1. Serie di Fourier

I problemi al bordo associati ad equazioni differenziali si sanno risolvere con il metodo di separazione delle variabili soltanto se il dato iniziale si rappresenta nella forma
$$f(x) = \sum_k a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx).$$

Ci domandiamo allora se e' sempre possibile rappresentare una funzione in questo modo.

Remark 1. *Osserviamo preliminarmente che le funzioni seno e coseno verificano le proprieta' seguenti:*
$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)dx = 0,$$
Inoltre, usando il fatto che $\sin(kx)\cos(hx) = \frac{1}{2}\Big(\sin((k+h)x) + \sin((k-h)x)\Big)$
$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)\cos(hx)dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \Big(\sin((k+h)x) + \sin((k-h)x)\Big)dx = 0$$
Analogamente usando il fatto che $\cos(kx)\cos(hx) = \frac{1}{2}\Big(\cos((k+h)x) + \cos((k-h)x)\Big)dx$*, se* $h \neq k$*, si ottiene*
$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\cos(hx)dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \Big(\cos((k+h)x) + \cos((k-h)x)\Big)dx = 00,$$
Infine sempre se $h \neq k$ *si ha*
$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)\sin(hx)dx = 0,$$

Remark 2. *Se una funzione* $f : [-\pi, \pi] \to R$ *ammette una rappresentazione del tipo*
$$f(x) = a_0 + \sum_k a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx),$$
allora
$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \quad a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)dx$$

Proof *Integrando entrambi i membri dell'espressione di* f *si ha*
$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} a_0 dx + \sum_k a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)dx + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)dx =$$
$$\text{\textit{per il remark 1}} \quad \int_{-\pi}^{\pi} a_0 dx = 2\pi a_0.$$
Quindi
$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,$$

Analogamente integriamo l'espressione di f moltiplicata per $\cos(hx)$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(hx)dx = \int_{-\pi}^{\pi} a_0 \cos(kx)dx + \sum_k a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\cos(hx)dx + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)\cos(hx)dx =$$

$$\textit{per il remark 1} \quad a_h \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(hx)dx$$

Quindi

$$a_h = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(hx)dx}{\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(hx)dx} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(hx)dx$$

Analogamente integriamo l'espressione di f moltiplicata per $\sin(hx)$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(hx)dx = \int_{-\pi}^{\pi} a_0 \sin(kx)dx + \sum_k a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\sin(hx)dx + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)\sin(hx)dx =$$

$$\textit{per il remark 1} \quad b_h \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(hx)dx$$

Quindi

$$b_h = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(hx)dx}{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(hx)dx} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(hx)dx$$

Diamo ora un'interpretazione geometrica del conto che abbiamo appena fatto, cercando di interpretare f come combinazione lineare degli elementi di una base di uno spazio vettoriale.

Osserviamo che per scrivere la rappresentazione che abbiamo ottenuto ci serve determinare l'integrale del quadrato delle funzioni seno e coseno. E ci serve integrare la funzione f. Diamo pertanto la definizione seguente:

Definition 1. *Si dice spazio delle funzioni di quadrato sommabile o $L^2([-\pi,\pi])$ lo spazio delle funzioni f tali che $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx < \infty$*

$$L^2([-\pi,\pi]) = \left\{ f : \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx < \infty \right\}$$

Osserviamo esplicitamente che $L^2([-\pi,\pi])$ e' uno spazio vettoriale, perche'

- Se $f, g \in L^2([-\pi,\pi])$, allora $f+g \in L^2([-\pi,\pi])$
- Se $f \in L^2([-\pi,\pi])$, allora $\lambda f \in L^2([-\pi,\pi])$

Definiamo in questo spazio vettoriale un prodotto scalare formalmente analogo a quello fra vettori. Ricordo che, se abbiamo due vettori

$$v = \Big(v(1), v(2), \cdots v(n)\Big) \quad w = \Big(w(1), w(2), \cdots w(n)\Big)$$

il prodotto scalare si definisce

$$< v, w >= \sum_i v(i)w(i).$$

Inoltre la norma verifica

$$||v||^2 =< v, v > .$$

Due vettori si dicono ortogonali se

$$< v, v >= 0.$$

Se lavoriamo in uno spazio di dimensione n, e scegliamo $N < n$ e N vettori ortogonali

$$e_1, \cdots e_N,$$

indichiamo con V_N lo spazio vettoriale generato da $e_1, \cdots e_N$ e possiamo esprimere la proiezione ortogonale di un vettore v sul sottospazio V_N come

$$\pi_{V_N} v = \frac{< v, e_1 >}{||e_1||^2} e_1 + \cdots + \frac{< v, e_N >}{||e_N||^2} e_N.$$

