Serie numeriche

1. Sia $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ una serie in $\mathbf{R}$. Dire quale delle seguenti affermazioni è vera:

   (a) se
   $$\forall n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}, \qquad a_n \leq \frac{2}{n^2},$$
   allora la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è convergente

   (b) se
   $$\forall n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}, \qquad a_n < \frac{5}{n},$$
   allora la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ non è convergente

   (c) se $\exists \lim_{n\to+\infty} |a_n| = 0$, allora la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è convergente

   (d) se
   $$\forall n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}, \qquad -\frac{4}{n^3} \leq a_n \leq \frac{2}{n^2},$$
   allora la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è convergente

2. Sia $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ una serie in $\mathbf{R}^+$. Dire quale delle seguenti affermazioni è vera:

   (a) se
   $$\forall n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}, \qquad b_n \leq \frac{2}{n^2},$$
   allora la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ è convergente

   (b) se $\exists \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{b_n} = +\infty$, allora la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ è convergente

   (c) se la successione $\{b_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ è strettamente decrescente, allora la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ è convergente

3. Dire quali delle seguenti serie sono convergenti:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{n!} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n+1}{n!} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^n+n}{2n!+n^3}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+4}{n^6+n^2} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+4}{\log^5(n)} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{n^2+n}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n^2+n} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{\log(n)+n} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n^4+n}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{n^2} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \sin(1/n^2) \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log(1+1/n)}{n+3}$$

4. Determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbf{R}^+$ sono convergenti le seguenti serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n^{2\alpha}+\sin(n)} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^\alpha}{n^2+3n}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)}{\sqrt{n}} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\exp(1/n)-1}{n^\alpha+3} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)+4}{2n^\alpha+5}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^{2\alpha}} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{\alpha(2n)!} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha^n}{n!+3}$$