0.1. **Equazione del calore in dimensione piu alta di 1.** Se consideriamo fenomeni di diffusione in una piastra $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, otterremo un'equazione analoga alla precedente, in dimensione 2. L'equazione si scrivera' pertanto:

$$u_t = u_{xx} + u_{yy} \quad (x, y) \in \Omega, t > 0.$$

Almeno se supponiamo di essere in presenza di un mezzo omogeneo, in cui tutte le direzioni giocano lo stesso ruolo. L'equazione potrebbe assumere la forma

$$u_t = au_{xx} + bu_{yy} \quad (x, y) \in \Omega, t > 0.$$

in presenza di mezzi anisotropi. Consideriamo tuttavia dapprima il caso isotropo in cui $a = b = 1$. L'operatore al secondo membro si chiama Laplaciano e si indica

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy}.$$

In dimensione 3, caso della diffusione in un corpo tridimensionale, avremo l'operatore di laplace

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz},$$

e l'equazione del calore si scrivera'

$$\partial_t u = \Delta u \quad in \Omega \times]0, T].$$

L'equazione e' quindi definita nel cilindro

$$Q = \Omega \times]0, T].$$

Questa volta occorrera' assegnare la temperatura al tempo iniziale del nostro corpo, bi o tridimensionale:

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y) \quad x \in \Omega$$

(ovvero $u(x, y, z, 0) = u_0(x, y, z)$ in dimensione 3)

E' poi necessario imporre condizioni sulla frontiera dell'insieme Ω in esame, ad ogni istante di tempo:

$$u(x, y, t) = \alpha(t), \quad (x, y) \in \partial\Omega$$

(ovvero $u(x, y, z, 0) = \alpha(t)$, in dimensione 3)

Chiameremo Frontiera parabolica di Q il sottinsieme della frontiera su cui abbiamo assegnato i dati e la indicheremo $\partial_P Q$

$$\partial_P Q = \Omega \times \{0\} \cup \partial\Omega \times [0, T]$$

Definition 1. *Si dice problema ai valori iniziali associato all'equazione del calore*

$$\begin{cases} u_t = k\Delta u & inQ \\ u = \phi & in\ \partial_P Q \end{cases}$$

Pertanto si dice soluzione di questo problema una funzione

$$u \in C^2_{x,y,z}(Q) \cap C^1_t(Q) \cap C(\bar{Q})$$

che verifica l'equazione e assume il dato assegnato sulla frontiera parabolica.

Valgono gli stessi risultati che nel caso monodimensionale:

Lemma 1. *Sia* $u \in C^2_{xyz}(Q) \cap C^1_t(Q) \cap C(\bar{Q})$ *soluzione dell'equazione*

$$-\partial_t u + \Delta u = 0 \quad in\ Q$$

Allora $\max_{\bar{Q}} u = \max_{\partial Q} u$ *e* $\min_{\bar{Q}} u = \min_{\partial Q} u$.

Proposition 1. *La soluzione del problema*

$$\begin{cases} u_t = k\Delta u & inQ \\ u = \phi & in\ \partial_P Q \end{cases}$$

e' unica

1. L'equazione di Laplace su domini limitati

Una soluzione di equilibrio di problema del calore (o steady state), e' una soluzione indipendente dal tempo. In questo caso la soluzione soddisfa l'equazione

$$\Delta u = 0 \quad in\ \Omega$$

I dati risultano assegnati solo sulla frontiera dell'insieme Ω in esame,

$$u = \phi, \quad \in \partial\Omega$$

(si noti che in questo caso non si parla di frontiera parabolica, ma della frontiera geometrica dell'insieme, poiche' a differenza del caso parabolico, in cui la variabile temporale ha un ruolo diverso dalle altre, qui tutte le variabili giocano lo stesso ruolo, per la simmetria dell'operatore).

Definition 2. *Si dice problema ai valori iniziali o problema di Dirichlet associato all'equazione di Laplace*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & in\ \Omega \\ u = \phi & in\ \partial\Omega \end{cases}$$

Pertanto si dice soluzione di questo problema una funzione

$$u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$$

che verifica l'equazione e assume il dato assegnato sulla frontiera.