Ovviamente

$$||\pi_{V_N}|| \leq ||v||,$$

e aumentando il numero dei vettori e_i, ovvero aumentando N si ottiene una migliore approssimazione. Osserviamo infine che se v e' un vettore e π_{V_N} e' la sua proiezione su V_N allora $v - \pi_{V_N}$ e' ortogonale a $\pi_{V_N}(v)$.

In analogia a queste considerazioni definiremo un prodotto scalare in L^2 :

Definition 2. *Se f, $g \in L^2([pi, \pi])$, si dice prodotto scalare di f e g*

$$< f, g >_{L^2} = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x) dx.$$

Inoltre si dice norma

$$||f||^2 = < f, f > = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx.$$

Due funzioni si dicono ortogonali se

$$< f, g > = 0.$$

Con questa definizione

Proposition 1.
- *il remark 1 garantisce che vettori*

  $$1, \cos(kx), \sin(kx), : k \leq N,$$

  sono ortogonali. e generano uno spazio V_N, sottospazio di L^2. Infatti

  $$< 1, \cos(kx) > = < 1, \sin(kx) > = 0 \quad < \sin(kx), \cos(hx) > = 0,$$

  ed infine, se $h \neq k$,

  $$< \sin(kx), \sin(hx) > = 0, \quad < \cos(kx), \cos(hx) > = 0.$$

- *la proiezione della funzione f sul sottospazio V_N si rappresenta*

  $$\pi_{V_N} f = \frac{< f, 1 >}{||1||^2} 1 + \sum_k \Big(\frac{< f, \cos(kx) >}{|| \cos(kx)||^2} \cos(kx) + \frac{< f, \sin(kx) >}{|| \sin(kx)||^2} \sin(kx) \Big).$$

- *il remark 2 ci dice che se*

  $$\pi_{V_N} f(x) = a_0 + \sum_k a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx),$$

  e i coefficienti della proiezione sono esattamente

  $$a_0 = \frac{< f, 1 >}{||1||^2} \quad a_k = \frac{< f, \cos(kx) >}{|| \cos(kx)||^2} \quad b_k = \frac{< f, \sin(kx) >}{|| \sin(kx)||^2}$$

Osserviamo quindi che il linea di principio, anche se i coefficienti della rappresentazione che cercavamo erano unici, non e' detto che siamo in grado di ricostruire la funzione f. Si tratta invece di una proiezione su un sottospazio.

Theorem 1. di Pitagora *Se f e g sono due funzioni in L^2 ortogonali fra loro*

$$||f+g||^2 = ||f||^2 + ||g||^2$$

Proof

$$||f+g||^2 =< f+g, f+g >=< f,f > + < f,g > + < g,f > + < g,g >=$$

poiche' f e g sono ortogonali

$$=< f,f > + < g,g >= ||f||^2 + ||g||^2$$

Theorem 2. *Se $f \in L^2$ e*

$$\pi_{V_N} f(x) = a_0 + \sum_k a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx),$$

e' la sua proiezione, allora

$$a_k \to 0, b_k \to 0$$

as $k \to \infty$.

Proof Osserviamo che, per il teorema di Pitagora

$$||\pi_{V_N} f||^2 = ||a_0 + \sum_k a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)||^2 =$$

$$||a_0||^2 + \sum_k |a_k|^2 || \cos(kx)||^2 + |b_k|^2 || \sin(kx)||^2 =$$

(poiche' $|| \cos(kx)||^2 = || \sin(kx)||^2 = \pi$)

