

1. EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE

1.1. **Richiami di teoria.** Consideriamo un'equazione differenziale del secondo ordine, di tipo ordinario

$$ay'' + by' + cy = f$$

Per motivi tecnici rappresentiamo l'equazione nella forma

$$(1) \quad (py')' + qy = f$$

Come si vede svolgendo le derivate l'equazione in 1 diviene

$$py'' + p'y' + qy = f$$

e quindi e' del tipo precedente.

Ricordo che vale un teorema di esistenza ed unicita' per soluzioni del problema di Cauchy associato:

Theorem 1. *Siano $f, q \in C([a, b], R)$, $p \in C^1([a, b], R)$, Allora il problema*

$$\begin{aligned} (py')' + qy &= f \\ y(a) = y_0, y'(a) &= y_1, \end{aligned}$$

ha soluzione unica, di classe $C^2([a, b], R)$,

1.2. **Equazioni differenziali a variabili separabili.**

1.3. **Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti**

. integrale generale dell'equazione omogenea

. Metodo di variazione delle costanti

1.4. **Problemi ai limiti per equazioni differenziali ordinarie.**

Definition 1. *Siano $f, q \in C([a, b], R)$, $p \in C^1([a, b], R)$, un problema ai limiti e' del tipo*

$$\begin{aligned} (py')' + qy &= f \\ h_1y(a) + h_2y'(a) &= 0, \\ l_1y(b) + l_2y'(b) &= 0 \end{aligned}$$

dove h_1, h_2, l_1, l_2 sono costanti, e h_1, h_2 non sono contemporaneamente nulle, cosi' come l_1, l_2 non sono contemporaneamente nulle. Un problema di questo tipo si dice di Sturm Liouville.

La soluzione sara' una funzione y di classe $C^2([a, b], R) \cap C^1([a, b], R)$ che verifica l'equazione e le condizioni al bordo.

In questo caso la soluzione non e' necessariamente unica

Esempio 1. *Considerato il problema*

$$\begin{aligned} y'' + \lambda y &= 0 \\ y(0) = y(b) &= 0, \end{aligned}$$

Verificare per quali valori di λ esiste solo la soluzione unica

Definition 2. *Siano $q \in C([a, b], R)$, $p \in C^1([a, b], R)$, e supponiamo che il problema*

$$\begin{aligned} (py')' + qy &= \lambda y \\ h_1y(a) + h_2y'(a) &= 0, \\ l_1y(b) + l_2y'(b) &= 0 \end{aligned}$$

abbia soluzione. Allora λ si dice autovalore e y autovettore del problema.

La stessa definizione si puo' enunciare in un modo formalmente piu' compatto, introducendo la definizione di operatore

Definition 3. Osserviamo che stiamo cercando soluzioni nell'insieme

$$X = \{y \in C^2([a, b], R) : h_1 y(a) + h_2 y'(a) = 0, l_1 y(b) + l_2 y'(b) = 0\}$$

Per ogni funzione y in questo insieme si puo' definire

$$L(y) = (py')' + qy$$

ed Ly risulta una funzione continua. Abbiamo quindi definito una funzione

$$L : X \rightarrow C([a, b], R)$$

che si dice operatore.

Remark 1. Se $L : X \rightarrow C([a, b], R)$ e' l'operatore precedentemente definito, ed esiste un numero reale λ e una funzione $y \in X$ tale che

$$Ly = \lambda y,$$

allora si dice che y e' autofunzione e λ autovalore del problema.

Esempio 2. Determinare autovalori e autovettori dei problemi seguenti:

$$\begin{cases} y'' + 5y' = \lambda y & \text{in } 0 < t < 3 \\ y(0) = y(3) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y'' - y' = \lambda y & \text{in } 0 < t < 5 \\ y(0) = y(5) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y'' = \lambda y \\ y(-\pi) = y(\pi), y'(-\pi) = y'(\pi) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y'' - y' = \lambda y & \text{in } 0 < t < 3 \\ y'(3) = 0, y(3) - y'(3) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y'' = \lambda y & \text{in } 0 < t < 3 \\ y(3) = 0, y'(0) - y(0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y'' - y = \lambda y & \text{in } 0 < t < 1 \\ y'(0) = 0, y'(1) = 0 \end{cases}$$

1.5. **Unicità della soluzione per problemi ai limiti.** Diamo ora un teorema di esistenza ed unicità delle soluzioni del problema ai limiti.

Theorem 2. *Se il problema omogeneo*

$$\begin{cases} (py')' + qy = 0 \\ y(a) = 0, \\ y(b) = 0 \end{cases}$$

ha solo la soluzione nulla, allora per ogni f continua, il problema non omogeneo

$$\begin{cases} (py')' + qy = f \\ y(a) = 0, \\ y(b) = 0 \end{cases}$$

ha soluzione unica.

Proof - unicità Supponiamo che y, z siano due soluzioni:

$$(py')' + qy = f, \quad (pz')' + qz = f$$

sottraendo le due equazioni si ottiene

$$\begin{aligned} (p(y-z))' + q(y-z) &= 0 \\ (y-z)(a) &= 0, \\ (y-z)(b) &= 0 \end{aligned}$$

quindi, per l'ipotesi fatta sul problema omogeneo, che ha solo la soluzione nulla, $y - z = 0$. Ovvero $y = z$, e anche il problema non omogeneo ha soluzione unica.

Proof - esistenza si tratta di costruire la soluzione, Usiamo il metodo di variazione delle costanti e quindi cerchiamo preliminarmente due soluzioni y_1 e y_2 non nulle dell'equazione $(py')' + qy = 0$. Supponiamo inoltre che $y_1(a) = 0, y_2(b) = 0$.