Valgono ancora il principio di massimo e l'unicita' della soluzione:

Lemma 2. *Sia* $u \in C^2_x(Q) \cap C^1_t(Q) \cap C(\bar{Q})$ *soluzione dell'equazione*

$$\Delta u = 0 \quad in\ \Omega$$

Allora $\max_{\bar{Q}} u = \max_{\partial Q} u$ *e* $\min_{\bar{Q}} u = \min_{\partial Q} u$.

Proposition 2. *La soluzione del problema*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & in\ \Omega \\ u = \phi & in\ \partial\Omega \end{cases}$$

e' unica

1.1. **Esistenza di soluzioni.**

Il metodo di separazione delle variabili si applica anche all'equazione di Laplace sul rettangolo

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad x \in]0, A[, y \in]0, B[\\ u(x, 0) = f(x),\ u(x, B) = 0, \quad x \in [0, A] \\ u(0, y) = 0,\ u(A, y) = 0, \quad y \in]0, B[\end{cases}$$

Cerchiamo una soluzione della forma

$$u(x, t) = X(x)Y(y)$$

Sostituendo nell'equazione otteniamo

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0$$

Separiamo le variabili, ovvero portiamo tutta la dipendenza da x al primo membro e da y al secondo. Si ottiene

$$\frac{Y''}{Y} = -\frac{X''}{X}$$

Poiche' il primo membro non dipende da x, il secondo non dipende da y, e sono uguali, allora non dipendono dalle variabili del problema, e si tratta di una costante, che indicheremo λ

$$-\frac{Y''}{Y} = \frac{X''}{X} = \lambda$$

Il problema si spezza quindi in due problemi:

$$\begin{cases} X'' = \lambda X \quad x \in [0, A] \\ X(0) = 0, X(A) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} Y'' = -\lambda Y \quad t \in [0, T] \\ Y(B) = 0 \end{cases}$$

Il primo dei due e' un problema agli autovalori. Nel secondo abbiamo invece una condizione sola. Gli autovettori risultano

$$X_k = \sin\left(\frac{k\pi}{A} x\right)$$

e gli autovalori

$$\lambda_k = -\left(\frac{k\pi}{A}\right)^2, \quad k \in Z.$$

Determinato il valore di λ_k possiamo ora risolvere il problema per Y:

$$Y'' = -\lambda_k Y$$

e quindi otteniamo

$$Y_k = \alpha_k e^{\frac{k\pi y}{A}} + \beta_k e^{-\frac{k\pi y}{A}}$$

Vale la condizione

$$Y_k(B) = 0,$$

quindi

$$\alpha_k e^{\frac{k\pi B}{A}} + \beta_k e^{-\frac{k\pi B}{A}} = 0$$

e sostituendo in Y_k

$$Y_k = \alpha_k e^{\frac{k\pi B}{A}} \left(e^{\frac{k\pi(y-B)}{A}} - e^{-\frac{k\pi(y-B)}{A}}\right)$$

La soluzione sara' quindi del tipo

$$u_k(x,t) = X_k T_k = \left(e^{\frac{k\pi(y-B)}{A}} - e^{-\frac{k\pi(y-B)}{A}}\right) \sin\left(\frac{k\pi}{A} x\right).$$

Poiche' l'equazione e' lineare sono soluzioni anche

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{N} \left(e^{\frac{k\pi(y-B)}{A}} - e^{-\frac{k\pi(y-B)}{A}}\right) \sin\left(\frac{k\pi}{A} x\right).$$

Questa e' quindi la soluzione piu generale che otteniamo. Andiamo ad imporre il dato iniziale

$$u(x,0) = f(x)$$

Quindi

$$f(x) = \sum_{k=0}^{N} \left(e^{-\frac{k\pi(B)}{A}} - e^{\frac{k\pi(B)}{A}}\right) \sin\left(\frac{k\pi}{A} x\right).$$

Per il momento siamo quindi in grado di risolvere problemi con dato iniziale di questo tipo.