$$2\pi|a_0|^2 + \pi \sum_k \Big(|a_k|^2 + |b_k|^2\Big).$$

D'altra parte

$$||\pi_{V_N} f||^2 \leq ||f||^2||$$

E quindi

$$2\pi|a_0|^2 + \pi \sum_k \Big(|a_k|^2 + |b_k|^2\Big) \leq ||f^2||.$$

In particolare la serie

$$\sum_k \Big(|a_k|^2 + |b_k|^2\Big)$$

e' convergente e quindi

$$a_k \to 0, \quad b_k \to 0$$

Osserviamo esplicitamente che le due funzioni seno coseno si rappresentano in termini dell'esponenziale reale. Possiamo infatti considerare

$$exp(ikx) = \cos(kx) + i \sin(kx)$$

$$exp(-ikx) = \cos(kx) - i \sin(kx).$$

Possiamo quindi riscrivere la proposizione precedente in termini di esponenziali immaginarie invece che di funzioni trigonometriche

Proposition 2. • *il remark 1 i vettori*

$$e^{ikx}, : k \in Z,$$

sono ortogonali. e generano uno spazio V_N, sottospazio di L^2.

- *la proiezione della funzione f sul sottospazio V_N si rappresenta*

$$\pi_{V_N} f = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{< f, \exp(ikx) >}{|| \exp(ikx)||^2} \exp(ikx)$$

- *Posto*

$$\pi_{V_N} f(x) = \sum_k c_k \exp(ikx)$$

i coefficienti della proiezione sono esattamente

$$c_k = \frac{< f, \exp(ikx) >}{|| \exp(ikx)||^2}$$

- $c_k \to$ *per $k \to +\infty$ e per $k \to -\infty$*

Definition 3. *Funzione continua a tratti. Una funzione $f : [a, b] \to R$ si dice continua a tratti se e' limitata ed esistono $n + 1$ punti $x_0 = a, x_1, \cdots, x_n = b$ tali che*

$$x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

tali che f e' continua in $]x_{i-1}, x_i[$ per ogni i Analogamente si definisce una funzione C^1 a tratti.

Theorem 3. *Sia $f : \mathbb{R} \to C$ una funzione T-periodica e $C^{(1)}$. Se essa è continua in c, allora le somme parziali di Fourier di f (anche non simmetriche) convergono a $f(c)$.*

Dimostrazione. Per semplificare le notazioni, effettuiamo la dimostrazione con $T = 2\pi$. Inoltre, non è restrittivo supporre $c = 0$. Consideriamo allora la funzione

$$g(t) = \frac{f(t) - f(0)}{e^{it} - 1} \ .$$

In ogni intervallo chiuso contenuto in $(0, 2\pi)$, la funzione $\frac{1}{e^{it}-1}$ è limitata; pertanto, in tali intervalli, la funzione g è $C^{(1)}$ a tratti, perché lo è f. Inoltre, vicino a 0, si ha, per ipotesi:

$$g(t) = \frac{f(t) - f(0)}{t} \frac{t}{e^{it} - 1} = \frac{f(t) - f(0)}{t} \frac{1}{\frac{\cos t - 1}{t} + i \frac{\sin t}{t}} =$$

$$= \frac{f(t) - f(0)}{t} \frac{1}{i + o(1)} \to -if'(0+) \text{ , per } t \to 0+;$$

pertanto g è continua a tratti in $[0, a]$, $\forall a \in (0, 2\pi)$. Il ragionamento fatto a destra di 0 può essere ripetuto anche a sinistra di 0; pertanto, g è continua a tratti anche in $[a - 2\pi, 0]$. Dalla periodicità di f, si ottiene che g è continua a tratti anche in $[a, 2\pi]$. Ne consegue che g è è continua a tratti su di un periodo. Si ha poi:

$$f(t) = f(0) + g(t) \left(e^{it} - 1\right) \ .$$

Allora, tenendo presente che la serie di Fourier di una funzione costante coincide con la funzione stessa e quindi tutti i suoi coefficienti di Fourier sono nulli tranne quello per $k = 0$, il k-esimo coefficiente di Fourier di f può essere scritto nella forma seguente:

$$c_k(f) = \delta_{k0} f(0) + c_{k-1}(g) - c_k(g) \ .^1$$

Ne consegue che

$$\sum_{k=-m}^{n} c_k(f) = f(0) + c_{-m-1}(g) - c_n(g) \ .$$

Ma sappiamo che $c_{-m}(g)) \to 0$, per $m \to +\infty$ e $c_n(g) \to 0$, per $n \to +\infty$. Allora,

$$\lim_{m\to+\infty} \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=-m}^{n} c_k(f) = f(0) \ .$$