Osserviamo che le due soluzioni sono linearmente indipendenti perché, se esistesse C tale che

$$y_1 = Cy_2,$$

allora si avrebbe

$$y_1(a) = 0, \quad y_1(b) = Cy_2(b) = 0,$$

e quindi la funzione y_1 sarebbe soluzione del problema omogeneo. Sarebbe quindi nulla perché vale l'ipotesi che il problema omogeneo ha solo la soluzione nulla. Ma ciò contrasta con il fatto che abbiamo supposto y_1 non nulla.

Ne viene quindi che y_1 e y_2 sono linearmente indipendenti, e quindi una soluzione particolare della non omogenea si scrive

$$y = C_1y_1 + C_2y_2$$

dove C_1 e C_2 sono due funzioni verificanti le condizioni

$$\begin{cases} C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0 \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' = -\frac{f}{p} \end{cases}$$

Ponendo

$$\omega = \det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}$$

si ottiene

$$C_1' = \frac{fy_2}{p\omega}, \quad C_2' = -\frac{fy_1}{p\omega}.$$

pertanto

$$C_1 = \int_a^t \frac{fy_2}{p\omega}(\tau)d\tau, \quad C_2 = - \int_a^t \frac{fy_1}{p\omega}(\tau)d\tau.$$

Sostituendo nella definizione di soluzione particolare:

$$y(t) = C_1y_1 + C_2y_2 = y_1(t) \int_a^t \frac{fy_2}{p\omega}(\tau)d\tau - y_2(t) \int_a^t \frac{fy_1}{p\omega}(\tau)d\tau$$

Quindi l'integrale generale della non omogenea sarà della forma

$$y(t) = y_1(t) \left(C_1 + \int_a^t \frac{fy_2}{p\omega}(\tau)d\tau \right) + y_2(t) \left(C_2 - \int_a^t \frac{fy_1}{p\omega}(\tau)d\tau \right)$$

Imponiamo $y(a) = 0$, tenendo conto che $y_1(a) = 0$

$$y(a) = y_1(a)C_1 + y_2(a)C_2 = C_2y_2(a) = 0.$$

Questo implica che $C_2 = 0$.

Imponiamo $y(b) = 0$, tenendo conto che $y_2(b) = 0$

$$y(b) = y_1(b) \left(C_1 + \int_a^b \frac{fy_2}{p\omega}(\tau)d\tau \right)$$

Quindi

$$C_1 = - \int_a^b \frac{fy_2}{p\omega}(\tau)d\tau$$

Ne viene che

$$\begin{aligned} y(t) &= y_1(t) \left(C_1 + \int_a^t \frac{fy_2}{p\omega}(\tau)d\tau \right) + y_2(t) \left(C_2 - \int_a^t \frac{fy_1}{p\omega}(\tau)d\tau \right) \\ &= y_1(t) \left(\left(- \int_a^b + \int_a^t \right) \frac{fy_2}{p\omega}(\tau)d\tau \right) - y_2(t) \int_a^t \frac{fy_1}{p\omega}(\tau)d\tau \\ &= -y_1(t) \int_t^b \frac{fy_2}{p\omega}(\tau)d\tau - y_2(t) \int_a^t \frac{fy_1}{p\omega}(\tau)d\tau \end{aligned}$$

La soluzione quindi esiste, perché ne abbiamo un'espressione esplicita.

Cerchiamo di esplicitare meglio l'espressione della soluzione

Remark 2. Abbiamo dimostrato che sotto le ipotesi del teorema precedente una soluzione esiste, e si scrive esplicitamente nella forma

$$y(t) = -y_1(t) \int_t^b \frac{fy_2}{p\omega}(\tau)d\tau - y_2(t) \int_a^t \frac{fy_1}{p\omega}(\tau)d\tau$$

Possiamo cercare di rappresentare il secondo membro come un solo integrale, ponendo

$$G(t, \tau) = \begin{cases} -\frac{y_1(\tau)y_2(t)}{p\omega(\tau)} & \text{se } \tau \leq t \\ -\frac{y_1(t)y_2(\tau)}{p\omega(\tau)} & \text{se } \tau \geq t \end{cases}$$

Con questa definizione la funzione y si scrive:

$$y(t) = \int_a^b G(t, \tau)f(\tau)d\tau.$$

La funzione G si chiama funzione di Green del problema. L'importanza della funzione di Green sta nel fatto che, nota la funzione di Green la soluzione si determina semplicemente calcolando il suddetto integrale, al variare del secondo membro f

Remark 3. Cerchiamo di semplificare ulteriormente l'espressione della funzione di Green. Osserviamo anzitutto che il denominatore $p\omega$ e' costante. Per fare questo sara' sufficiente calcolare la derivata:

$$\begin{aligned} (p\omega)' &= \text{per definizione di } \omega = \\ (p(y_1 y_2' - y_2 y_1'))' &= (y_1(p y_2') - y_2(p y_1'))' = \\ y_1' p y_2' + y_1 (p y_2')' - y_2' p y_1' - y_2 (p y_1')' &= \end{aligned}$$

(il primo e il terzo addendo si cancellano, al secondo e al quarto applichiamo l'equazione, usando il fatto che y_1 e y_2 sono soluzioni dell'omogenea)

$$y_1 q y_2 - y_2 q y_1 = 0.$$

Quindi $p\omega$ ha derivata prima nulla, ed e' costante.