Esempio 1. *Risolvere gli esercizi seguenti:*

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad x \in]0,3[, y \in]0,5[\\ u(x,5) = 0,\ u(x,0) = sin(\pi x), \quad x \in [0,3] \\ u(0,y) = 0,\ u(3,y) = 0, \quad y \in]0,5[\end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad x \in]0,1[, y \in]0,2[\\ u(x,0) = 0,\ u(x,2) = 0, \quad x \in [0,1] \\ u(0,y) = sin(3\pi y) + 2\sin(\pi y),\ u(1,y) = 0, \quad y \in]0,2[\end{cases}$$

1.2. **il laplaciano in coordinate polari.** Per risolvere l'equazione di laplace in un cerchio, e' comodo lavorare in coordinate polari

$$x = r\cos(\theta), \quad y = r\sin(\theta).$$

Remark 1. *L'operatore si rappresenta in queste coordinate*

$$\partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\partial_\theta^2$$

Il metodo di separazione delle variabili si applica anche all'equazione di Laplace sul cerchio

$$\begin{cases} \Delta u = 0 r \in [0,L], \theta \in [0,2\pi] \\ u(L,\theta) = f(\theta), \end{cases}$$

Cerchiamo una soluzione della forma

$$u(r,\theta) = R(r)T(\theta)$$

Sostituendo nell'equazione otteniamo

$$R''T + \frac{1}{r}R'T + \frac{1}{r}RT'' = 0$$

Separiamo le variabili,

$$\frac{r^2R'' + rR'}{R} = -\frac{T''}{T} = -\lambda$$

indipendente da r, θ Il problema si spezza quindi in due problemi:

$$\begin{cases} T'' = \lambda T \\ \text{periodico di periodo } 2\pi \text{ perche' e' un angolo} \end{cases} \qquad \begin{cases} Y'' = -\lambda Y \quad t \in [0,T] \\ Y(B) = 0 \end{cases}$$

La periodicita' in θ si esprime nel modo seguente

$$\begin{cases} T'' = \lambda T \\ T(0) = T(2\pi) \\ T'(0) = T'(2\pi) \end{cases}$$

Questo e' un problema agli autovalori. Gli autovettori risultano

$$X_k = \sin(k\theta), \quad \cos(k\theta), 1$$

e gli autovalori

$$\lambda_k = -k^2$$

Determinato il valore di λ_k possiamo ora risolvere il problema per R:

$$r^2R'' + rR' = k^2R$$

Cerchiamo soluzioni nella forma

$$R(r) = r^\alpha$$

e quindi sostituendo otteniamo

$$\alpha(\alpha-1)r^{\alpha} + (\alpha-1)r^{\alpha} = k^2 r^{\alpha}$$

Ne viene che

$$\alpha = +k, \text{ oppure } \alpha = -k$$

La soluzione sara' quindi del tipo

$$R_k = c_1 r^k + c_2 r^{-k}.$$

Ma siccome vogliamo che la soluzione sia definita anche in $r = 0$, dobbiamo escludere la funzione r^{-k} che non e' definita in 0. Cioe'

$$R_k = c_1 r^k$$

La soluzione sara' quindi

$$u_k(r,\theta) = R_k T_k = a_k r^k \cos(k\theta) + b_k r^k \sin(k\theta.$$

Pertanto, poiche' l'equazione e' lineare sono soluzioni anche

$$u(x,t) = a_0 + \sum_{k=1}^{N} r^k \Big(a_k \cos(k\theta) + b_k \sin(k\theta\Big)$$

Questa e' quindi la soluzione piu generale che otteniamo. Andiamo ad imporre il dato iniziale

$$u(L,\theta) = f(x)$$

Quindi

$$f(\theta) = a_0 + \sum_{k=1}^{N} L^k \Big(a_k \cos(k\theta) + b_k \sin(k\theta\Big)$$

Per il momento siamo quindi in grado di risolvere problemi con dato iniziale di questo tipo.

