Integrali generalizzati

1. Determinare quali dei seguenti integrali generalizzati sono convergenti:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^3+3}dx \qquad \int_0^{+\infty} \frac{x^4+1}{x^2-x} \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{(x^4+x)^{1/3}} \qquad \int_{-1}^{2} \frac{x^2+3}{(4-x^2)^{1/2}}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^x}{e^{2x}+x}dx \qquad \int_2^{+\infty} \frac{1}{\log^3(x)+3} \qquad \int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2+x+1}$$

$$\int_0^1 \log(x)dx \qquad \int_0^1 \frac{\sin(x)}{x}dx \qquad \int_0^1 \frac{1}{\log(x)}dx$$

2. Determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbf{R}^+$ sono convergenti i seguenti integrali generalizzati:

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^\alpha(x-2)}}\,dx \qquad \int_1^{+\infty} \frac{1+x^\alpha}{x^2}\,dx \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\log x}{1+x^\alpha}\,dx$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}\,(1-x^3)^\alpha}\,dx \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\log^\alpha(x)}{\sqrt{|x^3-8|}}\,dx \qquad \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x}dx$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)}{\sqrt{x}}\,dx \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^\alpha)}{x^2}\,dx \qquad \int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-3x}}{x^\alpha\,(x^2+1)}\,dx$$

1. Sia $f \in \mathcal{C}\left([0,+\infty);\mathbf{R}\right)$. Dire quale delle seguenti affermazioni è vera:

   (a) se l'integrale generalizzato $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ è convergente, allora

   $$\exists \lim_{x\to+\infty} f(x) = \ 0$$

   (b) se l'integrale generalizzato $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ è convergente, allora f è decrescente

   (c) se

   $$\forall x \in [5,+\infty), \quad -\frac{3}{x^2} < f(x) < 0\ ,$$

   allora l'integrale generalizzato $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ è convergente

(d) se $\exists \lim_{x\to+\infty} f(x) \in \mathbf{R}$, allora l'integrale generalizzato $\int_0^{+\infty} f(x)\, dx$ è convergente

2. Sia $f \in \mathcal{C}\left((-1,0];\mathbf{R}\right)$. Dire quale delle seguenti affermazioni è vera:

(a) l'integrale generalizzato $\int_{-1}^{0} f(x)\, dx$ è convergente

(b) se,

$$\forall x \in (-1,0], \quad \log(x+1) < f(x) < \frac{1}{\sqrt{x+1}} \ ,$$

allora l'integrale generalizzato $\int_{-1}^{0} f(x)\, dx$ è convergente

(c) se,

$$\forall x \in (-1,0], \quad f(x) \geq \frac{1}{\sqrt{x+1}} \ ,$$

allora l'integrale generalizzato $\int_{-1}^{0} f(x)\, dx$ è convergente

(d) se l'integrale generalizzato $\int_{-1}^{0} f(x)\, dx$ è convergente, allora anche l'integrale generalizzato $\int_{-1}^{0} |f(x)|\, dx$ è convergente

3. Sia $f \in \mathcal{C}\left(\mathbf{R}^+;\mathbf{R}\right)$. Dire quale delle seguenti affermazioni è vera:

(a) l'integrale generalizzato $\int_0^1 f(x)\, dx$ è convergente

(b) se $\int_0^{+\infty} f(x)\, dx$ è convergente, allora $\exists \lim_{x\to 0+} f(x) = +\infty$

(c) se $\int_0^{+\infty} f(x)\, dx$ è convergente, allora $\exists \lim_{x\to+\infty} f(x)$

(d) se

$$\forall x \in \mathbf{R}^+, \qquad 0 \leq f(x) \leq \frac{\log(1+x)}{x^{\frac{3}{2}}} \ ,$$

allora $\int_0^{+\infty} f(x)\, dx$ è convergente