Proposition 1. Proprieta' della funzione di Green

- G e' continua
- $G(t, \tau) = G(\tau, t)$ cioe' G e' simmetrica
- Fissato τ la funzione che a t associa $G(t, \tau)$ e' soluzione dell'equazione omogenea nell'insieme $[a, \tau \cup]\tau, b]$
- Esiste $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \partial_t G(t, t - \epsilon) - \partial_t G(t, t + \epsilon) = -\frac{1}{p(t)}$.

Proof G ha due espressioni diverse per $t < \tau$ e per $t > \tau$, quindi fissato τ dobbiamo studiare il comportamento di G per $t \rightarrow \tau$.

$$G(t, \tau) = \begin{cases} -\frac{y_1(\tau)y_2(t)}{p\omega} & \text{se } \tau \leq t \\ -\frac{y_1(t)y_2(\tau)}{p\omega} & \text{se } \tau \geq t \end{cases} \quad G(t, \tau) \rightarrow \begin{cases} -\frac{y_1(\tau)y_2(\tau)}{p\omega} & \text{per } t \rightarrow \tau+ \\ -\frac{y_1(\tau)y_2(\tau)}{p\omega} & \text{per } t \rightarrow \tau- \end{cases}$$

I due limiti sono uguali, quindi G e' continua.

La condizione G e' simmetrica segue subito dalla definizione, mentre il fatto che per t diverso da τ la funzione di green sia soluzione dell'equazione omogenea, dipende dal fatto che e' definita in termini di soluzioni dell'equazione omogenea.

Rimane da verificare l'ultima condizione

$$\begin{cases} \partial_t G(t, t - \epsilon) = -\frac{y_1(t-\epsilon)y_2'(t)}{p\omega} \rightarrow -\frac{y_1(t)y_2'(t)}{p\omega} & \text{per } \epsilon \rightarrow 0 \\ \partial_t G(t, t + \epsilon) = -\frac{y_1'(t)y_2(t+\epsilon)}{p\omega} \rightarrow -\frac{y_1'(t)y_2(t)}{p\omega} & \text{per } \epsilon \rightarrow 0 \end{cases}$$

Ne viene che

$$\partial_t G(t, t - \epsilon) - \partial_t G(t, t + \epsilon) \rightarrow -\frac{y_1(t)y_2'(t)}{p\omega} + \frac{y_1'(t)y_2(t)}{p\omega} = -\frac{1}{p} \quad \text{per } \epsilon \rightarrow 0$$

Remark 4. Osserviamo esplicitamente che la soluzione y che abbiamo costruito soddisfa l'equazione non omogenea

$$(py')' + qy = f,$$

mentre la funzione di Green, per $t \neq \tau$ e' soluzione dell'equazione omogenea. Poiche' abbiamo un'espressione integrale di y , potremmo cercare di derivarla, portando la derivata sotto il segno di integrale, ma il teorema 8 dell'Appendice 2 non

si puo' applicare perche' la funzione G non e' derivabile per $t = \tau$. Se potessimo scambiare la derivata con l'integrale, avremmo:

$$y(t) = \int_a^b G(t, \tau) f(\tau) d\tau, \quad qy(t) = \int_a^b q(t) G(t, \tau) f(\tau) d\tau.$$

$$py'(t) = \int_a^b p(t) \partial_t G(t, \tau) f(\tau) d\tau, \quad (py'(t))' = \int_a^b \partial_t (p(t) \partial_t G(t, \tau)) f(\tau) d\tau.$$

Sommando le espressioni di qy e $(py'(t))'$:

$$(py'(t))' + qy(t) = \int_a^b \left(\partial_t (p(t) \partial_t G(t, \tau)) + q(t) G(t, \tau) \right) f(\tau) d\tau = 0,$$

perche' G e' soluzione dell'equazione omogenea, ma questo contraddice il fatto che y sia soluzione della non omogenea. Quindi questo e' un caso in cui la derivazione sotto il segno di integrale non si puo' fare direttamente.

Per verificare che y e' soluzione, e calcolare la derivata utilizzando la sua espressione in termini della funzione di Green, dovremo utilizzare opportuni teoremi di passaggio al limite piu sofisticati (enunciati in Appendice 1)

Proposition 2. la funzione $y(t)$ e' di classe C^1 e

$$y'(t) = \int_a^b \partial_t G(t, \tau) f(\tau) d\tau.$$

Proof Per applicare il teorema 4 dell'Appendice 1, consideriamo la successione di funzioni:

$$y_n(t) = \int_a^{t-1/n} G(t, \tau) f(\tau) d\tau + \int_{t+1/n}^b G(t, \tau) f(\tau) d\tau.$$

e verifichiamo che

i $y_n \rightarrow y$ per $n \rightarrow +\infty$

ii $y_n \in C^1$

iii posto $z = \int_a^b \partial_t G(t, \tau) f(\tau) d\tau$ si ha $y'_n \rightarrow z$ uniformemente

Queste condizioni garantiscono che esiste y' e

$$y'(t) = \int_a^b \partial_t G(t, \tau) f(\tau) d\tau.$$

Cominciamo a verificare [i]:

$$\begin{aligned} y_n(t) &= \int_a^{t-1/n} G(t, \tau) f(\tau) d\tau + \int_{t+1/n}^b G(t, \tau) f(\tau) d\tau \rightarrow \\ &\rightarrow \int_a^t G(t, \tau) f(\tau) d\tau + \int_t^b G(t, \tau) f(\tau) d\tau = \int_a^b G(t, \tau) f(\tau) d\tau \end{aligned}$$

Verifichiamo [ii] e calcoliamo y'_n

$$y'_n = \int_a^{t-1/n} \partial_t G(t, \tau) f(\tau) d\tau + G(t, t-1/n) f(t-1/n) + \int_{t+1/n}^b \partial_t G(t, \tau) f(\tau) d\tau - G(t, t+1/n) f(t+1/n)$$