Esempio 2. *svolgere gli esercizi seguenti*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 r \in [0,1], \theta \in [0,2\pi] \\ u(1,\theta) = 2\sin(3\theta) + \cos(7\theta), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta u = 0 r \in [0,2], \theta \in [0,2\pi] \\ u(2,\theta) = 3x + y, \end{cases}$$

2. L'equazione delle onde

L'esempio piu semplice di equazione delle onde e' il problema della corda vibrante. Supponiamo di identificare la corda con il grafico di una funzione u della variabile x. Al tempo iniziale la corda sara' in posizione orrizzontale. Indichiamo con T la tensione applicata ai punti della corda. Se θ e' l'angolo individuato da T e dalla direzione orrizzontale, la componente orrizzontale di T si scrive

$$T_H = |T| \cos(\theta)$$

Faremo ora l'ipotesi che le vibrazioni della corda siano puramente verticali, quindi

$$T_H(a,t) = T_H(b,t)$$

per ogni coppia di punti a, b. In altre parole si tratta di una quantita'

$$T_H(b,t) = \tau(t)$$

indipendente da x.

Supponiamo poi che T sia in direzione tangente alla corda, quindi al grafico di u:

$$\tan(\theta) = u_x$$

La componente verticale della tensione sara'

$$T_V = |T|\sin(\theta) = |T|\cos(\theta)\tan(\theta) = \tau u_x.$$

Se indichiamo ora ρ la densita', in ogni segmento $[x, x + \Delta x]$ della corda abbiamo

$$\rho \Delta x u_{tt} = T_V(x + \Delta x, t) - T_V(x, t) = \tau(t)(u_x(x + \Delta x) - u_x(x)).$$

Dividendo per Δx otteniamo subito

$$\rho u_{tt} = \tau(t) u_{xx}$$

che si dice equazione delle onde. Il caso piu semplice possibile che verra' qui considerato, e' quello di con ρ e τ costantemente uguali a 1. E quindi l'equazione diviene:

$$u_{tt} = u_{xx}$$

Sara' necessario imporre condizioni iniziali e ai limiti. Dovremo assegnare la configurazione della corda al tempo iniziale.

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad x \in [a, b]$$

Tuttavia l'equazione e' del secondo ordine in t, quindi e' necessario imporre un'ulteriore condizione iniziale anche sulla derivata prima

$$u_t(x, 0) = u_1(x) \quad x \in [a, b]$$

E' poi necessario imporre condizioni sugli estremi della corda ad ogni istante di tempo:

Possiamo prescrivere la condizione in un estremo:

$$u(a, t) = \alpha(t), \quad t > 0$$

Oppure possiamo imporre

$$u_x(a, t) = 0$$

Definition 3. *Si dice problema ai valori iniziali per l'equazione delle onde il problema*

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} \quad x \in]a, b[, 0 < t < T \\ u(x, 0) = u_0(x),\ u_t(x, 0) = u_1(x) \quad x \in [a, b] \\ u(a, t) = \alpha(t), u(b, t) = \beta(t) \quad 0 < t < T \end{cases}$$

Una soluzione di questo problema sara' una funzione,

$$u \in C^2_x(Q) \cap C^2_t(Q) \cap C(\bar{Q})$$

che verifica l'equazione e assume il dato assegnato sulla frontiera parabolica.

Proposition 3. *La soluzione del problema con dato al bordo identicamente nullo*

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} \quad x \in]a, b[, 0 < t < T \\ u(x, 0) = 0,\ u_t(x, 0) = 0 \quad x \in [a, b] \\ u(a, t) = 0, u(b, t) = 0 \quad 0 < t < T \end{cases}$$

e' unica, ed e' identicamente 0.

Proof Si pone
$$W = \int_a^b (u_x^2(x,t) + u_t^2(x,t))dx$$
Allora $W(0) = 0$, perche' per ipotesi $u_t(x,0) = 0$. Inoltre $u(x,0) = 0$, e quindi derivando rispetto a x, si deduce $u_x(x,0) = 0$. Calcoliamo la derivata
$$W'(t) = \frac{d}{dt}\Big(\int_a^b u^2(x,t)dx\Big) = \int_a^b 2(u_t u_{tt}(x,t)+u_x u_{tx})dx = \int_a^b 2(u_t u_{xx}(x,t)+u_x u_{tx})dx =$$
(per parti)
$$\int_a^b 2u_t u_{xx}(x,t) - 2\Big[u_t u_x\Big]_a^b - 2\int_a^b u_t u_{xx}(x,t)dx = 0$$
Qui abbiamo usato la condizione al bordo che assicura che $u(a,t) = 0$ per ogni t, e quindi, derivando in t, $u_t(a,t) = 0$, e cosi anche al secondo estremo $u_t(b,t) = 0$,

