c_2 e' la curva parametrizzata da $\phi_2 : [-2, 2] \to R^2$ $\phi_2(x) = (x, x^2)$. $\phi_2'(x) = (1, 2x)$. Notiamo che ha orientamento indotto dalla normale esterna. Basta verificarlo nel punto $(0, 0) = \phi_2(0)$. Infatti $\phi_2'(0) = (1, 0)$.

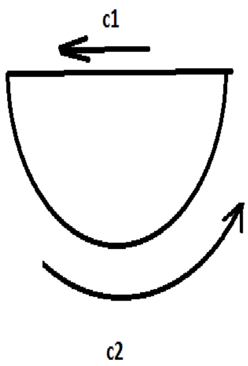

Figure 1: frontiera di D con l'orientamento indotto

Ne segue che

$$\int_{\partial D} f(x,y)dy = \int_{c_1} f(x,y)dy + \int_{c_2} f(x,y)dy =$$

$$\int_{-2}^{2} f(\phi_1(x))\phi_1'(x)dx + \int_{-2}^{2} f(\phi_2(x))\phi_2'(x)dx = \int_{-2}^{2} 2xf(x,x^2)dx$$

Esprimere i seguenti integrali come integrali tripli su un insieme regolare

- 1 Sia $D \subset R^3$ esprimere il seguente integrale come integrale su D

$$\int_{\partial D} x^2 y \nu_x dS$$

- 2 Sia $D \subset R^3$ esprimere il seguente integrale come integrale su D

$$\int_{\partial D} x^2 yz \nu_y dS$$

- 3 Sia $D \subset R^3$ esprimere il seguente integrale come integrale su D

$$\int_{\partial D} x^2 z^2 \nu_z dS$$

- 4 Sia $D \subset R^3$ esprimere il seguente integrale come integrale su D

$$\int_{\partial D} x^2 yz \nu_x dS$$

- 5 Sia $D \subset R^2$ esprimere il seguente integrale come integrale su D

$$\int_{\partial D} x^2 y \nu_x dS$$

- 6 Sia $D \subset R^2$ esprimere il seguente integrale come integrale su D

$$\int_{\partial D} x^2 y \nu_y dS$$

Soluzione dell'esercizio 1

$$\int_{\partial D} x^2 y \nu_x dS = \int_D 2xy dx dy dz$$