Verifichiamo [iii]

$$y'_n \rightarrow \int_a^t \partial_t G(t, \tau) f(\tau) d\tau + G(t, t) f(t) + \int_t^b \partial_t G(t, \tau) f(\tau) d\tau - G(t, t) f(t) = \int_a^b \partial_t G(t, \tau) f(\tau) d\tau$$

Rimane da verificare che la convergenza e' uniforme

$$\sup_t |y'_n - z| = \left| \left(\int_a^{t-1/n} + \int_{t+1/n}^b - \int_a^b \right) \partial_t G(t, \tau) f(\tau) d\tau \right| \leq \int_{t-1/n}^{t+1/n} |\partial_t G(t, \tau) f(\tau)| \leq \frac{2 \max_{t, \tau} |\partial_t G(t, \tau) f(\tau)|}{n} \rightarrow 0$$

per $n \rightarrow \infty$. Quindi la convergenza e' uniforme. Tutte le condizioni che avevamo indicato sono verificate. Quindi si puo' applicare il teorema 4 dell'Appendice 1, e deduciamo che y' e' C^1 , con derivata z , come volevamo dimostrare.

Proposition 3. *la funzione $py'(t)$ e' di classe C^1 e*

$$(py')'(t) = -f(t) + \int_a^b \partial_t (p(t) \partial_t G(t, \tau)) f(\tau) d\tau.$$

Proof Appliciamo il teorema 4 dell'Appendice 1, per derivare la funzione $py'(t)$. Poniamo quindi:

$$u = py'(t) = \int_a^b p \partial_t G(t, \tau) f(\tau) d\tau$$

$$u_n(t) = \int_a^{t-1/n} p \partial_t G(t, \tau) f(\tau) d\tau + \int_{t+1/n}^b p \partial_t G(t, \tau) f(\tau) d\tau.$$

e verifichiamo che

- i $u_n \rightarrow u$ per $n \rightarrow +\infty$
- ii $u_n \in C^1$
- iii posto $v = -f + \int_a^b \partial_t (p \partial_t G(t, \tau)) f(\tau) d\tau$ si ha $u'_n \rightarrow v$ uniformemente

Cominciamo a verificare [i]:

$$u_n(t) = \int_a^{t-1/n} p \partial_t G(t, \tau) f(\tau) d\tau + \int_{t+1/n}^b p \partial_t G(t, \tau) f(\tau) d\tau \rightarrow \int_a^t p \partial_t G(t, \tau) f(\tau) d\tau + \int_t^b p \partial_t G(t, \tau) f(\tau) d\tau = \int_a^b p \partial_t G(t, \tau) f(\tau) d\tau$$

Verifichiamo [ii] e calcoliamo u'_n

$$u'_n = \int_a^{t-1/n} \partial_t (p \partial_t G(t, \tau)) f(\tau) d\tau + p \partial_t G(t, t-1/n) f(t-1/n) + \int_{t+1/n}^b \partial_t (p \partial_t G(t, \tau)) f(\tau) d\tau - p \partial_t G(t, t+1/n) f(t+1/n)$$

Verifichiamo [iii]

$$u'_n \rightarrow \int_a^b \partial_t (p \partial_t G(t, \tau)) f(\tau) d\tau + p f(t) \lim_n (\partial_t G(t, t-1/n) - p \partial_t G(t, t+1/n)) =$$

$$\int_a^b \partial_t \left(p \partial_t G(t, \tau) \right) f(\tau) d\tau - f(t)$$

Rimane da verificare che la convergenza e' uniforme (omettiamo la prova analoga alla precedente).

Tutte le condizioni che avevamo indicato sono verificate. Quindi si puo' applicare il teorema 4 dell'Appendice 1, e deduciamo che u e' C^1 , con derivata v , come volevamo dimostrare.

Proposition 4. *la funzione*

$$y(t) = \int_a^b G(t, \tau) f(\tau) d\tau,$$

e' soluzione dell'equazione non omogenea.

Proof Abbiamo gia dimostrato che

$$y'(t) = \int_a^b \partial_t G(t, \tau) f(\tau) d\tau,$$

e che

$$(py'(t))' = -f(t) + \int_a^b \partial_t \left(p \partial_t G(t, \tau) \right) f(\tau) d\tau,$$

quindi

$$\begin{aligned} -(py'(t))' + qy(t) = \\ f(t) - \int_a^b \partial_t \left(p \partial_t G(t, \tau) \right) f(\tau) d\tau + \int_a^b qG(t, \tau) f(\tau) d\tau = f(t) \end{aligned}$$

poiche' G e' soluzione dell'equazione omogenea

$$-\partial_t \left(p \partial_t G(t, \tau) \right) + qG(t, \tau) = 0$$

2. EQUAZIONI DEL CALORE

2.1. leggi di conservazione e diffusione. Le equazioni differenziali permettono di formulare concetti e relazioni fra grandezze fisiche: le equazioni di Maxwell descrivono fenomeni elettrodinamici, quelle di Newton sistemi meccanici, e quelle di Schroedinger aspetti della meccanica quantistica. In una equazione a derivate parziali la variabile di stato dipende da piu di una variabile indipendente, tipicamente lo spazio e il tempo.

Molti modelli di PDE nascono come equazioni di leggi di conservazione. Una legge di conservazione e' la formulazione matematica del fatto che la velocita' con cui una certa quantita varia in una regione dello spazio, deve essere uguale al flusso attraverso la frontiera della regione considerata, piu la velocita' cui e' creata o distrutta all'interno dell'insieme.