Quindi W e' costante. Ma risulta $W(0) = 0$, e quindi $W = 0$ per ogni t. Ne viene che
$$W = \int_a^b (u_x^2(x,t) + u_t^2(x,t))dx = 0$$
per ogni t, Quindi $u_t(x,t) = 0$ per ogni t. Cioe' fissato x, u e' costante in t. Ma $u(x,0) = 0$, e quindi $u(x,t) = 0$ per ogni t.

Proposition 4. *La soluzione del problema*
$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} \quad x \in]a,b[, 0 < t < T \\ u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x) \quad x \in [a,b] \\ u(a,t) = \alpha(t), u(b,t) = \beta(t) \quad 0 < t < T \end{cases}$$
e' unica

Proof Supponiamo per assurdo che ci siano due soluzioni u_3, u_2. Allora si ha
$$\partial_{tt} u_3 = \partial_{xx} u_3, \quad \partial_{tt} u_2 = \partial_{xx} u_2$$
sottraendo le due equazioni si ottiene che $u_3 - u_2$ verifica
$$\partial_{tt}(u_3 - u_2) = \partial_{xx}(u_3 - u_2).$$
assume tutti i dati nulli. Quindi la funzione $u_3 - u_2$ e' soluzione del problema con dato nullo al bordo, che come abbiamo gia' dimostrato ha solo la soluzione nulla, quindi
$$u_3 - u_2 = 0.$$

2.1. **Soluzioni dell'equazione delle onde.** Si verifica subito che, se f e' una funzione di una sola variabile, una soluzione dell'equazione delle onde si puo' scrivere nella forma
$$u(x,t) = f(x+t).$$
Infatti
$$u_{xx} = f''(x+t) \quad u_{tt} = f''(x+t)$$
La soluzione risulta quindi costante lungo rette del tipo $x + t = \textit{costante}$. Le rette di questo tipo si dicono caratteristiche.

Analogamente potremmo cercare una soluzione nella forma
$$u(x,t) = g(x-t).$$

Infatti

$$u_{xx} = g''(x-t) \quad u_{tt} = g''(x-t)$$

Anche le rette del tipo $x - t = costante$ sono dette caratteristiche.

Piu in generale una funzione

$$u(x,t) = f(x+t) + g(x-t)$$

sara' soluzione delle equazione delle onde.

2.2. **Il metodo di D'alambert.** Il metodo di D'alambert consiste nel cercare una soluzione del problema ai dati iniziali su tutto lo spazio:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} \quad x \in]a,b[, 0 < t < T \\ u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x) \quad x \in [a,b] \end{cases}$$

In questo caso si suppone che la corda sia infinita, e quindi non ci assegnano condizioni agli estremi, ma solo al tempo iniziale, e si cercano soluzioni nella forma

$$u(x,t) = f(x+t) + g(x-t).$$

che soddisfi le condizioni iniziali. Si pone pertanto

$$u(x,0) = u_0(x) = f(x) + g(x)$$

$$u_t(x,0) = u_1(x) = f'(x) - g'(x)$$

Derivando la prima rispetto a x si ottiene

$$u_0'(x) = f'(x) + g'(x).$$

Quindi sommando queste due ultime equazioni si ottiene

$$u_1 + u_0' = 2f'$$

Sottraendo

$$-u_1 + u_0' = 2g'$$

Quindi

$$f(x) = \frac{1}{2}u_0(x) + \frac{1}{2}\int_0^x u_1(y)dy + C_f$$

$$g(x) = \frac{1}{2}u_0(x) - \frac{1}{2}\int_0^x u_1(y)dy + C_g$$

Ne viene che la soluzione sara'

$$u(x,t) = f(x+t) + g(x-t) =$$

$$\frac{1}{2}u_0(x+t) + \frac{1}{2}\int_0^{x+t} u_1(y)dy + C_f$$

$$+\frac{1}{2}u_0(x-t) + \frac{1}{2}\int_0^{x-t} u_1(y)dy + C_g =$$

$$= \frac{1}{2}\Big(u_0(x+t) + u_0(x-t)\Big) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} u_1(y)dy + C_f + C_g.$$