Teorema 2. *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una funzione T-periodica e $C^{(1)}$ a tratti. Se f possiede in c un punto di discontinuità di prima specie, allora le somme parziali simmetriche di Fourier di f convergono a $\frac{1}{2}\left(f(c+) + f(c-)\right)$.*

1.1. **serie di fourier in soli seni o in soli coseni.**

Definition 4. *Una funzione $f : [-a, a] \to R$ si dice pari se $f(-x) = f(x)$ per ogni x. Una $f : [-a, a] \to R$ si dice dispari se $f(-x) = -f(x)$ per ogni x.*

Proposition 3. *L'integrale di una funzione dispari su un intervallo simmetrico e' nullo. Il prodotto di due funzioni pari e' pari, di due funzioni dispari e' pari, di una funzione dispari e una pari e dispari.*

Esempio 1. *La funzione sin e' dispari, la funzione coseno e' pari su $[-\pi, \pi]$.*

Proposition 4. *Una funzione $f : [-L, L] \to R$ continua e dispari si sviluppa in soli seni, una funzione pari si sviluppa in soli coseni.*

Proof Supponiamo che la funzione sia dispari. Allora nei punti di continuita'

$$f = a_0 + \sum_k a_k \cos\left(\frac{\pi k}{L} x\right) + b_k \sin\left(\frac{\pi k}{L} x\right),$$

dove

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x) dx,$$

quindi $a_0 = 0$, perche' l'integrale della funzione f, dispari, e' nullo

$$a_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos\left(\frac{\pi k}{L} x\right) dx,$$

anche gli a_k sono nulli, perche' il prodotto della funzione f, dispari, per la funzione coseno, pari, e' dispari, e ha l'integrale nullo. Quindi sono non nulli soli i coefficienti dei seni.

Proposition 5. *Una funzione $f : [0, L] \to R$ si puo' sviluppare in soli seni,*

Proof. Infatti, basta estendere la funzione ad una funzione dispari su tutto $[-L, L]$, ponendo

$$f(-x) = -f(x)$$

su $[-L, 0]$ E, poiche' la funzione e' dispari, ammette sviluppi in soli seni.

---

[1] Il simbolo di Kronecker δ_{kh} assume valore 1 se gli indici h e k sono uguali e valore 0 se sono diversi. Pertanto, δ_{k0} è uguale a 1 se $k = 0$, mentre è uguale a 0 altrimenti.

Proposition 6. *Una funzione $f : [0, L] \to R$ si puo' sviluppare in soli coseni,*

Proof. Infatti, basta estendere la funzione ad una funzione pari su tutto $[-L, L]$, ponendo

$$f(-x) = f(x)$$

su $[-L, 0]$ E, poiche' la funzione ottenuta e' pari, ammette sviluppi in soli coseni.

Svolgere gli esercizi seguenti

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} \quad x \in]0,1[, t > 0 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad t > 0 \\ u(x,0) = x \quad x \in]0,1[\end{cases}$$

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} \quad x \in]0,1[, t > 0 \\ u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0, \quad t > 0 \\ u(x,0) = 5 - 2x \quad x \in]0,1[\end{cases}$$

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} \quad x \in]-1,1[, t > 0 \\ u(-1,t) = u(1,t), \quad u_x(-1,t) = u_x(1,t), \quad t > 0 \\ u(x,0) = x + 1 \quad x \in]-1,1[\end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad x \in]0,1[, 0 < y < 2 \\ u(x,0) = 2x, u(x,2) = 0 \quad x \in]0,1[, \\ u(0,y) = 0 = u(1,y) y \in]0,2[\end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{yy} \quad x \in]0,1[, t > 0 \\ u_x(0,t) = 0, u_x(0,t) = 0 \quad t > 0, \\ u(x,0) = x - 1, \quad u_t(x,0) 2 - \cos(\pi x) \quad t > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{yy} \quad x \in]0,1[, t > 0 \\ u(0,t) = 0, u(0,t) = 0 \quad t > 0, \\ u(x,0) = -1, \quad u_t(x,0) \sin(\pi x) \quad t > 0 \end{cases}$$