La variabile di stato sia indicata con

$$u = u(x, t),$$

e indichi la densita' di una certa quantita, (che puo' essere la massa energia, popolazione, o altro). Supponiamo per semplicita' che il fenomeno in esame abbia luogo in dominio monodimensionale (come puo' essere un tubo o una sbarretta). Se indichiamo con A la sezione del tubo, la quantita' (di massa o energia) in una sezione dx sara' pari a

$$Au(x, t)dx.$$

Se poi indichiamo con ϕ il flusso che attraverso la sezione x , ovvero la quantita' di massa (o energia) che attraversa la sezione individuata dalla coordinata x nell'unita' di tempo al tempo t , e per unita' di spazio. Quindi

$$A\phi(x, t)$$

e' la quantita' totale della sostanza considerata che attraversa la sezione x al tempo t . Infine indichiamo con f la velocita' con cui la sostanza considerata e' creata o distrutta, nell'unita' di tempo e spazio. Se f e' positiva si dice sorgente, altrimenti pozzo. Quindi

$$Af(x, t)dx$$

e' la quantita' di sostanza creata o distrutta nella sezione considerata. Una legge di conservazione e' una relazione differenziale che lega u , ϕ , f . Considerata una sezione $[a, b]$ del tubo possiamo imporre che la velocita' di cambiamento della quantita' considerata all'interno del tubo sia uguale alla velocita' attraverso cui fluisce attraverso le pareti a e b , piu la sorgenti o pozzi:

$$\frac{d}{dt} \int_a^b u(x, t)A dx = A\phi(a, t) - A\phi(b, t) + \int_a^b f(x, t)A dx$$

A e costante, e quindi si puo' cancellare, e se supponiamo di poter integrare sotto il segno di integrale abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_a^b u(x, t)dx &= \int_a^b u_t(x, t)dx \\ \phi(a, t) - \phi(b, t) &= - \int_a^b \phi_x dx \end{aligned}$$

Quindi sostituendo nell'equazione precedente

$$\int_a^b (u_t(x, t) + \phi_x(x, t) - f(x, t)) dx$$

e, poiche' questo succede su ogni intervallo:

$$u_t(x, t) + \phi_x(x, t) - f(x, t) = 0$$

L'equazione del calore Supponiamo che u rappresenti la temperatura nella sbarretta che stiamo considerando e abbiamo identificato con il segmento $[a, b]$. Nel caso di un processo di diffusione il flusso e' proporzionale alla derivata spaziale della temperatura, pertanto:

$$\phi = ku_x.$$

Quindi l'equazione si scrive

$$u_t = ku_{xx} \quad x \in]a, b[, t > 0.$$

2.2. problema ai limiti associato all'equazione del calore. Abbiamo ricavato l'equazione del calore,

$$u_t = ku_{xx} \quad x \in]a, b[, t > 0.$$

Tuttavia abbiamo gia' visto nel caso di equazioni ordinarie che non si puo' considerare un'equazione senza imporre dei dati ai limiti.

Per conoscere l'evoluzione della temperatura nella sbarretta dovremo assegnare la temperatura al tempo iniziale.

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad x \in [a, b]$$

E' poi necessario imporre condizioni sugli estremi della sbarretta ad ogni istante di tempo:

Possiamo prescrivere la condizione in un estremo:

$$u(a, t) = \alpha(t), \quad t > 0$$

Oppure possiamo imporre che non ci sia scambio termico ad un estremo

$$u_x(a, t) = 0$$

Definition 4. Si dice problema ai valori iniziali per l'equazione del calore il problema

$$\begin{cases} u_t = ku_{xx} & x \in]a, b[, 0 < t < T \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in [a, b] \\ u(a, t) = \alpha(t), u(b, t) = \beta(t) & 0 < t < T \end{cases}$$

Osserviamo che il problema e' descritto sul rettangolo $Q =]a, b[\times]0, T[$ e che i dati sono assegnati su tre lati di questo rettangolo, che costituiscono un sottoinsieme proprio della frontiera. Ricordo che la frontiera si indica

$$\partial Q$$

e che si dice chiusura di Q

$$\bar{Q} = Q \cup \partial Q$$

Chiameremo pertanto Frontiera parabolica di Q il sottoinsieme della frontiera su cui abbiamo assegnato i dati. e la indicheremo $\partial_P Q$

$$\partial_P Q = [a, b] \times \{0\} \cup \{a\} \times [0, T] \cup \{b\} \times [0, T]$$

Definition 5. Il problema ai valori iniziali si indica allora anche nella forma più compatta

$$\begin{cases} u_t = ku_{xx} & \text{in } Q \\ u = \phi(x) & \text{in } \partial_P Q \end{cases}$$

Una funzione di questo problema sarà una funzione, per la quale esistono le derivate che compaiono nel problema. Sarà quindi di classe C^1 nella sola variabile t (che indichiamo C_t^1) classe C^2 nella sola variabile x (che indichiamo C_x^2) e continua fino sulla frontiera parabolica, perché dobbiamo assegnare il dato.

Pertanto si dice soluzione di questo problema una funzione

$$u \in C_x^2(Q) \cap C_t^1(Q) \cap C(\bar{Q})$$

che verifica l'equazione e assume il dato assegnato sulla frontiera parabolica.

Lemma 1. Sia $u \in C_x^2(Q) \cap C_t^1(Q) \cap C(\bar{Q})$ soluzione dell'equazione

$$-\partial_t u + \partial_{xx} u > 0 \quad \text{in } Q$$

Allora $\max_{\bar{Q}} u = \max_{\partial_P} u$.