Per $t = 0$ si ottiene

$$u(x,t) = u_0(x) + C_f + C_g.$$

Quindi, poiche' cerchiamo soluzioni, che al tempo iniziale assumano il dato u_0, allora $C_f + C_g = 0$. E quindi

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\Big(u_0(x+t) + u_0(x-t)\Big) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} u_1(y)dy$$

Remark 2. *Una prima conseguenza del fatto che queste funzioni sono soluzioni e' che non vale il principio di massimo: le soluzioni sono ottenute semplicemente per traslazione di una funzione f o g iniziale, e nulla vieta che un massimo possa essere assunto all'interno. Un'altra osservazione che in generale le soluzioni non sono piu regolari del dato iniziale, perche' possono essere invece semplici traslazioni del dato iniziale.*

2.3. **Esistenza di soluzioni su domini limitati.** Il metodo di separazione delle variabili si applica anche all'equazione delle onde sul rettangolo

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{yy} \quad x \in]0,L[, t > 0 \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, \quad t > 0 \\ u(x,0) = u_0,\ u_t(x,0) = u_1, \quad x \in]0,L[\end{cases}$$

Cerchiamo una soluzione della forma

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

Sostituendo nell'equazione otteniamo

$$X''(x)T(t) = X(x)T''(t)$$

Separiamo le variabili, ovvero portiamo tutta la dipendenza da x al primo membro e da t al secondo. Si ottiene

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{T}$$

Poiche' il primo membro non dipende da t, il secondo non dipende da x, e sono uguali, allora non dipendono dalle variabili del problema, e si tratta di una costante, che indicheremo λ

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{T} = \lambda$$

Il problema si spezza quindi in due problemi:

$$\begin{cases} X'' = \lambda X \quad x \in [0,L] \\ X(0) = 0, X(L) = 0 \end{cases} \qquad \big\{ T'' = \lambda T \quad t \in [0,T]$$

Il primo dei due e' un problema agli autovalori. Gli autovettori risultano

$$X_k = \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$$

e gli autovalori

$$\lambda_k = -\Big(\frac{k\pi}{L}\Big)^2, \quad k \in Z.$$

Determinato il valore di λ_k possiamo ora risolvere il problema per T:

$$T'' = \lambda_k T$$

e quindi otteniamo

$$T_k = \alpha_k \cos\left(\frac{k\pi t}{L}\right) + \beta_k \cos\left(\frac{k\pi t}{L}\right)$$

La soluzione sara' quindi del tipo

$$u_k(x,t) = X_k T_k = \left(\alpha_k \cos\left(\frac{k\pi t}{L}\right) + \beta_k \sin\left(\frac{k\pi t}{L}\right)\right) \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$$

Pertanto, poiche' l'equazione e' lineare sono soluzioni anche

$$u(x,t) = \sum_k \left(\alpha_k \cos\left(\frac{k\pi t}{L}\right) + \beta_k \sin\left(\frac{k\pi t}{L}\right)\right) \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$$

Questa e' quindi la soluzione piu generale che otteniamo. La sua derivata risulta

$$u_t(x,t) = \sum_k \frac{k\pi}{L}\left(- \alpha_k \sin\left(\frac{k\pi t}{L}\right) + \beta_k \cos\left(\frac{k\pi t}{L}\right)\right) \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$$

Andiamo ad imporre i dati iniziali

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x)$$

Si ottiene

$$u_0(x) = \sum_k \alpha_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$$

$$u_1(x) = \sum_k \beta_k \frac{k\pi}{L} \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$$

Per il momento siamo quindi in grado di risolvere problemi con dato iniziale di questo tipo.

Esempio 3.

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{yy} \quad x \in]0,5[, t > 0 \\ u(0,t) = u(5,t) = 0, \quad t > 0 \\ u(x,0) = \sin(2\pi x) + 3\sin(\frac{\pi x}{5}), \quad x \in]0,5[\\ u_t(x,0) = \sin(3\pi), \quad x \in]0,5[\end{cases}$$

Dalla formula precedente si ottiene

$$\sum_k \alpha_k \sin\left(\frac{k\pi}{5}x\right) = \sin(2\pi x) + 3\sin(\frac{\pi x}{5})$$

$$\sum_k \frac{k\pi}{5}\beta_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) = \sin(3\pi)$$

Quindi tutti i coefficienti del tipo α_k *sono nulli, tranne*

$$\frac{k\pi}{5} = 2\pi, \quad k = 10, \quad \alpha_k = 1$$

$$\frac{k\pi}{5} = \frac{\pi}{5} =, \quad k = 1, \quad \alpha_1 = 3$$

Dalla seconda relazione deduciamo invece

$$\frac{k\pi}{5} = 3\pi, \quad k = 15, \quad \beta_{15} = \frac{1}{3\pi}$$

Conseguentemente u diviene

$$u(x,t) = 3\cos\left(\frac{\pi t}{5}\right)\sin\left(\frac{\pi}{5}x\right)$$

$$+\cos\left(2\pi t\right)\sin\left(2\pi x\right) + \frac{1}{3\pi}\sin\left(3\pi t\right)\sin\left(3\pi x\right)$$

Svolgere l'esercizio seguente

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{yy} \quad x \in]0,1[, t > 0 \\ u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0, \quad t > 0 \\ u(x,0) = \cos(2\pi x) + 5\cos(4\pi x, \quad x \in]0,1[\\ u_t(x,0) = -2\cos(\pi x), \quad x \in]0,1[\end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{yy} \quad x \in]0,1[, t > 0 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad t > 0 \\ u(x,0) = -2\sin(2\pi x) + 7\sin(5\pi x, \quad x \in]0,1[\\ u_t(x,0) = -2\sin(\pi x), \quad x \in]0,1[\end{cases}$$

3. Classificazione delle equazioni del secondo ordine

Si dice equazione differenziale del secondo ordine un'espressione del tipo

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y = 0.$$

Si dice matrice associata all'equazione del secondo ordine:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

Ricordo che la matrice

$$H = \begin{pmatrix} \partial_{xx}u & \partial_{xy}u \\ \partial_{xy}u & \partial_{yy}u \end{pmatrix}$$

si dice matrice Hessiana di u

Remark 3. *Verifichiamo che l'equazione del secondo ordine puo' essere espressa nella forma*

$$tr(AH) + termini\ del\ primo\ ordine = 0$$

dove tr e' la somma degli elementi sulla diagonale.

Infatti

$$AH = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_{xx}u & \partial_{xy}u \\ \partial_{xy}u & \partial_{yy}u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\partial_{xx}u + b\partial_{xy}u & a\partial_{xy}u + b\partial_{yy}u \\ b\partial_{xx}u + c\partial_{xy}u & b\partial_{xy}u + d\partial_{yy}u \end{pmatrix}$$

La traccia di questo prodotto, somma degli elementi sulla diagonale, risulta allora

$$a\partial_{xx}u + 2b\partial_{xy}u + d\partial_{yy}u = 0$$

Ovvero la parte del secondo ordine dell'equazione in esame.

Poiche' la parte del secondo ordine dell'equazione, detta anche parte principale dell'equazione si scrive in termini della sola matrice A, allora sara possibile classificare le equazioni differenziali in base alla matrice A.

Osserviamo esplicitamente quale matrice si ottiene nei vari casi considerati fin ora:

Esempio 4. *Consideriamo l'equazione delle onde*

$$u_{xx} - u_{yy} = 0$$

La matrice associata sara'

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

In questo caso gli autovalori sono di segno opposto e non nulli, e quindi la matrice e' non definita

Esempio 5. *Consideriamo l'equazione di Laplace*

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

La matrice associata sara'

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Quindi si tratta di una matrice diagonale. Per questo tipo di matrice sulla diagonale si leggono gli autovalori. In questo caso gli autovalori sono entrambi positivi, e quindi la matrice e' definita positiva.