Proof La funzione è continua su \bar{Q} , quindi ha massimo assunto in un punto (x_0, t_0) . Vogliamo dimostrare che il (x_0, t_0) appartiene alla frontiera parabolica. Per assurdo supponiamo invece che stia nel complementare. Allora si ha

$$u_{xx}(x_0, t_0) \leq 0,$$

perché le derivate seconde sono negative in un punto di massimo, e

$$u_t(x_0, t_0) \geq 0,$$

perché le derivate sono nulle in un punto di massimo interno, oppure, se si ha $t_0 = T$ e la funzione raggiunge il suo massimo crescendo, allora la derivata potrebbe essere strettamente positiva. Ne viene che

$$-u_t(x_0, t_0) + u_{xx}(x_0, t_0) \leq 0,$$

che contraddice l'ipotesi su u , che verifica invece la disuguaglianza stretta. Quindi il punto di massimo sta sul bordo parabolico.

Lemma 2. Sia $u \in C_x^2(Q) \cap C_t^1(Q) \cap C(\bar{Q})$ soluzione dell'equazione

$$-\partial_t u + \partial_{xx} u < 0 \quad \text{in } Q$$

Allora $\min_{\bar{Q}} u = \min_{\partial_P} u$.

Lemma 3. Sia $u \in C_x^2(Q) \cap C_t^1(Q) \cap C(\bar{Q})$ soluzione dell'equazione

$$-\partial_t u + \partial_{xx} u = 0 \quad \text{in } Q$$

Allora $\max_{\bar{Q}} u = \max_{\partial_P} u$ e $\min_{\bar{Q}} u = \min_{\partial_P} u$.

Proof Si tratta di modificare leggermente la prova precedente. Costruiamo una perturbazione della funzione u che verifichi le ipotesi dei lemmi precedenti. Chiamiamo

$$v = M - e^{-x},$$

dove M è scelta sufficientemente grande, in modo che

$$v > 0 \quad \text{in } Q$$

Si verifica che

$$v_{xx} = -e^{-x} < 0,$$

quindi per ogni $\epsilon > 0$ si ha

$$(-\partial_t + \partial_{xx})(u + \epsilon v) = -e^{-x} < 0$$

Ma allora vale il principio di minimo, e quindi

$$\min_{\bar{Q}}(u + \epsilon v) = \min_{\partial_P Q}(u + \epsilon v) \geq$$

poiche' $v > 0$

$$\geq \min_{\partial_P Q} u.$$

Quindi per ogni x, t, ϵ

$$(u + \epsilon v)(x, t) \geq \min_{\partial_P Q} u.$$

Mandando ϵ a 0, si ha

$$u(x, t) \geq \min_{\partial_P Q} u.$$

per tutti gli $(x, t) \in Q$ E quindi

$$\min_{\bar{Q}} u(x, t) \geq \min_{\partial_P Q} u.$$

D'altra parte, poiche' la frontiera parabolica e' un sottinsieme di \bar{Q}

$$\min_{\bar{Q}} u(x, t) \leq \min_{\partial_P Q} u.$$

e di qui segue l'uguaglianza.

Proposition 5. *La soluzione del problema*

$$\begin{cases} u_t = ku_{xx} & \text{in } Q \\ u = 0 & \text{in } \partial_P Q \end{cases}$$

e' unica, ed e' identicamente 0.

Proof Si tratta di provare che se consideriamo una sbarretta che inizialmente ha temperatura 0, e i cui estremi vengono mantenuti a temperatura 0, allora la temperatura della sbarretta rimane sempre nulla. Per dimostrare che la soluzione e' nulla, osserviamo che u verifica il principio di massimo e di minimo, quindi assume massimo e minimo sul bordo. Ma, poiche' sul bordo assume valore 0, allora il massimo e il minimo sono 0, e la funzione e' nulla.

Remark 5. *Se la funzione e' regolare su \bar{Q} la prova si puo' fare anche in modo integrale. Si pone*

$$W = \int_a^b u^2(x, t) dx$$

Allora $W(0) = 0$, perche' il dato iniziale e' nullo.

$$W'(t) = \frac{d}{dt} \left(\int_a^b u^2(x, t) dx \right) = \int_a^b 2uu_t(x, t) dx = \int_a^b 2uu_{xx}(x, t) dx =$$

(per parti)

$$2 \left[uu_x \right]_a^b - 2 \int_a^b u_x^2(x, t) dx = -2 \int_a^b u_x^2(x, t) dx < 0$$

Quindi W e' decrescente. Ma risulta $W(0) = 0$, e quindi $W \leq 0$. D'altra parte W e' l'integrale di un quadrato, quindi $W(t) = 0$ per ogni t . Ne viene che

$$W = \int_a^b u^2(x,t)dx = 0$$

per ogni t , Quindi $u(x,t) = 0$ per ogni t .