Possiamo porci un problema analogo per l'equazione di Laplace in $\mathbb{R}^3$

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$$

La matrice associata sara'

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Anche in questo caso la matice e' definita positiva.

Remark 4. *Consideriamo l'equazione del calore*

$$u_{xx} - u_t = 0$$

La matrice associata sara'

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

In questo caso gli autovalori sono 0, 1 e quindi la matrice e' semi definita.

In dimensione 2*, l'equazione del calore diviene*

$$u_{xx} + u_{yy} - u_t = 0$$

La matrice associata sara'

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

In questo caso gli autovalori sono 1, 1, 0 e quindi la matrice e' semi definita.

Osserviamo che in questo caso la variabile t non compare fra le variabili del secondo ordine, quindi potremmo considerare una matrice piu piccola di dimensione 2*, associata alle sole direzini spaziali, che sara'*

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e questa e' definita positiva, e l'equazione del calore diventa

$$u_t = tr(A_1 H),$$

dove l'hessiana e' puramente spaziale. Ovviamente si tratta di due modi equivalenti per descrivere l'equazione, perche' possiamo richiedere che la matrice A sia semidefinita, oppure che abbia un minore A_1 definito positivo, e una colonna nulla.

Anche nel caso piu generale, sara' sufficiente guardare al segno degli autovalori per classificare una matrice, perche' a meno di un cambiamento di variabile possiamo sempre supporre che la matrice sia diagonale, e ricondurci ad uno dei tre casi precedenti:

Definition 4. *Consideriamo un'equazione del secondo ordine*

$$tr(AH) + du_x + eu_y = 0$$

- *Se A e' definita positiva, l'equazione si dice ellittica.*
- *Se A e' non definita, l'equazione si dice iperbolica.*
- *Se A e' semidefinita, l'equazione si dice parabolica.*

  L'ultimo caso puo' presentarsi in una forma particolare, analoga al calore. Se A e' semidefinita positiva, potrebbe avere un minore A_1 *di dimensione* $n-1$ *definito positivo, e associato alle variabili spaziali, e una colonna nulla, associata alla variabile temporale. E l'equazione avrebbe la forma*

  $$tr(A_1 H_{n-1}) - u_t,$$

  dove A_1 *e' il minore* $n-1$ *dimensionale, definito positivo della matrice A e H e' l'Hessiana puramente spaziale.*

Remark 5. *In generale i tre tipi di equazioni che abbiamo individuato hanno proprieta' analoghe ai tre esempio modello che abbiamo esaminato*

- *Nel caso iperbolico un cambio di variabile lineare riconduce l'equazione ad un'equazione di tipo onde, e quindi ogni equazione iperbolica verifica le stesse proprieta': il principio di massimo non e' verificato, le soluzioni non sono piu regolari del dato al bordo*
- *Nel caso ellittico un cambio di variabile lineare riconduce l'equazione ad un'equazione di tipo Laplace, e quindi ogni equazione ellittica verifica le stesse proprieta' dell'equazione di Laplace: il principio di massimo, il fatto che le soluzioni sono piu regolari del dato al bordo.*
- *Un'equazione parabolica si riconduce ad un'equazione di tipo calore, e quindi ogni equazione parabolica verifica le stesse proprieta': il principio di massimo, il fatto che le soluzioni sono piu regolari del dato al bordo.*

Vale un teorema che permette di riconoscere se una matrice e' definita positiva:

Theorem 1. *Sia A una matrice quadrata simmetrica, ed indichiamo* A_i *i suoi minori principali.*

- *Se* $det(A_i) > 0$ *per ogni* i*, allora A e' definita positiva*
- *Se* $segn(det(A_i)) = (-1)^i$ *per ogni* i*, allora A e' definita negativa*
- *Se* $det(A) \neq 0$*, e i segni non verificano nessuna delle condizioni precedenti, allora A e' non definita*