Proposition 6. La soluzione del problema

$$\begin{cases} u_t = ku_{xx} & \text{in } Q \\ u = \phi & \text{in } \partial_P Q \end{cases}$$

e' unica

Proof Supponiamo per assurdo che ci siano due soluzioni u_1, u_2 . Allora si ha

$$\partial_t u_1 = k\partial_{xx} u_1, \quad \partial_t u_2 = k\partial_{xx} u_2$$

sottraendo le due equazioni si ottiene che $u_1 - u_2$ verifica

$$\partial_t(u_1 - u_2) = k\partial_{xx}(u_1 - u_2).$$

Inoltre

$$u_1 = u_2 = \phi \quad \text{in } \partial_P Q$$

quindi

$$u_1 - u_2 = 0 \quad \text{in } \partial_P Q$$

e quindi la funzione $u_1 - u_2$ e' soluzione del problema con dato nullo al bordo, che come abbiamo gia' dimostrato ha solo la soluzione nulla, quindi

$$u_1 - u_2 = 0.$$

2.3. Il Metodo di separazione delle variabili. Consideriamo il problema ai valori iniziali

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & x \in]0, 1[, 0 < t < T \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in [0, 1] \\ u(0, t) = 0, u(1, t) = 0 & 0 < t < T \end{cases}$$

Cerchiamo una soluzione della forma

$$u(x, t) = X(x)T(t)$$

Sostituendo nell'equazione otteniamo

$$X(x)T'(t) = X''(x)T(t)$$

Separiamo le variabili, ovvero portiamo tutta la dipendenza da x al primo membro e da t al secondo. Si ottiene

$$\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X}$$

Poiche' il primo membro non dipende da x , il secondo non dipende da t , e sono uguali, allora non dipendono dalle variabili del problema, e si tratta di una costante, che indicheremo λ

$$\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = \lambda$$

Il problema si spezza quindi in due problemi:

$$\begin{cases} X'' = \lambda X & x \in [a, b] \\ X(0) = 0, X(1) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} T' = \lambda T & t \in [0, T] \end{cases}$$

Il primo dei due e' un problema agli autovalori. Gli autovettori risultano

$$X_k = \sin(k\pi x)$$

e gli autovalori

$$\lambda_k = -(k\pi)^2, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Determinato il valore di λ_k possiamo ora risolvere il problema per T :

$$T' = \lambda_k T$$

e quindi otteniamo

$$T_k = e^{\lambda_k t} = e^{-(k\pi)^2 t}$$

La soluzione sara' quindi del tipo

$$u_k(x, t) = X_k T_k = e^{-(k\pi)^2 t} \sin(k\pi x).$$

Pertanto, poiche' l'equazione del calore e' lineare sono soluzioni anche

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^N c_k e^{-(k\pi)^2 t} \sin(k\pi x).$$

Questa e' quindi la soluzione piu generale che otteniamo. Andiamo ad imporre il dato iniziale

$$u(x, t) = u_0$$

Quindi

$$\sum_{k=0}^N c_k \sin(k\pi x) = u_0$$

Per il momento siamo quindi in grado di risolvere problemi con dato iniziale di questo tipo.

Esempio 3. *Risolvere i seguenti problemi, con il metodo di separazione delle variabili*

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t = u_{xx} \quad x \in]0, 1[, 0 < t < T \\ u(x, 0) = 3 \sin(2\pi x) + 5 \sin(5\pi x) \quad x \in [0, 1] \\ u(0, t) = 0, u(1, t) = 0 \quad 0 < t < T \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t = 7u_{xx} \quad x \in]1, 5[, 0 < t < T \\ u(x, 0) = \sin(3\pi x) + 2 \sin(\pi x) \quad x \in [1, 5] \\ u(1, t) = 0, u(5, t) = 0 \quad 0 < t < T \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t = 7u_{xx} \quad x \in]1, 5[, 0 < t < T \\ u(x, 0) = \cos(3\pi x) + 2 \cos(\pi x) \quad x \in [1, 5] \\ u_x(1, t) = 0, u_x(5, t) = 0 \quad 0 < t < T \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t = 7u_{xx} \quad x \in]0, 2[, 0 < t < T \\ u(x, 0) = \sin(3\pi x) + 2 \sin(\pi x) \quad x \in [0, 2] \\ u(0, t) = 0, u_x(2, t) = 0 \quad 0 < t < T \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t = 7u_{xx} \quad x \in]0, 2[, 0 < t < T \\ u(x, 0) = \sin(3\pi x) + 5 \cos(\pi x) \quad x \in [0, 2] \\ u(0, t) = u(2, t) u_x(0, t) = u_x(2, t) \quad 0 < t < T \end{array} \right.$$

3. APPENDICE 1 - SUCCESSIONI DI FUNZIONI.

Definizione 6. Supponiamo che per ogni n naturale sia definita una funzione u_n . Supponiamo che queste funzioni siano tutte definite sullo stesso insieme I . Allora si dice che e' definita una successione di funzioni (u_n)

Definizione 7. Assegnata una successione di funzioni $u_n : I \rightarrow R$, se fissiamo un punto x allora $u_n(x)$ e' una successione di numeri reali. Pertanto per questo tipo di successioni abbiamo una definizione di limite. Se per ogni x fissato esiste

$$\lim_n u_n(x) = u(x),$$

si dice che la successione (u_n) converge alla funzione u puntualmente.

Esempio 4. Consideriamo la successione di funzioni

$$u_n : [0, 1] \rightarrow R \quad u_n(x) = x^n$$

Fissato ogni punto x calcoliamo il limite per n che va all'infinito:

$$\begin{cases} x^n \rightarrow 0 & \text{se } x < 1 \\ x^n \rightarrow 1 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

Come si vede la convergenza puntuale non conserva la proprieta' di continuita', nel senso che, se consideriamo una successione di funzioni continue, il limite puntuale in generale non e' continuo.

In particolare questo significa che non si puo scambiare l'ordine in cui si fanno i limiti

Esempio 5. Riprendiamo la successione di funzioni dell'esempio precedente:

$$u_n : [0, 1] \rightarrow R \quad u_n(x) = x^n$$

Abbiamo visto che

$$u_n(x) \rightarrow u(x) \begin{cases} 0 & \text{se } x < 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

Quindi

$$\lim_{x \rightarrow 1} \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = \lim_{x \rightarrow 1} u(x) = 0$$

Al contrario

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow 1} u_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$$

Esempio 6. Facciamo un altro esempio dal quale risulta chiaro che non si puo' scambiare l'ordine in cui si fanno i limiti:

$$u_n : R \rightarrow R \quad u_n(x) = \frac{x}{n}$$

Se calcoliamo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{n} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{n} = 0$$

Occorre quindi una nozione di convergenza piu forte, che leghi il modo con cui x tende al suo limite, con la velocita' di convergenza di n all'infinito:

Definition 8. Assegnata una successione di funzioni $u_n : I \rightarrow R$, si dice che u_n converge uniformemente a u se

$$\sup_x |u_n(x) - u(x)| \rightarrow 0$$

per $n \rightarrow \infty$.

Proposition 7. Se $u_n \rightarrow u$ uniformemente, allora $u_n \rightarrow u$ puntualmente

Theorem 3. Supponiamo che u_n sia una successione di funzioni, definite su un intervallo I . Supponiamo anche che

- i $u_n \rightarrow u$ uniformemente per $n \rightarrow +\infty$
- ii u_n continua per ogni n

allora u e' continua.

In particolare, si possono scambiare l'ordine in cui si fanno i limiti:

$$u(x_0) = \lim_n u_n(x_0) = \lim_n \lim_x u_n(x)$$

$$u(x_0) = \lim_x u(x) = \lim_x \lim_n u_n(x).$$

Esempio 7. Riprendiamo la successione di funzioni dell'esempio precedente:

$$u_n : [0, 1] \rightarrow R \quad u_n(x) = x^n$$

Abbiamo visto che

$$u_n(x) \rightarrow u(x) \begin{cases} 0 & \text{se } x < 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

Poiche' il limite non e' continuo, allora la convergenza non puo' essere uniforme. Tuttavia osserviamo che l'unico punto problematico e' 1, in cui il limite perde continuita'. Se ci allontaniamo da 1 le cose possono cambiare perche' la convergenza uniforme dipende dal dominio.

Verifichiamo che

$$u_n : [0, 3/4] \rightarrow R \quad u_n(x) = x^n$$

e' una successione di funzioni convergenti uniformemente a 0. Infatti

$$\sup_x |u_n(x) - u(x)| = \text{poiche' il limite e' } 0 = \sup_x |u_n(x)| =$$

$$\sup_{x \in [0, 3/4]} |x^n| = \left(\frac{3}{4}\right)^n \rightarrow 0$$

per $n \rightarrow \infty$. Infatti adesso il limite e' 0, quindi e' continuo.

Esempio 8. verificare che la successione

$$u_n : [0, 6] \rightarrow R \quad u_n(x) = \frac{x}{n}$$

converge uniformemente a 0.

Esempio 9. verificare che la successione

$$u_n : [0, 6] \rightarrow R \quad u_n(x) = x^2 + \frac{x}{n}$$

converge uniformemente a x^2 .

Remark 6. Osserviamo che la convergenza uniforme non garantisce la derivabilità del limite. Consideriamo la successione

$$u_n : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \quad u_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$$

Questa è costituita da funzioni di classe C^∞ . Inoltre converge uniformemente alla funzione

$$u(x) = |x|,$$

che non è derivabile in 0.

Abbiamo quindi bisogno di un teorema di derivabilità.

Theorem 4. Supponiamo che u_n sia una successione di funzioni, definite su un intervallo I . Supponiamo anche che

i $u_n \rightarrow u$ per $n \rightarrow +\infty$

ii $u_n \in C^1$

iii esiste v tale che si ha $u'_n \rightarrow v$ uniformemente

allora $u \in C^1$, e $u' = v$.

4. APPENDICE 2 - DERIVATE DI FUNZIONI INTEGRALI.

Nel remark 4 abbiamo presentato un esempio in cui non si può derivare sotto il segno di integrale, quindi ricordiamo sotto quali ipotesi la derivazione si può fare:

Theorem 5. Sia $G \in C^1([\alpha, \beta] \times [a, b])$, e definiamo

$$f(t) = \int_a^b G(t, \tau) d\tau.$$

Allora $f \in C^1$ e

$$f'(t) = \int_a^b \partial_t G(t, \tau) d\tau.$$

Ricordiamo anche il seguente:

Theorem 6. Sia $G \in C([a, b])$, e definiamo

$$f(t) = \int_a^t G(\tau) d\tau.$$

Allora $f \in C^1$ e

$$f'(t) = G(t).$$

Si noti che, quando la dipendenza da t sta nel primo estremo, la derivata compare con il segno meno:

Theorem 7. Sia $G \in C([a, b])$, e definiamo

$$f(t) = \int_t^b G(\tau) d\tau.$$

Allora $f \in C^1$ e

$$f'(t) = -G(t).$$

Proof

$$f(t) = \int_t^b G(\tau) d\tau = - \int_b^t G(\tau) d\tau.$$

Allora per il teorema precedente $f'(t) = -G(t)$

Combinando questi teoremi, si puo' enunciare un nuovo teorema, in cui la dipendenza da t sta sia negli estremi, sia nella funzione integranda

Theorem 8. Sia $G \in C^1([\alpha, \beta] \times [a, b])$, e definiamo

$$f(t) = \int_{h_1(t)}^{h_2(t)} G(t, \tau) d\tau.$$

Allora $f \in C^1$ e

$$f'(t) = G(t, h_2(t))h_2'(t) - G(t, h_1(t))h_1'(t) + \int_{h_1(t)}^{h_2(t)} \partial_t G(t, \tau) d\tau.$$